全国各类成人高等学校招生考试教程

高等数学（二）

专科起点升本科

全国著名成考辅导学校 联合编写

新大纲
新教程

考试大纲要求

常考知识点精讲

重点难点疑点提示

典型考题与解题技巧

同步训练和综合练习

附赠：专升本高等数学（二）一图通

中国人民大学出版社

全国各类成人高等学校招生考试教程

高等数学（二）

（专科起点升本科）

全国著名成考辅导学校　联合编写

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.2（专科起点升本科）/全国著名成考辅导学校联合编写
北京：中国人民大学出版社，2002
（全国各类成人高等学校招生考试教程）

ISBN 7-300-04202-3/G·842
Ⅰ.高…
Ⅱ.全…
Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 076938 号

全国各类成人高等学校招生考试教程
高等数学（二）
（专科起点升本科）
全国著名成考辅导学校　联合编写

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
本社网址：www.crup.com.cn
人大教研网：www.ttrnet.com
经　　销：新华书店
印　　刷：北京鑫鑫印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：12 插页 1
2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷
字数：301 000

总定价（16 册）：350.00 元　本册定价：16.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

全国各类成人高等学校招生考试教程

编委会

主　编　李天健　程方平

编　委　（以姓氏笔画为序）

马逸空　王平安　王军秋　王学英　王贤钊　王春艳
朱漱珍　朱燕梅　刘录正　刘国胜　李　伟　李从容
李仙娥　李艳芳　李超源　张永会　张启哲　张攀峰
时俊卿　何新华　陈丽英　陈南蕴　段建军　倪　侃
高天成　郭　昕　程正效

本书主编　王军秋

本书撰稿人　王军秋　王建国　吕丽英　张　斌　乔学军

出版说明

这套“全国各类成人高等学校招生考试教程”（含高中起点升本、专科，专科起点升本科），严格遵循教育部最新颁布的2003年起实行的考试大纲编写。

本套考试教程由全国著名成考辅导学校联合编写，内容规范，重点突出，各种形式的练习题较准确地体现了命题原则、思路，题型、题量、难易度完全与考纲一致。

本套考试教程本着“要精”、“要管用”的编写原则设计体例结构。内容模块包括：考纲要求、知识精讲、重点难点疑点提示、典型题精析、同步训练及参考答案、综合练习及参考答案等。

特别值得一提的是每本书后还附赠有该学科的知识系统网络“一图通”，把零散的知识点有机地逻辑地串联起来，使该学科的知识系统完整地呈现出来。这不仅有利于读者较快地全面整体地把握考试内容，而且特别有利于考生对考试中分值高的大题、综合题的解答。

这套考试教程的姊妹篇——“全国各类成人高等学校招生应试指导与模拟试卷”（含高中起点升本、专科，专科起点升本科），是专门为考生在复习的最后冲刺阶段进行实战演练、提高应试技能而编写的。

“一切为了考生，一切服务于考生”是我们的宗旨。我们真诚地祝愿广大考生通过系统的复习和模拟练习，取得理想的考试成绩。

中国人民大学出版社

目　　录

第一章　函数　极限和连续

第二章　一元函数微分学

第三章　一元函数积分学

第四章　多元函数微积分初步

第一章　函数　极限和连续

第一节　函　数

考纲要求

一、知识范围

(一)函数的概念

函数的定义　函数的表示法　分段函数　隐函数

(二)函数的简单性质

单调性　奇偶性　有界性　周期性

(三)反函数

反函数的定义　反函数的图像

(四)函数的四则运算与复合函数

(五)基本初等函数

幂函数　指数函数　对数函数　三角函数　反三角函数

(六)初等函数

二、要求

(一)理解函数的概念,会求函数的定义域、表达式及函数值,会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数的图像

(二)理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性

(三)了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数

(四)熟练掌握函数的四则运算与复合运算

(五)掌握基本初等函数的简单性质及其图像

(六)了解初等函数的概念

(七)会建立简单实际问题的函数关系式

知识精讲

一、函数的概念

(一)函数的定义

设 x 和 y 是两个变量,X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集,如果对任何的 $x\in X$,变量 y 按照一定的规律,有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

称 X 为该函数的定义域,x 为自变量,y 为因变量.

函数的定义有两个基本要素:定义域与对应规则.因此,只有当两个函数的定义域与对应

规则完全相同时,才认为它们是同一个函数.

(二)函数的表示法

公式法、图示法、表格法.

(三)分段函数　显函数　隐函数

1. 分段函数

用公式法表示函数,当自变量在不同的范围内取值时,对应法则不能用同一公式表达,而要用两个或两个以上的公式来表示,这类函数称为分段函数.

2. 显函数

函数关系用解析式 $y=f(x)$ 表示的称为显函数,如 $y=x^2$,$y=\sqrt{\lg x}$.

3. 隐函数

函数 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的函数,称为隐函数,例如 $x^2+y^2-1=0$.因为在这个方程中,函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$ 表示出来,如由它解出 $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$,它就变成了显函数.

二、函数的简单性质

(一)单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,均有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)[\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,均有

$$f(x_1)<f(x_2)[\text{或 } f(x_1)>f(x_2)]$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(或严格单调减少).

(二)奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的,如果对于任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.如果对任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点对称.

另外,两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数,两个奇(偶)函数之积必为偶函数,奇函数与偶函数之积必为奇函数.

(三)有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在正数 M,使得对于任意的 $x\in X$,都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(四)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期，通常说周期函数的周期是指它的最小正周期.

三、反函数

（一）反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对每一个 $y\in W$，有确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，则确定了一个新的函数，这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

（二）反函数的图像

函数 $y=f(x)$ 的反函数，$y=\varphi(x)$ 在直角坐标系 xOy 上的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、函数的四则运算与复合函数

（一）函数的四则运算

函数的和、差、积、商.

（二）复合函数

设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，$x\in D$，并且 $\varphi(x)$ 的值域属于 $f(u)$ 的定义域，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称此函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

不是任何两个函数都能复合成复合函数，只有 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(x)$ 的定义域的交不为空集时，它们才能复合.

五、基本初等函数

（一）常数

$y=c$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图像是一条平行于 x 轴的直线.

（二）幂函数

$y=x^{\mu}$（μ 为常数）

它的定义域根据 μ 的值而定，但在 $(0,+\infty)$ 上都有定义，图像都过点 $(1,1)$.

（三）指数函数

$y=a^{x}$（$a>0, a\neq1$，a 是常数）

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，它的图像过点 $(0,1)$，当 $a>1$ 时，函数单调递增，当 $a<1$ 时，函数单调递减.

（四）对数函数

$y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq1$，a 是常数）.

它的定义域是 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它的图像过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $a<1$ 时，函数单调递减.

（五）三角函数

1. 正弦函数　$y=\sin x$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，且为奇函数，$y=\sin x$ 以 2π 为周期.

2. 余弦函数　$y=\cos x$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，且为偶函数，$y=\cos x$ 以 2π 为周期.

3. 正切函数　$y=\tan x$

它的定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，且为奇函数，$y=\tan x$以$\pi$为周期.

4. 余切函数　$y=\cot x$

它的定义域为$(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，且为奇函数，$y=\cot x$以$\pi$为周期.

5. 正割函数　$y=\sec x$

它是余弦函数的倒数，定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，是无界函数，且为偶函数，$y=\sec x$以$2\pi$为周期.

6. 余割函数　$y=\csc x$

它是正弦函数的倒数，定义域为$(k\pi-\pi,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，是无界函数，且为奇函数，$y=\csc x$以$2\pi$为周期.

（六）反三角函数

1. 反正弦函数　$y=\arcsin x$

它的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且是单调增函数.

2. 反余弦函数　$y=\arccos x$

它的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，且是单调减函数.

3. 反正切函数　$y=\arctan x$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，反正切函数是单调递增函数.

4. 反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，反余切函数是单调递减函数.

以上五类函数称为基本初等函数，是最基本、最常用的函数，其中指数函数与对数函数互为反函数.

六、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

重点难点疑点提示

一、重点

(1)函数的定义、基本初等函数和初等函数的概念.

(2)复合函数的概念.

二、难点

复合函数.

典型题精析

【例1】　函数$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$的定义域是　　　　(　　)

A. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

【解析】 由 $x^2-x-6>0$,得 $x>3$ 或 $x<-2$;由 $3x-8>0$,得 $x>\frac{8}{3}$,所以定义域为 $(3,+\infty)$.

答案: C

【例 2】 下列各对函数中,相同的是　　(　　)

A. $f(x)=\sqrt[4]{x-1},g(x)=\sqrt{x^4-x^2}$　　B. $f(x)=\arcsin(\sin x),g(x)=x$

C. $f(x)=x-1,g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$　　D. $f(x)=1-\cos 2x,g(x)=2\sin^2 x$

【解析】 因为 A,C 中两函数的定义域不同,B 中两函数的对应规律不同.

答案: D

【例 3】 设函数 $f(x)=\frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$,则该函数是　　(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 单调函数

【解析】 函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=\frac{-x(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=\frac{-x(1-e^x)}{1+e^x}$$
$$=\frac{x(e^x-1)}{e^x+1}=f(x)\qquad(\quad)$$

即 $f(x)$为偶函数.

答案: B

【例 4】 函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数是　　(　　)

A. $y=4^{2x-1}$　　B. $y=4x-1$　　C. $y=2^{x-1}$　　D. $y=4^{x-1}$

【解析】 由 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2=\log_4 2\sqrt{x}$ 得 $2\sqrt{x}=4^y,\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot 4^y,x=\frac{1}{4}\cdot 4^{2y}=4^{2y-1}$,故反函数 $y=4^{2x-1}$.

答案: A

【例 5】 函数 $y=\frac{1}{x}\ln(2+x)$的定义域是　　(　　)

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$　　B. $x>0$　　C. $x>-2$　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

【解析】 由函数表达式有

$$\begin{cases}x\neq 0\\2+x>0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\neq 0\\x>-2\end{cases}$$

所以定义域为 $x>-2$ 且 $x\neq 0$.

答案: D

【例 6】 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$,则 $f(x)=$______.

【解析】 由于 $f(x+1)=x^2+3x+5$,令 $x+1=t,x=t-1$,代入 $f(x+1)$的表达式

$$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$$

答案: x^2+x+3

【例 7】 设 $y=3^u,u=v^2,v=\tan x$,则复合函数 $y=f(x)=$______.

【解析】 将 v,u 表达式依次代入 $y=3^u$

答案： $3^{\tan^2 x}$

【例 8】 设 $f(x)=\sqrt{9+x^2}$,求 $f(-4),f(0),f(1),f(a),f(a+1)$.

【解析】 $f(-4)=\sqrt{9+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$$f(0)=\sqrt{9+0}=3$$

$$f(1)=\sqrt{9+1^2}=\sqrt{10}$$

$$f(a)=\sqrt{9+a^2}$$

$$f(a+1)=\sqrt{9+(a+1)^2}=\sqrt{9+a^2+2a+1}=\sqrt{a^2+2a+10}$$

【例 9】 求 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期.

【解析】 因为 $\sin x$ 的周期为 2π;$\sin 2x$ 的周期为 π;$\sin 3x$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$,而 $2\pi,\pi,\frac{2\pi}{3}$的最小公倍数为 2π,所以函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为 2π.

【例 10】 求函数 $y=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x^2-4, & 0<x<2\end{cases}$的反函数.

【解析】 因为当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时,$y=x^2$,$x=-\sqrt{y}$,$0\leqslant y\leqslant 4$;当 $0<x<2$ 时,$y=x^2-4$,$x=\sqrt{y+4}$,$-4<y<0$,故所求反函数为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4}, & -4<x<0\end{cases}$$

【例 11】 写出下列函数组成的复合函数,并求复合函数的定义域.

(1)$y=\arccos x$ $\quad x=1-t^2$ $\qquad$ (2)$y=\sqrt{u}$ $\quad u=\cos v$ $\quad v=2x$

【解析】 (1)由 $y=\arccos x$,$x=1-t^2$ 复合而成的函数为 $y=\arccos(1-t^2)$,由于 $-1\leqslant 1-t^2\leqslant 1$,从而 $0\leqslant t^2\leqslant 2$,$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$,复合函数定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(2)由 $y=\sqrt{u}$,$u=\cos v$,$v=2x$ 复合而成的函数为

$$y=\sqrt{\cos 2x}$$

由于 $y=\sqrt{\cos 2x}$必须 $\cos 2x\geqslant 0$,即

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$$

从而复合函数的定义域为$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$,其中 $k=0,\pm 1,\pm 2\cdots$.

【例 12】 下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1)$y=\cos^2(2x+1)$; $\qquad$ (2)$y=5(x+1)^2$

【解析】 (1)$y=\cos^2(2x+1)$是由 $y=u^2$,$u=\cos v$ 和 $v=2x+1$ 复合而成.

(2)$y=5(x+1)^2$ 是由 $y=5u^2$,$u=x+1$ 复合而成.

【例 13】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,求 $f[f(x)]$,$f[f[f(x)]]$.

【解析】 $f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x,x\neq 1$

所以 $$f[f[f(x)]]=f(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$$

【例 14】 设 $F(x)=\ln x$，证明：当 $x>0, y>0$，下列等式成立.

(1) $F(x)+F(y)=F(xy)$　　(2) $F(x)-F(y)=F\left(\frac{x}{y}\right)$

【证明】 (1) $F(x)+F(y)=\ln x+\ln y=\ln xy=F(xy)$

(2) $F(x)-F(y)=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}=F\left(\frac{x}{y}\right)$

同步训练及参考答案

一、同步训练

(一)选择题

1. 函数 $y=\cos\frac{x}{2}+\sin 3x$ 的周期为 ( )

A. π　B. 4π　C. $\frac{2}{3}\pi$　D. 6π

2. 下列函数对中相同的函数是 ( )

A. $f(x)=x$, $g(x)=\frac{x^2}{x}$　B. $f(x)=\arccos(\cos x)$, $g(x)=x$

C. $f(x)=\lg(x-1)^2$, $g(x)=2\lg(x-1)$　D. $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

3. 函数 $y=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是 ( )

A. 单调有界函数　B. 单调无界函数　C. 有界奇函数　D. 有界偶函数

4. 设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，则 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$　B. 1　C. 3　D. 2

(二)填空题

1. 设 $f(x)=\frac{\ln(x^2+2x-3)}{\sqrt{x^2-4}}$，则 $f(x)$ 的定义域是______.

2. 设 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$，则 $f(x)=$______.

3. 可以将复合函数 $y=\arcsin 2^x$ 分解为______.

4. 函数 $y=\frac{2^x}{1+2^x}$ 的反函数是______.

5. 若 $f(x+1)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)=$______.

6. 设 $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=\sin x+1$，则 $f[\varphi(0)]=$______.

(三)计算题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-9}$　(2) $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$　(3) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$

(4) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$　(5) $y=\frac{\arccos\frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$　(6) $y=\frac{-5}{x^2+4}$

2. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$　　(2) $y=1+\lg(x+2)$

3. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=(1+\ln x)^5$　　(2) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$　　(3) $y=\lg^2\arccos x^2$

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(4) $f(x)=\sin x-\cos x$

5. 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　(2) $f(x)=x+\lg x$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 求 $f(x-1), f(x^2-1)$.

7. 设 $\psi=(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$, 求 $\psi(x)$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$和 $f[f[f(x)]]$.

(四)证明题

1. 如果 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$, 证明 $f(-x)=-f(x)$.

2. 如果 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$, 证明 $f(-x)=f(x)$.

3. 设 $f(x)=a^x$, 证明 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$, $\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

二、参考答案

(一)选择题

1. B　　2. D　　3. D　　4. C

(二)填空题

1. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　2. $1-\dfrac{4}{1-x}$　　3. $y=\arcsin u$　　$u=2^x$

4. $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$　　5. $\dfrac{1}{x-1}$　　6. 1

(三)计算题

1. (1)为使分式有意义,要求 $x^2-9\neq 0$;分子的根号下应非负,$x+1\geqslant 0$,因此

$$\begin{cases}x^2-9\neq 0\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$$

即 $x\geqslant -1$,且 $x\neq 3$,定义域为$[-1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2)由 $\lg(x-1)$知 $x-1>0$;由第二项有 $x+1>0$,所以 x 要满足

$$\begin{cases}x-1>0\\ x+1>0\end{cases}$$

即 $x>1$,定义域为$(1,+\infty)$.

(3)由反正弦函数定义域为$[-1,1]$知

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant1$$

即$-1\leqslant x\leqslant3$,定义域为$[-1,3]$.

(4)由 $\lg(3-x)$知 $3-x>0$,再由分母不为零知$|x|-1>0$,因此

$$\begin{cases}3-x>0\\|x|-1>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x<3\\|x|>1\end{cases}$$

所以定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(5)由 $\arccos\frac{2x-1}{7}$知 $-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant1$;由分母不为零及根式的性质知 $x^2-x-6>0$,因此

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant1\\x^2-x-6>0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant4\\x>3\text{ 或 }x<-2\end{cases}$$

所以定义域为$[-3,-2)\cup(3,4]$.

(6)由于分母 $x^2+4\neq0$,所以函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

2.(1)由

$$y=\frac{x+2}{x-2}\text{ 有 }x=\frac{2(y+1)}{y-1}$$

所以反函数为

$$y=\frac{2(x+1)}{x-1}$$

(2)由 $y=1+\lg(x+2)$,有 $x=10^{y-1}-2$

所以反函数为

$$y=10^{x-1}-2$$

3.(1)$y=(1+\ln x)^5$ 可以看成由

$$y=u^5,\quad u=1+v,\quad v=\ln x$$

复合而成.

(2)$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$可以看成由

$$y=\sqrt{u},\quad u=\ln v,\quad v=\sqrt{x}$$

复合而成.

(3)$y=\lg^2\arccos x^2$ 可以看成由

$$y=u^2,\quad u=\lg v,\quad v=\arccos t,\quad t=x^2$$

复合而成.

4.(1)由于

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$$

所以 $f(x)$为偶函数.

(2)由于

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(3)由于

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$$
$$=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$=-f(x)$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(4)由于

$$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)$$
$$=-\sin x-\cos x$$

所以 $f(x)$是非奇非偶函数.

5.(1)由于 $f(x)$为指数函数且底数为$\frac{1}{2}$小于 1,所以 $f(x)$为单调递减函数.

(2)由于 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\lg x_2-(x_1+\lg x_1)$$
$$=x_2-x_1+\lg\frac{x_2}{x_1}$$

由于 $x_2>x_1,x_2-x_1>0;\frac{x_2}{x_1}>1,\lg\frac{x_2}{x_1}>0$,故 $f(x_2)-f(x_1)>0$

所以 $f(x)$为单调递增函数.

6.由于

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

当 $x-1<0$,即 $x<1$ 时,$f(x-1)=-1$;当 $x-1=0$,即 $x=1$ 时,$f(x-1)=0$;当 $x-1>0$,即 $x>1$ 时,$f(x-1)=1$,所以

$$f(x-1)=\begin{cases}-1, & x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

当 $x^2-1<0$,即 $-1<x<1$ 时,$f(x^2-1)=-1$;当 $x^2-1=0$,即 $x=1$ 或 $x=-1$ 时,$f(x^2-1)=0$;当 $x^2-1>0$,即 $x>1$ 或 $x<-1$ 时,$f(x^2-1)=1$,所以