

国家教委“八五”重点图书

# 鲁棒控制系统设计

Robust Control System Design

冯纯伯  
田玉平 著  
忻 欣

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY  
PRESS

996776

国家教委“八五”重点图书

# 鲁棒控制系统设计

冯纯伯 田玉平 忻欣 著

东南大学出版社

## 内 容 提 要

本书系统地介绍了线性系统鲁棒控制的概念、理论及设计方法。内容包括：预备知识，参数不确定系统的鲁棒分析与综合，结构奇异值方法，含混合不确定性系统的鲁棒分析与设计， $H^\infty$ 控制理论概述， $(J, J')$ -无损分解，标准  $H^\infty$  控制系统的分析与设计和非标准  $H^\infty$  控制系统的分析与设计。

本书反映了近年来鲁棒控制领域中的主要成就，包括作者在这一领域的一些研究成果，系统性强且各章后附有习题便于读者学习时参考。

本书可作为工科高等院校自动控制专业的高年级学生和研究生的选修教材，也可供有关研究领域的广大科技工作者参考。

责任编辑 雷家煜

## 鲁棒控制系统设计

冯纯伯 田玉平 忻欣 著

\*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编 210018)

江苏省新华书店经销 南京新中彩色印刷厂印刷

\*

开本 787×1092毫米 1/16 印张 19.5 字数 480千

1995年12月第1版 1995年12月第1次印刷

印数：1—1500册

ISBN 7—81050—109—7/TP·16

定价：30.00元

(凡因印装质量问题，可直接向承印厂调换)

## 作者简介

**冯纯伯** 1950年浙江大学电机系毕业。1958年前苏联获技术科学副博士学位。1994年1月获俄罗斯联邦自然科学院外籍院士称号。1995年11月当选为中国科学院院士,现为东南大学自动化研究所教授。

**田玉平** 1964年生,1986年清华大学自动化系毕业。1991年前苏联莫斯科动力学院获博士学位(PhD)学位。1992年至1994年在东南大学自动化所从事博士后研究工作,现为东南大学自动控制系副教授。

**忻欣** 1965年生,1987年中国科学技术大学系统科学和管理科学系毕业。1991年至1993年在日本大阪大学作为联合培养博士生进行博士论文研究工作。1993年获东南大学工学博士学位。1993年至1995年在东南大学自动化所从事博士后研究工作。现为东南大学自动化研究所副教授。

## 前 言

建立在状态空间精确描述基础上的现代控制理论对推动控制理论的发展和应用起了重大的作用,然而在广泛的应用中发现它存在重大缺陷,主要是许多被控对象很难被精确描述,在其数学模型中不可避免地存在各种形式的不确定性,在以上情况下一些以精确数学模型为依据的控制理论就现出不足和困难。为分析存在不确定性时系统的行为,一些方法被提了出来,例如灵敏度分析、摄动分析、同时镇定、扰动补偿、对策论的应用等等,这就开始了鲁棒控制的广泛和深入的研究。该动向实质上体现了控制理论向更实用化的深层次的发展。

鲁棒控制理论所要研究的问题不外乎两大方面,即分析和综合。在分析方面要研究的是:当系统存在各种不确定性及外加干扰时,系统性能变化的分析,包括系统的动态性能和稳定性等。在综合方面要研究的是:采用什么控制结构、用什么设计方法可保证控制系统具有更强的鲁棒性,包括如何对付系统中存在的不确定性和外干扰的影响。分析和综合当然是相互影响和依存的,但也有各自自身的特点。

研究鲁棒控制的方法很多,各有特色,各自发展的深度和完善的程度也相差较大。我们认为近年来发展得较为深入和完善的有两个重要潮流。一是以分析系统性能特别是稳定性为基础的系统鲁棒性分析和设计,其中包括俄国学者 V. L. Kharitonov 1978 年提出的 Hurwitz 多项式四端点定理及其发展,美国学者 J. C. Doyle 等人发展起来的结构奇异值分析方法,以及最近获得发展的 V. M. Popov 稳定性判据的应用,等等。上列成果虽然是从不同的角度提出和取得的,但分析表明它们之间具有深刻的内在联系。另一是以某种性能指标的优化为设计依据的控制理论,其中当然首推加拿大学者 G. Zames 于 1981 年开创的  $H^\infty$  控制理论,这一理论目前已发展得较为成熟。从它的提出和发展可明显地看出受到经典频域法的影响,以及对 LQG 理论不足的修正,从而使它的体系完善,且便于实用。

为了介绍上列鲁棒控制理论中的两个大的潮流我们撰写了本书。这是一本专著性质的教材,曾在东南大学自动控制专业的研究生中试用,效果良好。书中也包括了作者们多年来在鲁棒控制理论方面取得的研究成果。全书的安排如下:第一章是预备知识,给出本书中要用到的一些数学知识和线性系统理论中若干深层次的知识。我们设想读者已经学过有关线性多变量控制系统理论的研究生课程,因此就不再叙述有关线性系统的一般性知识了,读完本章后读者就可无困难地学习以后几章的内容。第二章是参数不确定系统的鲁棒分析与综合,本章从 V. L. Kharitonov 关于 Hurwitz 多项式的四端点定理出发,系统地介绍了在参(系)数空间中进行系统鲁棒分析与设计的方法。第三章是结构奇异值方法,深入介绍了  $\mu$  的基本概念和性质, $\mu$  理论在鲁棒控制中的应用,以及  $\mu$  的计算等问题。第四章是混合不确定系统的鲁棒分析与设计,介绍了如何将 V. M. Popov 的稳定性判据用于这类有广泛意义的不确定系统的分析与设计,我们一方面揭示了经典的 Popov 判据与现代  $\mu$  方法的内在联系,从而使混合摄动下的  $\mu$  的计算大为简化,另一方面还指出了 Kharitonov 型检验理论与  $\mu$  理论的

EAB14104



关系。第二、三、四章的研究内容是相对独立的,研究的方法是不同时期从不同的角度提出的,但在本书中试图指明,它们相互之间存在深刻的内在联系,这些方法相互渗透,相互结合,已形成一个以分析性能为基础的鲁棒控制的研究潮流。第五章至第八章介绍  $H^\infty$  控制理论。第五章是  $H^\infty$  控制理论概述,介绍  $H^\infty$  控制理论的由来及其基本问题。第六章介绍了  $(J, J')$ -无损分解理论及其最新发展。我们认为用分解方法研究控制系统是一种重要途径。由于  $(J, J')$ -无损分解是一种具有一般性的分解法,故具有广泛的应用领域。当其应用于  $H^\infty$  控制问题求解时有其独到之处,利用此法可使得  $H^\infty$  控制中的标准和非标准问题得到统一和简单的处理,所以先在本章予以详细介绍。第七章是标准  $H^\infty$  控制系统的分析与设计,这属于常规的  $H^\infty$  控制理论,但其特点是我们用的是  $(J, J')$ -无损分解方法。第八章是非标准  $H^\infty$  控制系统的分析与设计,和标准  $H^\infty$  控制系统一样,也是用的  $(J, J')$ -无损分解方法,从而对  $H^\infty$  控制得到一个完整的统一的体系,有一个统一的解决方法。本章还介绍了基于线性矩阵不等式表征的  $H^\infty$  控制系统分析和设计方法,这是  $H^\infty$  控制理论的一个新成果,这种基于凸优化理论的研究方法被认为将对鲁棒控制理论的发展产生重要影响。为便于读者学习,每章之后均附有习题和参考文献。第一至第四章由田玉平撰写,第五至第八章由忻欣撰写,冯纯伯负责全书大纲的拟定及统稿、审定。

作者们根据对鲁棒控制理论发展潮流的理解和自己的研究成果撰写了本书。前面也已提到鲁棒控制研究的领域很宽、方法众多,例如对策论在鲁棒控制理论中的应用、其他指标(非  $H^\infty$  指标)的鲁棒控制理论,等等,均有引人注目的成果,我们不可能在本书中一一介绍。在本书出版之际,作者们愿强调自己的一个观点,即鲁棒控制理论不仅是针对解决鲁棒性这个具体问题而产生,究其实质而言是线性系统理论的深层次的发展,其意义当远超出鲁棒一隅。因此若本书能有助于读者更深入地了解线性系统理论的深层问题,则作者们将感到十分高兴。但由于作者们水平有限,书中难免有不少缺点,甚至错误,对此作者们竭诚欢迎广大读者批评指正。

多年来作者们获得国家自然科学基金的资助,书中所介绍的某些成果就是受到其资助而取得的,作者们愿在此对国家自然科学基金委员会表示衷心的感谢。

冯纯伯

田玉平

忻欣

1995.9 于东南大学

# 目 录

1 预备知识 .....	(1)
1.1 系统不确定性和鲁棒性 .....	(1)
1.2 控制系统的线性分式变换模型 .....	(4)
1.3 信号与系统的范数 .....	(8)
1.3.1 信号的范数 .....	(8)
1.3.2 系统的范数 .....	(11)
1.4 系统的输入输出稳定性和内部稳定性 .....	(13)
1.4.1 输入输出稳定性和内部稳定性 .....	(13)
1.4.2 反馈系统的稳定性 .....	(14)
1.5 不确定系统的鲁棒稳定性 .....	(16)
参考文献 .....	(20)
2 参数不确定系统的鲁棒分析和综合 .....	(21)
2.1 引言 .....	(21)
2.2 多项式族的鲁棒稳定性 .....	(21)
2.2.1 预备知识 .....	(21)
2.2.2 区间多项式族的鲁棒稳定性 .....	(22)
2.2.3 凸多面体多项式族的鲁棒稳定性 .....	(24)
2.2.4 多线性相关系数扰动下多项式族的鲁棒稳定性 .....	(25)
2.2.5 别零算法 .....	(30)
2.3 稳定多项式空间中的凸方向 .....	(31)
2.3.1 凸方向的基本概念 .....	(31)
2.3.2 凸方向的频域条件 .....	(32)
2.3.3 凸方向的代数条件 .....	(38)
2.4 区间系统的鲁棒分析和综合 .....	(41)
2.4.1 区间系统的鲁棒稳定性 .....	(41)
2.4.2 区间对象鲁棒镇定的有限检验 .....	(45)
2.4.3 局部凸方向及其在区间对象鲁棒镇定问题中的作用 .....	(46)
2.4.4 多线性参数化区间系统的鲁棒稳定性 .....	(49)
2.5 参数不确定系统的鲁棒 $H^\infty$ 性能分析 .....	(52)
2.5.1 系统的 $H^\infty$ 性能指标 .....	(52)
2.5.2 区间系统的鲁棒性能 .....	(53)
2.5.3 具有线性相关不确定参数系统的鲁棒性能 .....	(57)
2.6 鲁棒严格正实性分析及其应用 .....	(62)
2.6.1 严格正实函数的基本概念和性质 .....	(62)
2.6.2 有理函数族的鲁棒严格正实性 .....	(65)
2.6.3 鲁棒绝对稳定性 .....	(69)

2.7	小结	(73)
	习题	(74)
	参考文献	(77)
3	结构奇异值方法	(79)
3.1	结构式不确定性和结构奇异值	(79)
3.2	$\mu$ 的基本性质	(82)
3.3	结构式不确定系统的鲁棒稳定性与鲁棒性能	(84)
3.3.1	鲁棒稳定性	(84)
3.3.2	鲁棒性能	(84)
3.4	基于线性分式变换模型的结构奇异值分析	(88)
3.4.1	主环定理	(88)
3.4.2	LFT 系统结构奇异值的上界	(89)
3.4.3	最大模原理	(91)
3.5	结构奇异值下界的计算	(93)
3.5.1	预备知识	(93)
3.5.2	求取结构奇异值下界的递推算法	(95)
3.6	$\mu$ 与其上界的关系	(97)
3.6.1	$\inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D^{\frac{1}{2}} M D^{-\frac{1}{2}})$ 的最优条件	(98)
3.6.2	$\mu$ 与 $\bar{\sigma}(M)$ 的关系	(100)
3.6.3	$\Omega$ 的性质	(102)
3.7	二次稳定性和 $\mu$ 分析	(107)
3.7.1	二次稳定性	(107)
3.7.1	具有指定性能的二次稳定性	(109)
3.8	$\mu$ 综合	(111)
3.8.1	不确定对象的鲁棒可镇定性	(111)
3.8.2	$\mu$ 综合算法	(112)
3.9	小结	(112)
	习题	(113)
	参考文献	(115)
4	具有混合不确定性系统的鲁棒分析与设计	(116)
4.1	引言	(116)
4.2	多变量 Popov 判据及其推广	(117)
4.2.1	改进的多变量 Popov 判据	(117)
4.2.2	鲁棒 Popov 判据	(120)
4.2.3	验算 Popov 判据的凸优化方法	(123)
4.3	基于 Popov 乘子的混合 $\mu$ 的上界函数	(123)
4.3.1	混合 $\mu$ 的两种上界函数及其等价性	(123)
4.3.2	混合 $\mu$ 上界的线性矩阵不等式算法	(129)
4.4	混合不确定对象的鲁棒镇定	(130)
4.4.1	混合 $\mu$ 的分解原理	(131)
4.4.2	混合扰动下鲁棒镇定控制器的设计	(132)



4.4.3	混合 $\mu$ 综合与严格正实综合 .....	(134)
4.5	秩 1 矩阵的混合 $\mu$ .....	(135)
4.5.1	问题的提出 .....	(135)
4.5.2	秩 1 矩阵混合 $\mu$ 的精确计算 .....	(138)
4.5.3	秩 1 $\mu$ 的几何意义及算法 .....	(145)
4.6	小结 .....	(147)
	习题 .....	(147)
	参考文献 .....	(150)
5	$H^\infty$ 控制理论概述 .....	(151)
5.1	引言 .....	(151)
5.2	$H^\infty$ 控制的发展概述 .....	(152)
5.2.1	$H^\infty$ 控制的第一发展期 .....	(152)
5.2.2	$H^\infty$ 控制的第二发展期 .....	(153)
5.2.3	$H^\infty$ 控制的进一步推广与完善 .....	(155)
5.3	$H^\infty$ 控制所包含的各类控制问题 .....	(156)
5.3.1	灵敏度极小化问题 .....	(156)
5.3.2	鲁棒镇定问题 .....	(157)
5.3.3	混合灵敏度优化问题 .....	(158)
5.3.4	跟踪问题 .....	(158)
5.3.5	模型匹配问题 .....	(159)
5.4	传递函数的状态空间运算 .....	(160)
5.5	散射模型和等交比变换 .....	(164)
5.5.1	散射模型 .....	(164)
5.5.2	等交比变换 .....	(165)
5.6	$H^\infty$ 控制系统的稳定性 .....	(166)
5.6.1	闭环稳定性与输入输出稳定性 .....	(166)
5.6.2	互质分解 .....	(168)
5.6.3	尤拉参数化方法 .....	(170)
5.6.4	标准 $H^\infty$ 控制问题与模型匹配问题 .....	(171)
5.7	代数 Riccati 方程 .....	(173)
5.8	标准 $H^\infty$ 控制问题的“2-Riccati 方程”的解 .....	(176)
	习题 .....	(181)
	参考文献 .....	(182)
6	$(J, J')$ ——无损分解 .....	(185)
6.1	$(J, J')$ ——无损矩阵 .....	(185)
6.2	$J$ ——无损共轭化 .....	(188)
6.3	正则有理函数阵的 $(J, J')$ ——无损分解 .....	(190)
6.3.1	$(J, J')$ ——无损矩阵 .....	(190)
6.3.2	稳定正则函数阵的 $(J, J')$ ——无损分解 .....	(191)
6.3.3	非稳定正则函数阵的 $(J, J')$ ——无损分解 .....	(194)
6.4	奇异 $(J, J')$ ——无损分解 .....	(196)

6.4.1	引言	(196)
6.4.2	无穷远零点补偿器	(196)
6.4.3	奇异 $(J, J')$ ——无损分解	(199)
6.4.4	奇异 $(J, J')$ ——无损分解的算法及算例	(205)
6.5	描述系统的 $(J, J')$ ——无损分解	(208)
6.5.1	引言	(208)
6.5.2	描述系统的基本知识	(209)
6.5.3	描述系统的 $J$ ——无损共轭化	(210)
6.5.4	系统矩阵束和 Hamilton 矩阵束	(211)
6.5.5	稳定有理函数阵的 $(J, J')$ ——无损分解	(214)
6.5.6	非稳定有理函数阵的 $(J, J')$ ——无损分解	(220)
6.6	小结	(223)
	习题	(223)
	参考文献	(225)
7	标准 $H^\infty$ 控制系统的分析与设计	(227)
7.1	引言	(227)
7.2	广义对象的散射模型	(228)
7.3	基于散射模型的 $H^\infty$ 控制系统的稳定性	(232)
7.3.1	稳定性与内系统	(232)
7.3.2	稳定性与 $(J, J')$ ——无损系统	(233)
7.4	$H^\infty$ 控制系统的频域分析与设计	(236)
7.5	$H^\infty$ 控制系统的时域分析与设计	(240)
7.5.1	散射模型的状态空间描述	(240)
7.5.2	常数矩阵的分解	(242)
7.5.3	散射矩阵的 $(J, J')$ ——无损分解	(244)
7.5.4	增广矩阵的构造	(246)
7.5.5	$H^\infty$ 控制问题的可解条件	(251)
7.6	讨论与小结	(251)
	习题	(253)
	参考文献	(254)
8	非标准 $H^\infty$ 控制系统的分析与设计	(256)
8.1	引言	(256)
8.2	非标准 $H^\infty$ 控制系统的摄动解法	(258)
8.3	基于 $(J, J')$ ——无损分解的频域法	(261)
8.4	基于 $(J, J')$ ——无损分解的时域法	(265)
8.4.1	散射模型的描述系统表征	(265)
8.4.2	广义对象的 $(J, J')$ ——无损分解	(267)
8.4.3	增广矩阵的构造	(270)
8.4.4	正则控制器的设计	(274)
8.4.5	可解条件	(277)
8.4.6	有限虚轴零点	(279)

8.4.7 小结与讨论 .....	(279)
8.5 降阶 $H^\infty$ 控制器 .....	(280)
8.5.1 引言 .....	(280)
8.5.2 降阶 $H^\infty$ 控制器设计 .....	(281)
8.6 非标准 $H^\infty$ 控制问题的二次矩阵不等式的解 .....	(285)
8.6.1 二次矩阵不等式 .....	(286)
8.6.2 基于广义特征值问题的二次矩阵不等式的解 .....	(286)
8.7 $H^\infty$ 控制问题与线性矩阵不等式 .....	(290)
8.7.1 线性矩阵不等式 .....	(290)
8.7.2 基于线性矩阵不等式的 $H^\infty$ 控制问题可解条件 .....	(293)
8.8 小结 .....	(296)
习题 .....	(297)
参考文献 .....	(299)

# 1 预备知识

本章简要介绍鲁棒控制理论中的一些基础知识,其中包括线性系统理论的一些基本概念及泛函分析的有关知识。这里的绝大多数定理都未给出证明,因为它们有关教科书中均能找到。

## 1.1 系统不确定性和鲁棒性

经典的反馈控制系统设计需要已知被控对象的精确模型(包括模型的结构和其中所含参数),但这在工程实际中往往是很难办到的。由于被控对象的复杂性,常常要用低阶的线性定常集中参数模型来代替实际的高阶的非线性时变分布参数系统。这样,势必要引入系统模型的不确定性。另外,除了数学模型不精确外,在控制系统的运行过程中还会出现环境变化、元件老化等问题。因此,在控制系统的设计过程中一个不可回避的问题是:如何设计控制器,使得当一定范围的参数不确定性及一定限度的未建模动态存在时,闭环系统仍能保持稳定并保证一定的动态性能品质。这样的系统我们称它具有**鲁棒性**。

研究系统鲁棒性离不开系统的不确定性。为了便于研究我们通常要用一定的数学模型对系统不确定性进行刻画。在控制系统中,常见的不确定性模型有以下几种:

1) 随机模型 这种不确定性可以用某种随机分布(例如高斯正态分布)来描述,在许多关于随机控制的专著中对这种不确定性都有详细的讨论<sup>[1]</sup>。

2) 统计模型 这种模型与上一种很相近,两者的区别在于统计模型是建立在抽样实验的基础上的。由于实验的次数和样本的长度都受到限制,而且实验过程往往会受到随机干扰的影响,我们只能得到不确定因素的估计值及其统计特性(如期望、方差等)。这种模型通常是根据实验数据用回归的方法得到的,因此也称作回归模型。适应控制是这种不确定系统的最主要的控制方法<sup>[2,3]</sup>。

3) 模糊不确定性模型 这种模型通常可用来描述由自然语言而产生的不确定性,如“远大于10”,“接近100”等等。描述这种不确定性的方法一般是定义某个集合,而假设不确定因素以某种隶属度属于该集合。基于模糊不确定性模型而产生的控制理论——模糊控制理论已成为控制理论中相对独立的一个分支而受到广泛的重视<sup>[4,5]</sup>。

4) 未知有界不确定性模型 这种模型对不确定性的描述是相当“宽松”的,这里并不需要对不确定因素的随机(统计)特性作任何假设,我们通常只认为它属于某个已知的集合。这种不确定性正是鲁棒控制理论研究的对象<sup>[6~8]</sup>。下面用几个例子来说明这种不确定性。

**例 1.1.1** 考虑如下二阶对象:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}.$$

这是一个典型的二阶系统的传递函数,自然频率为1,阻尼比为 $\frac{a}{2}$ 。用这种传递函数可以表示带阻尼的弹簧装置, $R-L-C$ 电路等。在这里我们认为常数 $a$ 是未知的,但其取值区间为

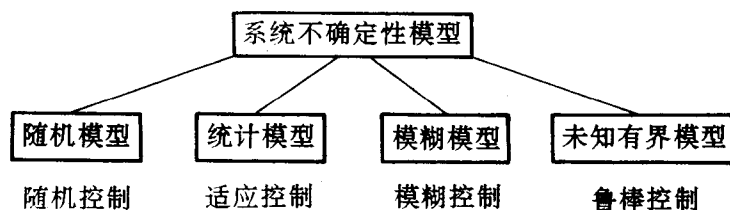


图 1.1.1 系统不确定性模型

$[a^-, a^+]$ . 这样我们所要研究的对象由经典控制中的一个确定对象变为下面的一个对象族:

$$\Gamma := \left\{ G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}; a \in [a^-, a^+] \right\}.$$

在例 1.1.1 中的不确定性我们称为**参数不确定性**, 这种不确定性通常不会改变系统的结构(阶次)。一般情况下参数不确定系统可以用下面的模型来表示:

$$\Gamma = \{G(s, q); q \in Q \subset R^m\}, \quad (1.1)$$

上式中  $Q$  通常是  $R^m$  中的有界闭集。本书中如果没有特别说明, 在上述模型中不确定参数是非时变的。

除了参数不确定以外, 控制系统中另一种常见的不确定性是**未建模动态**(或称为**动态不确定性**)。参数不确定性对系统的影响通常发生在低频段; 而未建模动态则通常表现为高频不确定性。对未建模动态  $\Delta(s)$  我们通常并不知道它的结构、阶次, 但可以通过频响实验测出其幅值界限:

$$|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in R,$$

上式中  $|W(j\omega)|$  为确定值, 用来表示未建模动态的幅值界限。系统的动态不确定性常常分为以下几种形式:

1) 加性不确定性: 这种不确定对象表示为

$$G(s, \Delta_A) = G_0(s) + \Delta_A(s),$$

上式中  $G_0(s)$  通常称为标称对象。

2) 乘性不确定性: 这种不确定性在对象中的作用可表示为

$$G(s, \Delta_M) = G_0(s)(1 + \Delta_M(s)).$$

这种不确定性反映了实际对象与标称对象的比值与 1 之间的差距, 即

$$\Delta(s) = \frac{G(s, \Delta)}{G_0(s)} - 1.$$

3) 分子、分母不确定性: 当传递函数的分子分母中分别有未建模动态时, 可用这种模型来表示:

$$G(s, \Delta_N, \Delta_D) = (N(s) + \Delta_N(s))(D(s) + \Delta_D(s))^{-1},$$

此时标称对象为  $G_0(s) = N(s)D^{-1}(s)$ 。

加性、乘性和分子分母不确定性模型分别可以用图 1.1.2 - 1.1.4 来表示。

下面是用乘性不确定性模型描述不确定对象的一个例子。

**例 1.1.2** 考虑一个二阶积分环节:

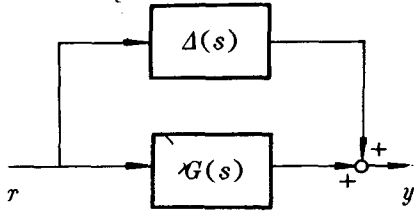


图 1.1.2 加性不确定性模型

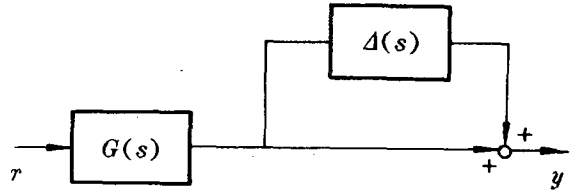


图 1.1.3 乘性不确定性模型

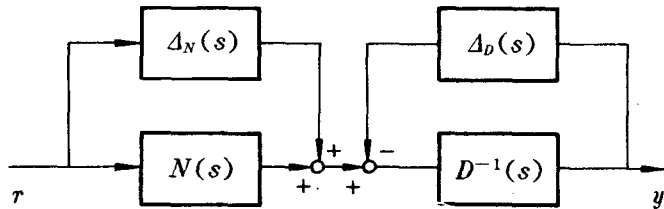


图 1.1.4 分子分母不确定性模型

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2}.$$

一个直流电机若其中的粘滞阻尼可忽略不计时,便可用上述二阶积分环节来描述.假设系统中还存在着时滞因素,此时系统的传递函数表示为

$$G(s) = e^{-\tau s} \frac{1}{s^2},$$

这里时滞常数  $\tau$  设为未知数,其取值区间设为  $[0, 0.1]$ . 此时可以将时滞因子  $e^{-\tau s}$  处理为乘性不确定性,即

$$G(s) = \Delta(s) \frac{1}{s^2}, |\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbf{R}.$$

$|W(j\omega)|$  可以用下式来确定:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbf{R},$$

即

$$|e^{-\tau j\omega} - 1| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbf{R}, \forall \tau \in [0, 0.1].$$

为了求出  $W(j\omega)$ , 我们作出  $|e^{-0.1j\omega} - 1|$  的 Bode 图(如图 1.1.5 所示), 然后在图中用虚线画出它的近似包络线. 该包络线的函数形式为  $W(j\omega) = \frac{0.21j\omega}{0.1j\omega + 1}$ . 于是我们有

该包络线的函数形式为  $W(j\omega) = \frac{0.21j\omega}{0.1j\omega + 1}$ . 于是我们有

$$|e^{-0.1j\omega} - 1| \leq \left| \frac{0.21j\omega}{0.1j\omega + 1} \right|, \forall \omega \in \mathbf{R}.$$



容易证明,对任意满足  $0 \leq \tau \leq 0.1$  的  $\tau$ ,均有

$$|e^{-\tau j\omega} - 1| \leq \left| \frac{0.21j\omega}{0.1j\omega + 1} \right|, \forall \omega \in \mathbf{R}.$$

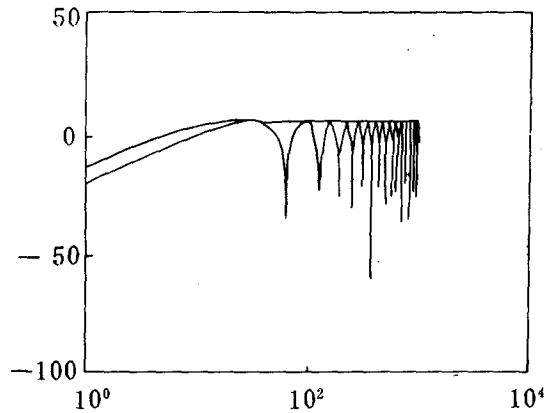


图 1.1.5  $|e^{-0.1j\omega} - 1|$  和  $|W(j\omega)|$  的 Bode 图

需要指出的是,对一个实际系统,总可以用上述三种模型中的任意一种来表示。至于选取哪一种模型,要视分析的方便而定。

**例 1.1.3** 设标称对象为  $G_0(s) = \frac{1}{s+1}$ , 而实际对象为  $G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-3)}$ 。

若采用加性不确定性模型来表示,则

$$\Delta_A(s) = G(s) - G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)}.$$

若采用乘性不确定性模型,则

$$\Delta_M(s) = G(s)G_0^{-1}(s) - 1 = \frac{1}{s-3}.$$

若采用分子分母不确定性模型,可选取  $N(s) = \frac{1}{s+4}$ ,  $D(s) = \frac{s+1}{s+4}$ 。显然  $G_0(s) = N(s)D^{-1}(s) = \frac{1}{s+1}$ 。此时有

$$\begin{aligned} \Delta_N(s) &= \frac{s-2}{(s+3)(s+5)} - \frac{1}{s+4} = -\frac{(6s+23)}{(s+3)(s+4)(s+5)}, \\ \Delta_D(s) &= \frac{(s+1)(s-3)}{(s+3)(s+5)} - \frac{s+1}{s+4} = \frac{(7s+27)(s+1)}{(s+3)(s+4)(s+5)}. \end{aligned}$$

在最后一个模型中  $G(s) = (N(s) + \Delta_N(s))(D(s) + \Delta_D(s))^{-1} \triangleq \tilde{N}(s)\tilde{D}^{-1}(s)$ , 其中  $\tilde{N}(s)$  和  $\tilde{D}(s)$  的选取是任意的,只要  $\tilde{N}(s)$  和  $\tilde{D}(s)$  互质稳定即可。

## 1.2 控制系统的线性分式变换模型

本节介绍线性分式变换 (Linear Fractional Transformation) 模型,或简称为 LFT 模型。这种模型广泛应用于  $H^\infty$  优化、结构奇异值分析和控制理论的其他一些领域中。用这种模型可以使许多控制问题用一种统一的、标准的形式表示出来。

记  $M^{m \times n}(s)$  为所有  $m \times n$  的有理函数矩阵的全体。设

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in M^{(l_1+l_2) \times (l_1+l_2)}(s),$$

$$\Delta_l \in M^{l_1 \times r_1}(s),$$

$$\Delta_u \in M^{l_2 \times r_2}(s).$$

我们可定义两个映射

$$\mathcal{F}_l(P, \Delta_l): M^{l_1 \times r_1}(s) \rightarrow M^{r_1 \times l_1}(s)$$

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta_u): M^{l_2 \times r_2}(s) \rightarrow M^{r_2 \times l_2}(s)$$

分别为

$$\mathcal{F}_l(P, \Delta_l) := P_{11} + P_{12}\Delta_l(I - P_{22}\Delta_l)^{-1}P_{21}, \quad (1.2.1)$$

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta_u) := P_{22} + P_{21}\Delta_u(I - P_{11}\Delta_u)^{-1}P_{12}. \quad (1.2.2)$$

我们将  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  称为  $P$  和  $\Delta_l$  的下线性分式变换(有时也简称为 LLFT), 将  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  称为  $P$  和  $\Delta_u$  的上线性分式变换(有时也简称为 ULFT).  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  和  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  统称为线性分式变换(简称为 LFT).

显然,  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  有意义的前提是  $I - P_{22}\Delta_l$  可逆. 此时称  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  是适定的 (well-posed). 同理,  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  适定的条件是  $I - P_{11}\Delta_u$  可逆.

上面所给出的线性分式变换是定义在有理函数矩阵空间上的. 但在本书中有时它们是定义在复数矩阵空间上的. 这要根据上下文而定.

为了更好地理解线性分式变换的含义, 我们来看图 1.2.1 所示的系统. 我们将式(1.2.1)中的  $\Delta_l$  换成  $K$ , 则不难看出  $\mathcal{F}_l(P, K)$  实际上是从信号  $w$  到  $z$  的传递函数. 所以可以说, 下线性分式变换  $\mathcal{F}_l(P, K)$  反映了控制器  $K$  在系统中对信号传输通道  $w \rightarrow z$  的影响.

而上线性分式变换在本书中则常常用来表示不确定性在系统中的作用(如图 1.2.2 所示).

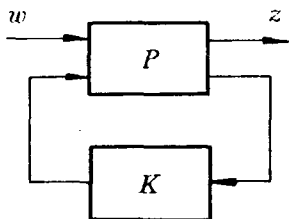


图 1.2.1 下线性分式变换

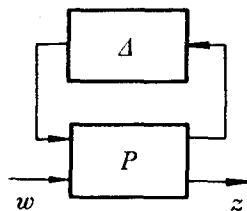


图 1.2.2 上线性分式变换

作为线性分式变换模型的一个应用, 我们来说明如何用它表示上节所述的几种动态不确定性.

1) 加性不确定性: 此时系统方程为

$$z = (G + \Delta_A)w. \quad (1.2.3)$$

令  $P_{11} = 0, P_{21} = I, P_{12} = I, P_{22} = G$ , 即

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G \end{bmatrix}, \quad (1.2.4)$$

则不难验证(1.2.3)的一个等价形式为

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{F}_u(P, \Delta_A)w \\ &= (P_{22} + P_{21}\Delta_A(I - P_{11}\Delta_A)^{-1}P_{12})w. \end{aligned}$$

2) 乘性不确定性: 此时系统方程为

$$z = G(I + \Delta_M)w. \quad (1.2.5)$$

令  $P_{11} = 0, P_{12} = G, P_{21} = I, P_{22} = G$ , 即

$$P = \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & G \end{bmatrix}, \quad (1.2.6)$$

则有(1.2.5)的等价形式:

$$z = \mathcal{F}_u(P, \Delta_M)w.$$

3) 分子分母不确定性: 此时系统方程为

$$z = (\tilde{D} + \Delta_D)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N)w. \quad (1.2.7)$$

令  $\Delta_c = [\Delta_N, \Delta_D]$ , 且

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{D}^{-1} & \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \\ \tilde{D}^{-1} & \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \end{bmatrix}, \quad (1.2.8)$$

则(1.2.7)的等价形式为

$$z = \mathcal{F}_u(P, \Delta)w.$$

于是我们用线性分式变换模型将上述三种不确定性模型统一了起来, 这为本书后面所进行的一般性的讨论提供了方便。

线性分式变换模型不仅可以表示含未建模动态的系统, 也可以表示参数不确定性系统。

**例 1.2.1** 考虑如图 1.2.3 所示的带阻尼器的质量弹簧装置。设其中参数  $m, c, k$  均是未知的常数。不失一般性, 设  $m = \bar{m}(1 + w_m \delta_m), c = \bar{c}(1 + w_c \delta_c), k = \bar{k}(1 + w_k \delta_k)$ 。其中  $\bar{m}, w_m, \bar{c}, w_c, \bar{k}$  和  $w_k$  均是已知常数,  $\delta_m, \delta_c$  和  $\delta_k$  的取值区间均为  $[-1, 1]$ 。我们下面分别用 LFT 写出这一系统的输入输出模型和状态空间模型。

设物体的位置  $y$  为输出, 力  $F$  为输入, 则系统的微分方程为

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F}{m}. \quad (1.2.9)$$

对上式进行拉氏变换, 写出系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{\bar{m}(1 + w_m \delta_m)s^2 + \bar{c}(1 + w_c \delta_c)s + \bar{k}(1 + w_k \delta_k)} \\ &= \frac{1}{\bar{m}s^2 + \bar{c}s + \bar{k} + \bar{m}w_m \delta_m s^2 + \bar{c}w_c \delta_c s + \bar{k}w_k \delta_k}. \end{aligned}$$

令

$$G_0(s) = \frac{1}{\bar{m}s^2 + \bar{c}s + \bar{k}},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_m & & \\ & \delta_c & \\ & & \delta_k \end{bmatrix},$$

$$W_1 = [\bar{m}w_m \quad \bar{c}w_c \quad \bar{k}w_k],$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} s^2 \\ s \\ 1 \end{bmatrix}.$$

则  $G(s)$  可写为

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + W_1 \Delta W_2 G_0(s)}.$$

于是  $G(s)$  可用如图 1.2.4 所示的反馈系统表示。

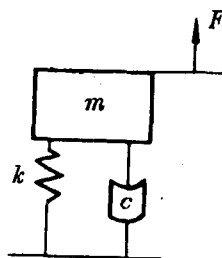


图 1.2.3 带阻尼器的质量弹簧装置