《线性规划》编写组 编著
徐 信 主编 刘小和 副主编

线性规划方法及应用模型

线性规划方法及应用模型

《线性规划》编写组 编著
徐 信 主 编
刘小和 副主编

北京科学技术出版社

线性规划方法及应用模型

《线性规划》编写组　编著

徐　信　主　编

刘小和　副主编

*

北京科学技术出版社出版

（北京西直门南顺城街12号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　11印张　246千字

1990年12月第一版　1990年12月第一次印刷

印数 1—4150册

ISBN7-5304-0731-7/Z.370　定价：5.00元

内 容 简 介

本书系统地叙述了线性规划方法、线性规划在农业上的应用模型和求解线性规划的计算机程序。全书包括三部分共十三章。内容深入浅出，通俗易懂。在基本方法的阐述上，着重于思路的分析和几何的直观解释，尽力避免数学上不必要的论证。在应用模型方面，对模型的建立方法和技巧有较详细的论述；计算机求解程序用汉字系统支持，使用方便、功能齐全。

本书主要作为高等农业院校各专业的教材。还可作为其他高等院校经济管理专业的教材，也可作为农业、工矿企业的科技人员、管理人员的参考书。

前　　言

线性规划是高等农业院校和其他有关院校的一门重要基础课。多年来在教学中，方法和应用脱节的问题始终没有得到很好的解决。为了加强实践教学，在总结近年来线性规划教学及其在农业上应用经验的基础上，编著了本书。本书的特点是将线性规划的基本理论及在农业上的应用模型、计算机求解线性规划问题的方法有机地结合起来。在深入浅出介绍线性规划方法之后，较为详细地阐述建立种植业、畜牧业、农机配置、资金、区域综合规划等线性规划模型的技巧和方法，并着重介绍应用计算机技术求解线性规划问题。这样就会使学生在学习这门基础课的过程中，既掌握了方法，又学会了实际应用，从而培养了学生独立工作的能力。

本书分为三篇共十三章。第一篇为基本方法部分，第二篇为应用模型部分，第三篇为计算机程序部分。在讲授本书时通常需要40～70学时。对于第二篇模型部分可根据具体情况对内容进行某些取舍，以便收到更好的效果。

本书由北京农学院、河南农业大学、云南农业大学、河北农业大学、上海农学院、山西农业大学、郑州轻工业学院等院校联合编写。

全书由北京农业大学刘宗鹤教授、贺锡平教授主审。在编写过程中得到北京农业大学赵冬缓教授、北京农学院胡锡骥教授、杜兴华副教授的热情帮助，北京商学院贾汉复同志帮助进行了部分校对工作，在此表示感谢。

限于编著者水平，书中不妥之处在所难免，请广大读者批评指正。

编　者

1990年2月

主　编　徐　信

副主编　刘小和

编写组　（按姓氏笔画为序）

王文亮　傅一江　兰徐民
孙　鹤　刘小和　刘小玲
刘宇红　金福昌　赵玉祥
徐　信　梁保松　张义珍

主　审　刘宗鹤　贺锡苹

目　　录

第一篇　线性规划的基本方法

第二篇　线性规划应用模型

第三篇 线性规划问题的计算机程序

第一篇　线性规划的基本方法

线性规划是运筹学中创建较早，发展较快、应用广泛、理论和算法都比较成熟的一个重要分支。特别是电子计算机的普及和发展，使它在实际中的应用日益广泛和深入，成为当代用途最广泛的运筹学方法之一，也是现代管理科学的重要基础和手段之一。

线性规划研究两类问题：一类是在一定的资源（人力、物力、财力等）条件下，如何组织安排，使得经济效果最好；另一类是在完成既定任务的前提下，如何统筹安排，使得消耗的资源最少。事实上，这是一个问题的两种提法，即在一定的条件下，寻求整个问题的某个指标最优化问题。从数学上来说是一个条件极值问题。这类问题的数学模型称为线性规划模型。

第一章　线性规划问题与图解法

本章通过典型的实际问题，建立线性规划数学模型；介绍两个变量线性规划问题的图解法；给出线性规划问题的标准形式；最后介绍线性规划问题的一些基本概念、解的性质。为研究线性规划问题的单纯形解法打下基础。

§1-1 线性规划数学模型

例1.1 某农场种植两种作物A、B，需用甲、乙两种化肥。种植每亩作物A和作物B分别需用的化肥数，可得利润及农场现有化肥数量如表1-1所示：

表1-1

每亩作物所需化肥（百公斤） 作物 / 化肥	A	B	现有化肥（百公斤）
甲	2	3	100
乙	4	2	120
每亩作物可得利润(百元)	6	4	

问在现有条件下，如何按排种植，才能使利润最大？

解：设种植作物A、B分别为x_1、x_2亩，使得总利润为S（百元）。

该农场追求的目标是获取最大利润，用数学表达式表示为：

$$\max S = 6x_1 + 4x_2$$

该农场的种植面积受到甲、乙两种化肥的限制，我们就要在数学上描述这些限制因素，使种植这两种作物对化肥的需要不得超过它们各自的现有数量。

甲种化肥限制因素可表示为：

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 100$$

乙种化肥限制因素可表示为：

$$4x_1+2x_2\leqslant 120$$

由于A、B两种作物的亩数不能是负数，所以还要增加非负限制：

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0;$$

综合上述要求与限制，就得到了这个问题的数学模型，即

求 $$\max S=6x_1+4x_2 \tag{1-1}$$

满足 $$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 100\\ 4x_1+2x_2\leqslant 120\\ x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0\end{cases} \tag{1-2}$$

其中，记号"$\max S$"表示函数 S 的最大值。函数 S 称为目标函数；不等式组(1-2)称为约束条件。

例1.2 计划由甲、乙、丙三个发点运输某种粮食至A、B、C三个加工厂。它们各自的供应量和需求量以及各供应地至各需求地的单位运输价如表1-2和表1-3所示，试作出运费最省的调运计划方案。

表1-2 **供求表** （单位：吨）

收点 / 发点	A厂	B厂	C厂	供应量
甲				20
乙				30
丙				50
需求量	25	50	25	100

表1-3　　　　每吨粮食运价表　　　　（单位10元）

发点 \ 收点	A厂	B厂	C厂
甲	12	8	9
乙	7	4	3
丙	6	5	2

解： 设第i个（行）发点运到第j个（列）工厂的粮食为x_{ij}吨，则问题的表格可重列为粮食运量运价表如表1-4所示。

表1-4　　　　粮食运量运价表

x_{ij} $(i=1,2,3)$ $(j=1,2,3)$	A厂	B厂	C厂	供应量
甲	12　x_{11}	8　x_{12}	9　x_{13}	20
乙	7　x_{21}	4　x_{22}	3　x_{23}	30
丙	6　x_{31}	5　x_{32}	2　x_{33}	50
需求量	25	50	25	100

从甲、乙、丙三地运往A、B、C三个加工厂粮食数量的总和应该分别等于20吨、30吨和50吨，所以这些x_{ij}应满足：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=20$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=50$$

运到A、B、C三厂的粮食的数量分别为25吨、50吨和25吨，所以x_{ij}还应满足：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=25$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=50$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=25$$

x_{ij}是运量，不能是负数，所以还应满足：

$$x_{ij}\geqslant 0,\ (i=1,2,3,j=1,2,3)$$

除满足上述要求外，还应该使运费最省。单位运输费已由表1-3给出，总的运费应是所有发点到收点的运量乘以运费之和，即

$$S=12x_{11}+8x_{12}+9x_{13}+7x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+6x_{31}+5x_{32}+2x_{33}$$

总起来说，我们要求的是x_{ij}在满足上述条件下，使S达到最小。从而得到这个问题的数学模型：

求 $\min S=12x_{11}+8x_{12}+9x_{13}+7x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+6x_{31}+5x_{32}+2x_{33}$

满足
$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=20\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=30\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=50\\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=25\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=50\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=25\\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3,j=1,2,3)\end{cases}$$

从上述两个例子可以看出，虽然两个问题的具体内容和性质不同，但它们都属于优化问题，即在一定条件下，求函数的最大（或最小）值问题，其共同特征为：

（1）每个问题都要求一组未知数$(x_1,x_2,\cdots x_n)$；这组未知数称为决策变量，它的一组定值就代表一个具体方案。通

常要求这些未知数取非负值。

（2）每个问题都存在一定的限制条件，即约束条件，这些限制条件都可以用一组线性不等式或线性等式来表达。

（3）每个问题都有一个最优化的追求目标，这个目标可以用线性函数表示，称为目标函数。目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值。

把具有这种模型的问题，称为线性规划问题 。

具有n个变量的线性规划问题的一般形式为：

求 $\max(\text{或}\min) S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (1-3)

$$\text{满足} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n * b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n * b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n * b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots x_n \geqslant 0 \end{cases} \quad (1\text{-}4)$$

其中“max”表示最大值，“min”表示最小值。“*”表示“＝”、“≥”、“≤”三个符号中的某一个。

这就是线性规划问题的数学模型。它包括目标函数式(1-3)和约束条件式(1-4)两大部分。

满足约束条件式(1-4)的一组x_1，x_2，$\cdots x_n$的值称为该线性规划问题的可行解。满足式(1-3)的可行解，称为该线性规划问题的最优解。

建立一个实际问题的线性规划数学模型，往往是比较复杂的，一般可以考虑下面几个方面：

（1）分析实际问题的全过程，确定所追求的目标和受到的限制，可将问题的条件列成表格。

（2）正确地设立决策变量，并注意到决策变量的非负约

束。

（3）将目标函数表为决策变量的线性函数，并明确是求最大值，还是求最小值。

（4）将约束条件表示为决策变量的线性等式或不等式。

建立实际问题的线性规划模型的具体方法和步骤，还将在本书第二部分详细论述。

§1-2 线性规划问题的图解法

图解法是解线性规划问题的一种方法。虽然这种方法仅适用于求解含有两个变量的线性规划问题，但因其简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，所以本节通过例题对这种方法作一简要介绍。

例1.3 用图解法求解例1.1。

解：（1）用几何图形表示各约束条件。例1.1中只有两个变量x_1和x_2，我们把x_1、x_2看成平面上点的坐标，那么满足约束条件中每一个不等式的点集就是一个半平面。如约束条件$2x_1+3x_2\leqslant100$是表示以直线$2x_1+3x_2\leqslant100$为边界，包括该直线在内的左下方半平面。所以满足约束条件（1-2）中的四个不等式的点集是四个半平面的相交部分，即图1-1中凸多边形$ABCD$的内部或边界上的任何一点的坐标，都同时满足约束条件中的四个不等式（图1-1中的阴影部分）。这样的凸多边形称为该线性规划问题的可行域，它是全部可行解的集合，即可行域中点的坐标(x_1, x_2)是该线性规划问题的可行解。

（2）分析目标函数S的几何意义。