高等学校教学用书

13.22
147

弹性和塑性理论及有限单元法

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

弹性和塑性理论及有限单元法

北京钢铁学院　王祖城 汪家才　编

冶 金 工 业 出 版 社

高等学校教学用书

弹性和塑性理论及有限单元法

北京钢铁学院　王祖城 汪家才　编

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版
（北 京 灯 市 口 74 号）
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　印张 26 1/4 字数 622 千字
1983年11月第一版　1983年11月第一次印刷
印数 00,001～6,800册
统一书号：15062·4053　定价2.70元

前　言

本书是根据一九八二年冶金部教材会议所确定的教材编写规划编写的，适合于机械和金属加工等专业本科生和研究生使用。

弹性理论既是古老的力学学科的一个分支，又是一门相对年轻的科学。从1821年法国人纳维叶提出平衡方程算起，至今不过一百六十年。过去它主要是一门理论学科，对一些典型问题的经典解，往往难以直接用到工程实际问题中去。因为实际问题的受力情况和边界形状比典型问题复杂，求精确解在数学上遇到的困难是很大的。六十年代以来有限单元法的出现和电算技术的发展，使弹性理论的应用范围扩大了，而且方法也简单了。这是工科院校普遍重视弹性理论课的一个重要原因。塑性理论则更年轻，如果以1913年米塞斯提出的屈服准则为标志，则它只有六十年的历史。随着建筑业和金属加工业的发展，塑性理论及其应用也发展得很快。由于塑性理论的方程比弹性理论的更为复杂，所以在塑性理论中，各种近似方法占有重要地位。无疑，有限单元法和电算技术在塑性理论中的应用也将更广泛地开展起来。

作为一本基础教材，本书不可能面面俱到。我们在本书弹性理论部分没有编入变分法、复变函数法、有限差分法和薄壳问题，在塑性理论部分没有编入大变形的平面应力问题和塑性稳定性问题。我们设想，学完本书的读者在必要时可以自学上述内容。

系统讲授本教材约需120～160小时，若讲课者不限于一人，则有限元部分可与塑性理论平行讲授。如果专为学习弹性理论的有限元法，可以只学本书的前四章，作为基础知识。对于大学生选修课，可以只讲弹性理论的平面问题和弹塑性小变形理论，即本书前六章和第十二～十五章的有关部分。

本书在叙述基本内容时，力求做到系统些和详细些，以利于读者自学。限于编者的水平，书中定有不少疏误，请读者指正。

编　者

一九八三年一月

目　录

绪　　论

§1　弹性和塑性理论的内容

弹性和塑性理论（又称弹性和塑性力学）是现代变形固体力学的分支。弹性和塑性理论的任务，一般说来，就是在实验所建立的关于材料变形的力学规律的基础上，用比较严谨的数学方法，来研究各种形状的变形固体在外载荷作用下所产生的应力、应变和位移。

弹性理论研究的对象是弹性体。这里指的是这样一种物体，它在每一给定温度下，存在着应力和应变间的单值关系，而与时间无关。通常这一关系是线性的，称为虎克定律。当外力取消后，应变即行消失，而物体完全恢复其原来的形状，同时物体内部的应力也完全消失。通常认为这种加载是缓慢的，即不会引起变形体的任何部分产生动能，此外还认为外力的作用并不引起物体温度的改变。于是，根据热力学第一定律，外力在其作用点的位移上所作的功，等于物体内部储存的变形位能，而恢复过程就是物体释放内部变形位能的过程。既然时间因素在这里不起作用，则物体内部的应力和应变只与即时的外载有关，与加载的“历史”无关。

塑性理论研究物体塑性状态的形成及其应力和变形规律。塑性状态是指物体的这样一种状态，即当应变足够大时，卸去外载后，物体不能恢复其原有形状而产生残余变形。这里已不存在应力与应变间的单值对应关系。以单向拉伸为例，在给定的应变下，不能确定应力，应力取决于是加载还是卸载，是第一次加载还是重复加载。塑性变形是能量的不可逆过程。

弹塑性理论和材料力学、结构力学有密切关系，但在研究对象和研究方法上是有区别的。材料力学的研究对象基本上是各种杆件，即物体的长度远大于其厚度和宽度的一度空间问题。结构力学则主要研究桁架、刚架等杆件系统。弹性和塑性理论除了更精确地研究一度空间问题外，更重要的是研究材料力学和结构力学所不能解决的问题。例如板、壳等长度和宽度远大于厚度的二度空间问题，以及一些长、宽、厚都是同阶大小的三度空间问题。但是所有这些相邻学科都归结为研究应力、应变和位移。在研究方法方面，弹性和塑性理论以其提出问题的普遍性和解答问题的严密性为特点。例如，在材料力学和结构力学中以平面截面假设为基本前提，简化了计算，得出工程上适用的解答。但这些解答是近似的，有时甚至是互相矛盾的。在弹性和塑性理论中则一般不采用平面截面假设。在材料力学和结构力学中求内力时，常将物体沿某截面切开，或从结点拆开，取剩下的部分为隔离体，列出静平衡条件求内力，这种方法可以叫做积分的方法。弹性和塑性理论的方法则与此相反，而是对于无限小的体积素（微分体）来列出平衡方程。这样，方程就具有微分的形式，问题归结为求解一系列偏微分方程组。如果说，材料力学和结构力学所提供的是危险截面或指定截面的最大应力，则弹性和塑性理论提供的是整个物体内部的应力分布规律——应力场。

习惯上将弹性和塑性理论分为数学的和实用的两部分。在**数学弹性和塑性理论**中只用

精确的数学方法进行研究，而不采用关于应变状态和应力分布的任何假设来简化计算。在**实用弹性和塑性理论**中，采用一些简化计算的假设，得出具有一定近似性的解答。后者按其解答的精确程度而言，是接近于材料力学的，但由于这些问题本身的复杂性和应用了较为复杂的数学工具，特别是在求解中直接利用了数学弹性和塑性理论的结果，故一般不列入材料力学中，属于这类问题的有板和壳问题，以及大量工程实用问题。

§2 基本假设

弹性和塑性理论中将研究对象的物理和几何性质加以抽象，提出若干规定或假设，作为研究的前提。下面先讨论弹性理论的基本假设。

（1）物体是连续的。把物体看做连续介质而内部没有空隙，因此任何一点的应力、应变和位移才可能是坐标的连续函数。虽然连续性假设和现代物质结构观点相抵触，但对于一门研究宏观现象的学科，它是可以采纳的。

（2）物体是均匀的和各向同性的。在物体内部各点以及在每一点的各个方向的物理性质相同。这样，物体的全部内域具有相同的弹性模量、泊松系数等。虽然金属材料的晶体结构呈各向异性，但通常上述物理量是指某种统计学平均值，所以金属物体整体一般仍不违背本假设，对木材、岩石应作单独研究，本书不予讨论。

（3）物体是完全弹性的。应力和应变线性相关，弹性模量不随应变的大小而变，加载和卸载规律相同（虎克定律）。

（4）物体的位移和应变是很小的。例如，受弯矩作用的梁，其弹性挠度甚小，受拉伸的金属杆，实际许可的应变的数量级约为10^{-4}。因此在研究物体受力后的平衡条件时，不计物体尺寸的改变；在运算中，认为应变的乘积比起应变本身是高阶小量，由此得到的弹性理论的微分方程是线性的。

（5）物体在发生变形前内部没有初应力。这指的是弹性物体处于“自然状态”。从理论上说，物体的实际应力是弹性应力和初应力之和。

根据上述基本假设建立起来的理论，称为**古典弹性理论**，或者突出材料服从虎克定律这一特征，称为**线性弹性理论**。与此相平行的是所谓**非线性弹性理论**，它又可分为两种情况：

（1）物理上的非线性。物体的变形是完全弹性的，但不服从虎克定律，即应力和应变不成正比。

（2）几何上的非线性。物体在外力作用下，产生很大的弹性应变。在所得出的弹性理论方程中，应变的乘积已不能忽略，因而方程是非线性的。一般称这种情形为大挠度问题。

在塑性理论中，仍以介质的连续性为基本前提。就塑性的应力应变关系适用于同一物体的各点而言，则物体也是均匀的和各向同性的。塑性理论的主要特点在于应力应变关系不同于弹性理论。根据对这一关系的不同描述，出现了不同的塑性理论。视其基本方程是联系应力与应变或者是应力与应变速率，大略可分为弹塑性变形理论和塑性流理论。

§3 符号规则

在弹性和塑性理论中，对于应力、应变、位移、弹性模数和泊松系数有通用的记号。文献中常见的记号有若干种，见下表。

表 1

应力分量				应变分量			
一	二	三	四	一	二	三	四
σ_x	X_x	τ_{xx}	τ_{11}	ε_x	e_{xx}	ε_{xx}	ε_{11}
σ_y	Y_y	τ_{yy}	τ_{22}	ε_y	e_{yy}	ε_{yy}	ε_{22}
σ_z	Z_z	τ_{zz}	τ_{33}	ε_z	e_{zz}	ε_{zz}	ε_{33}
τ_{xy}	X_y	τ_{xy}	τ_{12}	γ_{xy}	e_{xy}	$2\varepsilon_{xy}$	ε_{12}
τ_{yz}	Y_z	τ_{yz}	τ_{23}	γ_{yz}	e_{yz}	$2\varepsilon_{yz}$	ε_{23}
τ_{zx}	Z_x	τ_{zx}	τ_{31}	γ_{zx}	e_{zx}	$2\varepsilon_{zx}$	ε_{31}

第一种记号中，以σ表正应力，以τ表剪应力，如图 1 。σ_x表示正应力方向与x轴相平行而其作用面与x轴相垂直，余类推。对正应力有一个下标就够了，而剪应力必须有两个下标：一个表示应力方向，另一个表示应力“地址”(作用面的法线方向)。图 1 中每一个面上都作用有一个正应力和两个剪应力，它们合成为该面上此点的**全应力**。全应力沿其作用面的法向和切向分解所得到的σ_x,…τ_{xy},…等，称为**应力分量**。应力的正负号规则如下：若应力（正应力或剪应力）作用面的外法线与坐标轴的正向平行一致，则该面上的应力分量就以沿坐标轴正方向者为正，反之为负。如果某一个面的外法线是朝着坐标轴的负方向，则该面上的一切应力分量皆以沿着坐标轴的负方向者为正。图 1 所示的18个应力分量都是正的。

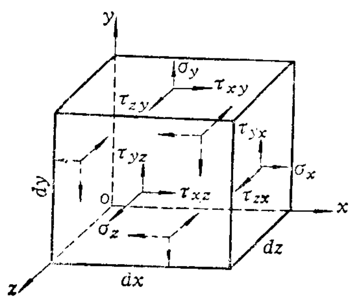

图 1

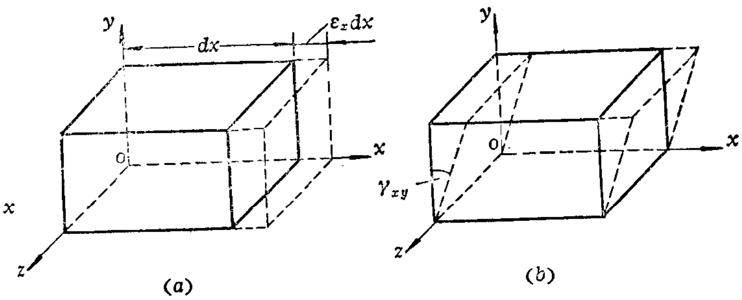

图 2

为了考察物体内某点的应变，过此点沿坐标轴的正向取三个无穷小线段（图 2 ）dx，dy，dz形成一平行六面体。变形以后六面体的边长可能改变了，而原来各面间的直角也可能改变了。以ε表边长的伸缩率，称为正应变或线应变，以γ表原来直角的改变量，称为角应变或剪应变。ε_x表示方向与x轴平行的线段的正应变，γ_{xy}表示与坐标面xoy平行的平面内原来直角的角应变，余类推。不管平行正六面体如何变形，总可以用六个简单应变来表示，即ε_x,…γ_{xy},…，称它们为**应变分量**。正应变以伸长为正，剪应变以使原来直角减小者为正。图 2 所示的ε_x和γ_{xy}均为正。

一点的位移在三个坐标方向的投影，分别用u，v，w表示，称为**位移分量**，这种位移又称为线位移，而角应变则又称为角位移。

其它三种记号的说明从略，本书采用第一种记号。

杨氏弹性模量和剪切弹性模量分别用E和G表示。泊松系数用μ表示，但也有用ν或σ表示的。

第一章 应力理论

§1-1 平衡方程

根据绪论中所讲的弹性和塑性理论的研究方法，首先研究平行六面微分体的平衡问题。将物体置于坐标系中，物体内部各点的应力是坐标的连续函数。过物体内部的点M（x，y，z）作一垂直于x轴的微平面，设平面上作用的正应力和剪应力已知为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=f_1(x,y,z)\\ \tau_{yx}&=f_2(x,y,z)\\ \tau_{zx}&=f_3(x,y,z)\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

在无限接近点M的点N（$x+dx,y+dy$，$z+dz$）处也作一垂直于x轴的微平面，则该微平面上的应力可借助将式（a）展成马克劳林级数而得到，例如对σ_x有（图1-1）

$$\sigma_x'=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy+\frac{\partial\sigma_x}{\partial z}dz+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}dx^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}dy^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}dz^2+\cdots\tag{b}$$

这里σ_x'是过N点的微平面上的正应力。假定M和N点位于平行于x轴的直线上，并略去一阶以上的小量，则（b）式成为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x'&=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\\ \tau_{yx}'&=\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx\\ \tau_{zx}'&=\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}dx\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

同理

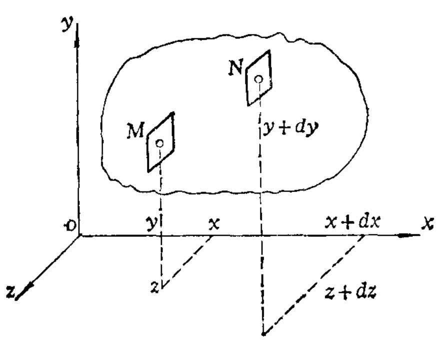

图 1-1

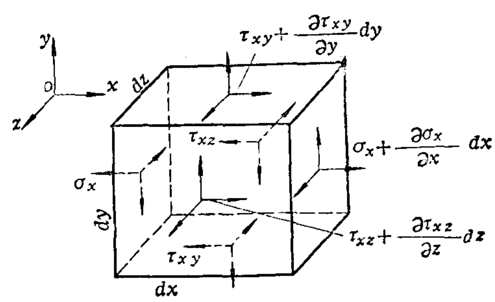

图 1-2

现在从物体内部取出一平行六面微分体，其侧面平行于相应的坐标面。利用式（c）可以写出微分体各侧面上的应力，如图（1-2）。图中把被遮住的三个侧面上的应力当作已知的或基本的，应力在其余三个侧面上获得增量。为清晰起见，图上只对平行于x轴的各

应力分量标注了符号。在研究微分体平衡条件时，一般说来还要考虑**体积力**。弹性和塑性理论中把物体所受的一切外力分为两大类。其中体积力只与物体的体积（或质量）有关，而以单位体积的载荷来衡量，如物体的重量、惯性力等；**面积力**则以物体单位表面积上的载荷来衡量。假定微分体所受的体积力沿坐标的分量为X，Y和Z，体积力通过微分体的重心。

如果物体处于平衡状态，则从中截出的微分体也处于平衡状态。微分体应满足六个静平衡方程

$$\Sigma X=0,\qquad \Sigma Y=0,\qquad \Sigma Z=0$$
$$\Sigma M_x=0,\qquad \Sigma M_y=0,\quad \Sigma M_z=0$$

先应用平衡条件$\Sigma X=0$，得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx-\tau_{xy}dzdx$$
$$+\left(\tau_{xz}+\frac{d\tau_{xz}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{xz}dxdy+Xdxdydz=0 \tag{d}$$

上式经约简后得下列方程组的第一式。同理，应用平衡条件$\Sigma Y=0$和$\Sigma Z=0$，得到下列方程组的第二式和第三式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\left(=\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\left(=\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\left(=\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

此式称为**平衡微分方程**，又称纳维叶方程。纳维叶(Navier，1785—1836)是法国工程师和科学家，他曾于1821年在巴黎提出科学报告，一般认为这是弹性理论作为一门学科的开端。

如物体内质点处于运动状态，则上列方程组右端出现一项惯性力、式中ρ为单位体积的质量。方程中包含应力的偏导数，它们也应是点的坐标的连续函数，实即认为应力在物体内的分布不出现尖点。由于所截取的平行六面体是无限小的，所以式（1-1）实际上表示过一点的三个正交微平面上的九个应力分量所应满足的条件。

现讨论第二组平衡条件——微分体各侧面应力对坐标轴的主矩为零。取$\Sigma M_x=0$，为简便计，以过微分体中心的轴线x_0为转轴，如图（1-3)。实际上只有四个应力分量对此轴有矩，而体积力无矩。于是得

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}dz\right)dxdy\ \frac{dz}{2}+\tau_{yz}dxdy\,\frac{dz}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}dy\right)dzdx\ \frac{dy}{2}$$
$$-\tau_{zy}dzdx\,\frac{dy}{2}=0 \tag{e}$$

略去四阶无穷小量，约简后得$\tau_{yz}=\tau_{zy}$。同理，取$\Sigma M_y=0$和$\Sigma M_z=0$可得其余二式

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{xy}=\tau_{yx},\\
&\tau_{yz}=\tau_{zy},\\
&\tau_{zx}=\tau_{xz}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

此式称为**剪应力互等定理**，可表述如下：两个互相垂直的微平面上的剪应力，其垂直于该二平面交线的分量大小相等，而方向或均指向此交线，或均背离此交线。为了理论上的连贯性，在列出式（e）时，还要考虑微分体的转动，即惯性力矩。可以证明此惯性力矩是更高阶的小量，所以剪应力互等定理与物体的状态（运动或静止）无关。由于剪应力互等是普遍的，今后对剪应力两个下标的次序不必严格区分。

考虑到剪应力互等，方程（1-1)共三个式子包含了六个未知应力分量，因此，任何弹性和塑性理论问题都是超静定的。为了求解平衡方程中的应力，还必须利用几何的和物理的补充方程。

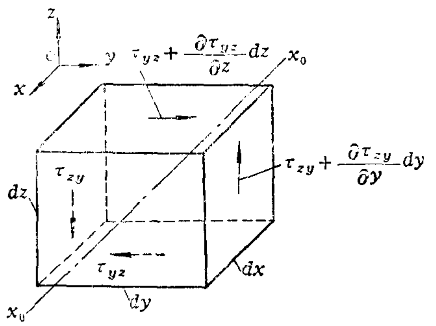

图 1-3

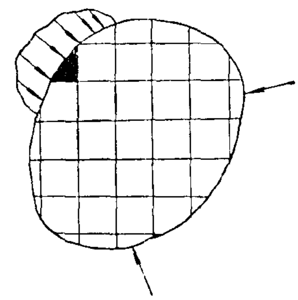

图 1-4

§1-2　一点的应力状态　边界条件

用平行于坐标面的平面将物体分割成无数的平行六面微分体，研究微分体的平衡条件，这是本学科的基本研究方法。问题是在物体的任意边界附近，通过这种分割方法，一般不能得到正六面体，而只能得到四面体，如图（1-4)中涂黑的小单元所近似地表示的那样。因此还必须研究四面体的平衡条件。图（1-5)给出了四面体的受力图。

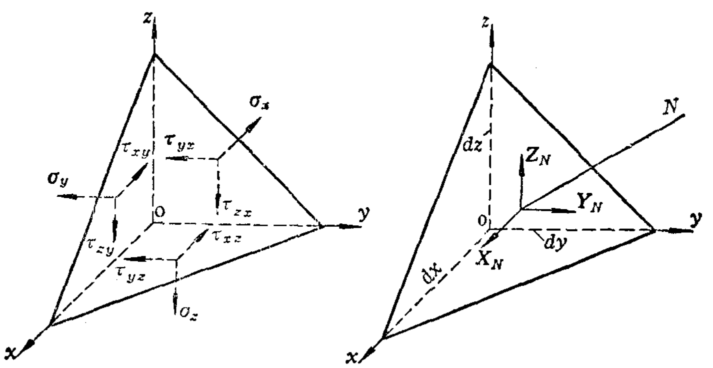

图 1-5

图中以四面体直角面的顶点为原点，以四面体三个正交侧面为坐标面。在所取四面微分体的情况下，可以把任意倾斜的物体外表面也看成平面，称为斜平面。斜平面上的外载面积力沿坐标轴的投影记为X_N，Y_N和Z_N，此处N表示斜平面的外法线。三个正交坐标面上作用着已知的应力分量。四面体的平衡条件显然给出边界上外力(投影)和内力的关系，

这关系称为**边界条件式**。

换一个提法，假设四面体顶点是物体内部的某一点，整个四面体也在物体内部，则只要三个坐标面上的应力分量为已知，任意斜平面上的力X_N，Y_N和Z_N可以求出，它们现在是任意斜平面上的全应力投影。在四面体的棱长dx，dy和dz趋于零的情况下，问题变成求过物体内部某点而又不与任何坐标面平行的任意斜面上的应力，也就是研究**一点的应力状态**。

现研究四面体的平衡。设斜平面外法线的方向余弦给定为l，m，n，斜平面面积为F，且其余三个与坐标轴x、y和z相垂直的侧面面积相应为F_x、F_y和F_z，则

$$F_x = Fl,\ F_y = Fm,\ F_z = Fn$$

四面体体积记为$\frac{1}{3}Fh$，此处h为斜平面上的高。体积力分量为X，Y和Z，作用于四面体的重心。利用平衡条件$\Sigma X=0$，得到

$$X_N F - \sigma_x Fl - \tau_{xy} Fm - \tau_{xz} Fn + X\frac{1}{3}Fh = 0$$

将上式除以F，并令$h \to 0$，得下列方程的第一式，利用条件$\Sigma Y=0$和$\Sigma Z=0$，得下列方程的第二和第三式

$$\left.\begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ Y_N &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ Z_N &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3)$$

把方程（1-3）看成是物体处于平衡的边界条件，它给出了物体表面附近截出的微分四面体上外力X_N、Y_N、Z_N和内部各面上应力之间的关系，此处l、m、n是外表面微面积的方向余弦。物体的每一微分体积，在内部应满足方程（1-1），在边界处应满足方程（1-3），因此整个物体是平衡的。从数学上看，平衡方程（1-1）即使能积分出来，积分常数必须通过方程（1-3）才能确定，否则平衡方程（1-1）将没有定解。

把方程（1-3）看成是对物体内部一点应力的描述，它给出了过该点的任意斜平面上的全应力投影，只要此斜平面的方向余弦是给定的。由此可进一步求出任意斜平面上的正应力σ_N和剪应力τ_N。把斜平面上的全应力投影再投到斜平面的外法线N上，有

$$\sigma_N = X_N l + Y_N m + Z_N n$$

将式（1-3）代入，得

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \qquad (1\text{-}4)$$

斜平面上的剪应力可由下式求出

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2$$

§1-3 坐标变换 应力张量

已知在直角坐标系xyz中物体内o点的九个应力分量，运用上节的结论，可以求出在转动后的新坐标系$x'y'z'$中同一点o的新的应力分量。新的应力分量是用原来的应力分量表示的。应力分量的这种坐标变换公式，可以揭示出一点处应力的某些特征。图（1-6)表示了过o点的新老坐标系，新坐标系各轴相对于老坐标系的方向余弦如下表。

为了求得在新坐标系中以z'轴为外法线的微平面上的应力分量，只要对老系作一斜平

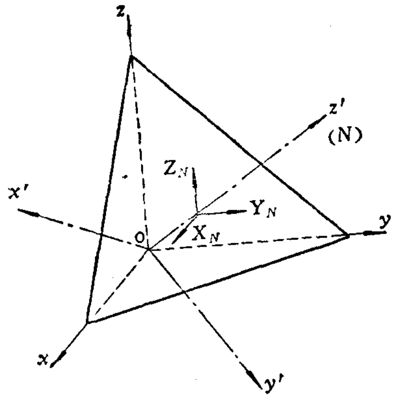

图 1-6

表 1-1

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

面，其外法线N与z'轴一致即可。利用方程（1-3），得斜平面上的全应力投影为

$$X_N=\sigma_x l_3+\tau_{xy}m_3+\tau_{xz}n_3$$
$$Y_N=\tau_{yx}l_3+\sigma_y m_3+\tau_{yz}n_3$$
$$Z_N=\tau_{zx}l_3+\tau_{zy}m_3+\sigma_z n_3$$

此处N就是z'。为求斜平面上的正应力和剪应力，可将X_N，Y_N和Z_N分别投影到z', x'和y'方向，于是得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{z'}&=X_N l_3+Y_N m_3+Z_N n_3\\
&=\sigma_x l_3^2+\sigma_y m_3^2+\sigma_z n_3^2+2\tau_{xy}l_3m_3+2\tau_{yz}m_3n_3+2\tau_{zx}n_3l_3\\
\tau_{x'z'}&=X_N l_1+Y_N m_1+Z_N n_1=\tau_{z'x'}\\
&=\sigma_x l_1l_3+\sigma_y m_1m_3+\sigma_z n_1n_3+\tau_{xy}(l_1m_3+l_3m_1)+\tau_{yz}\\
&\quad\times(m_1n_3+m_3n_1)+\tau_{zx}(l_1n_3+l_3n_1)\\
\tau_{y'z'}&=X_N l_2+Y_N m_2+Z_N n_2=\tau_{z'y'}\\
&=\sigma_x l_2l_3+\sigma_y m_2m_3+\sigma_z n_2n_3+\tau_{xy}(l_2m_3+l_3m_2)+\tau_{yz}\\
&\quad\times(m_2n_3+m_3n_2)+\tau_{zx}(l_2n_3+l_3n_2)
\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

同理不难求得$\sigma_{y'}$、$\sigma_{x'}$和$\tau_{x'y'}=\tau_{y'x'}$。这样，新坐标系的九个应力分量都可求出，它们同样也描述这一o点的应力状态。一般说，一点的应力状态要用九个分量表示，当坐标系转动时，这九个量按上面这组式子变化，这样的量称为张量。**应力张量**记作σ_{ij}，有

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

各应力分量称为张量的分量。由任意阶的方块矩阵所代表的一组向量叫做二阶张量，而“空间矩阵”则属于三阶张量。一切向量，例如，质点的速度，它的方向和大小与坐标无关，但在不同坐标系中其投影的大小不同。同样，应力也是与坐标选择无关的量，但在不同坐标系中应力分量的大小不同。向量可视为一阶张量，标量则可看作零阶张量。标量——向量——张量是描述自然现象的不同范畴。

二张量之和是新的张量，其分量等于二张量相应分量之和。张量乘以标量，即以此标量乘以张量的各分量，得出新的张量。由于剪应力的互等性，应力张量称为二阶对称张