自然科学基础系列教材

工科大学数学教程

工科数学分析

偏理

下册

主　编　张传义

副主编　包革军　张彪

哈尔滨工业大学出版社

自然科学基础系列教材

工科大学数学教程

工科数学分析

偏理·下册

主　编　张传义
副主编　包革军　张　彪

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内　容　简　介

本书是以前国家教委1995年颁布的高等数学课程教学基本要求为纲，针对本、硕连读生和对数学较高要求的非数学专业本科生，并吸取哈尔滨工业大学多年来教材建设的特色及教学经验而编写的工科数学分析课程教材。

工科数学分析(下册)共六章，主要内容有级数、多元函数的微分学、隐函数定理及应用、重积分、含参变量积分、曲线积分与曲面积分。本教材在课程结构上，加强了那些在本课程和相关课程中有深远影响的基本概念、理论和方法，如级数收敛理论、隐函数定理、函数的重积分及曲线积分、曲面积分的存在定理。书中每节后都附有适量的习题，其中有些习题综合性较强，有一定的难度。

本书可作为高等学校理工科非数学专业工科数学分析课程教材，也可作为准备考研人员和工程技术人员的参考书。

工科数学分析

Gongke Shuxue Fenxi

偏理・下册

主　编　张传义

副主编　包革军　张彪

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨市工大节能印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 16.625　字数 424 千字

2000年5月第1版　2000年5月第1次印刷

印数 1～2 000

ISBN 7-5603-1542-9/O・112　定价(上下册) 48.00 元

(本册 25.50 元)

前　言

培养基础扎实、勇于创新型人才，历来是大学教育的一个重要目标，随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出，在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得一定的成效，在此基础上，编写了这套教材，其中包括《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《数学实验》及针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》。这套教材是参照原国家教委 1995 年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和 1997 年研究生入学考试大纲编写的。为满足不同专业、不同层次学生的需要，这套教材适当增加了部分内容，对学生能力的要求也有所提高。

本教材的编写力求具有以下特色：

1. 将各门课程的内容有机结合、融汇贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入。取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础。

3. 例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力。

4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向。

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写，东北电力学院、黑龙江科技学院、鞍山师范学院、大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作，哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会

2000 年 5 月

编者的话

从1994年起，哈尔滨工业大学开始招收优秀高中生进行本科、硕士连读。这是培养高质量人才的一种卓有成效的途径。大学数学教学如何适应这种情况是一个迫在眉睫、值得研究的问题。这几年来数学系的许多教师进行了积极的探索和尝试。本教材是在杨克劭、包革军等编写的校内讲义《高等教学》、《工科数学分析》的基础上，结合编者多年从事数学分析教学的经验编写而成的。

世纪之交，科学技术的发展日新月异。从培养21世纪高质量人才的角度来看，把数学教学仅仅当做“为专业课程提供数学工具”的做法，显然达不到培养基础知识扎实、知识面广博、能迅速适应社会发展的高素质人才的目的。有必要实现“提供工具”到“提高大学生数学素质”的转变。为此，数学教学体系和内容也应相应地作出调整和更新。这也是编者把《高等数学》更名为《工科数学分析》的动力之一。我们在编写这本教材时，将其难易程度定位于数学与应用数学专业的数学分析和工科专业的高等数学之间。在不降低传统工科高等数学基本概念、基本运算要求的同时，对于数学分析的基本理论有较为严谨的阐述，以期学生通过同名课程的学习，除了具有动手计算的能力外，还能养成正确演绎推理的习惯，在归纳、联想和抽象思维能力方面有较大的提高。本书的编写，作者力求语言通顺、概念清楚、论证严谨、计算准确，使其通俗易懂，方便学习。

参加本书编写的人员有：张传义（第七章）、张彪（第八、九章）、包革军（第十、十一、十二章）。

杨克劭教授在繁重的教学工作中抽空审阅了全书，提出了许多宝贵意见，为本书增色不少；哈尔滨工业大学出版社唐余勇总编辑、黄菊英编审大力支持、辛勤运作，使本书尽快与读者见面。在此一并表示感谢。

本书可作为本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生工科数学分析课的教材，也可作为报考硕士研究生的复习参考书。

受编者水平和经验所限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请同行专家及广大读者批评指正。

编　者

2000年4月于哈尔滨工业大学

本书常用符号

“$\triangleq$”表示定义

$(a,b)\triangleq\{x|a<x<b\}$　称为开区间

$[a,b]\triangleq\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$　称为闭区间

$(a,b]\triangleq\{x|a<x\leqslant b\}$　称为半开区间

$[a,b)\triangleq\{x|a\leqslant x<b\}$　称为半开区间

$(a,+\infty)\triangleq\{x|a<x<+\infty\}$　称为右半无穷区间

$(-\infty,b)\triangleq\{x|-\infty<x<b\}$　称为左半无穷区间

$[a,+\infty)\triangleq\{x|a\leqslant x<+a\}$　称为右半无穷闭区间

$(-\infty,b]\triangleq\{x,|-\infty<x\leqslant b\}$　称为左半无穷闭区间

$(-\infty,+\infty)\triangleq\{x|-\infty<x<+\infty\}$　称为无穷区间

$U(a,\delta)\triangleq\{x||x-a|<\delta\}$　称为 a 的 δ 邻域

$U(a)$　表示 a 的某一邻域

$\mathring{U}(a)$　表示 a 的某一去心邻域

“Φ”　表示“空集”

“$\cup$”　表示“并集”

“$\cap$”　表示“交集”

$\mathbf{N}$　表示自然数集

$\mathbf{Z}$　表示整数集

$\mathbf{Q}$　表示有理数集

$\mathbf{R}$　表示实数集

$\mathbf{R}^+$　表示正实数集

“$\in$”　表示“属于”

“$\overline{\in}$”　表示“有属于”

“$\subset$”　表示“包含”

“$\Rightarrow$”　表示“推出”或“蕴涵”或“若……,则……”

“$\Leftrightarrow$”　表示“充分必要”或“等价”或“当且仅当”

“$\forall$ ”　表示“任意”或“任意一个”

“$\exists$ ”　表示“存在”或“能找到”

“max”　表示“最大”(它是 maximum 的缩写)

“min”　表示“最小”(它是 minimum 的缩写)

“inf”　表示“下确界”(它是 infimum 的缩写)

“sup”　表示“上确界”(它是 supremum 的缩写)

$n!\triangleq n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1(n\in\mathbf{N})$

$0!\triangleq1$

$(2n-1)!! \triangleq (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$

$(2n)!! \triangleq (2n)\cdot(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2$

$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数

例如$[-0.5]=-1,[3]=3,[7.8]=7$

$C[a,b]$表示在区间$[a,b]$上连续函数的全体

$C(I)$表示在区间 I 上连续函数的全体

目　录

第七章 级 数

级数与极限密切相关，是数学分析的主要组成部分之一。级数不仅在理论上重要，它还在科学技术中有广泛的应用。级数分为数值级数与函数项级数。数值级数是函数项级数的特殊情况，又是研究函数项级数的基础。本章首先讨论数值级数的基本理论。

7.1 级数的敛散性

7.1.1 收敛与发散的概念

设给定了一个数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots \tag{1.1}$$

把式(1.1)的项依次用加号"＋"形式上连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.2}$$

称为级数，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_n 称为级数的一般项，或通项。

各项都是常数的级数，称为数值级数；以函数为项的级数，称为函数项级数。本节只讨论数值级数。

以前，我们只熟悉有限项相加，即有限和。例如

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

和 S_n 称为级数(1.2)的部分和，或前 n 项和。式(1.2)是无限项相加，是一个形式上的无限和。它是否像有限和一样能表达一个确定的实数？极限的思想启发我们去考虑级数(1.2)的部分和数列 $\{S_n\}$，由此引出下面的定义。

【定义 1.1】 若级数(1.2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则说级数(1.2)收敛，并称极限值 S 为该级数的和，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

否则，说级数(1.2)发散，此时级数(1.2)没有和。

对于收敛级数(1.2)，称差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为该级数的余和。显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$。所以，当 n 充分大时，可以用 S_n 近似地代替 S，其误差为 $|r_n|$。

【例 1.1】 讨论几何级数（或称等比级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性。

【解】 该级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na & q = 1 \end{cases}$$

当 $|q| < 1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

故该级数收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$；当 $|q| > 1$ 时，由于$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在，故该级数发散。显然，当 $q = 1$ 时，级数也发散。再考虑 $q = -1$ 时的情况，此时级数变为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$$

由于它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为偶数} \\ a & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

显然是一个发散数列，所以该级数发散。

综上所述，当 $|q| < 1$ 时，几何级数收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时，几何级数发散。

【例 1.2】 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性。

【解】 由于$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，所以，部分和

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

故所讨论级数收敛，其和为 1，其余和

$$r_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

7.1.2 敛散性判别及收敛级数的性质

从级数的定义来看，每个级数都可以看成一种特殊形式的数列。另一方面，对于任何数列 $\{S_n\}$，令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}\cdots$$

那么研究数列 $\{S_n\}$ 的极限问题，也就是研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛问题。所以数列与级数两者之间是可以互相转化的。因此，关于级数的一般理论，虽然我们可以毫不费力地将以前学过的数列极限的理论直接搬过来，但这并不意味级数是数列极限的简单重复。恰恰相反，正因为级数的

特殊形式是有限和的推广，有鲜明的直观性，因此产生了一系列特殊的深刻的性质。

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛是用其部分和数列 $\{S_n\}$ 来定义的，由数列的Cauchy收敛准则，数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总有自然数 N 存在，使得当 $n > N$ 及任意的正整数 P，有

$$|S_{n+P} - S_n| < \varepsilon$$

也就是

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+P}| < \varepsilon$$

于是，有下面在级数的理论中起着基本作用的定理。

【定理 1.1】（关于级数的 Cauchy 收敛准则） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，不论 P 是任何自然数，不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+P} u_k\right| < \varepsilon$$

都成立。

【例 1.3】 考虑调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$。不论 N 取得怎样大，只要取 $P = N$，便有

$$\sum_{K=N+1}^{N+P} \frac{1}{K} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} >$$

$$\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

可见，我们找不到一个自然数 N，当 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 时，使得对于一切自然数 P，都有

$$\sum_{K=N+1}^{N+P} \frac{1}{K} < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

根据定理 1.1 可知，级数是发散的。

定理1.1指出，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于该级数的充分远（即 $n > N$）的任意段（即 $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+P}$）的绝对值可以任意小。由此可见，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与该级数充分远的任意段有关，而与该级数前面有限多个项无关。于是有

【推论】 若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项，则不改变该级数的敛散性。

例如，去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项，所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100+n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+n} + \cdots$$

仍是发散的。

以下讨论收敛级数的性质，这些性质都以命题的形式给出。

【命题 1.1】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

【证】 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S。由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

根据这一命题，如果已知一个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$不满足条件$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则该级数必是发散的。因此，我们可以用此命题来判断一个级数的发散性。但要注意，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$仅是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要条件，而不是充分条件，即$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也可能发散。例1.3清楚地指明了这一点。

利用数列极限的有关性质，不难证明下面的命题。

【命题1.2】 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$，则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a \pm b$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = ca$，其中$c$为常数；

(3) 若$a_n \leqslant b_n$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。

【命题1.3】 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则不改变它的各项次序任意加入括号后所得到的新级数仍收敛，并且和不变。

【证】 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$，部分和数列为$\{S_n\}$。在其中任意加入括号，得一新级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots +$$
$$(u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

记它的部分和数列为$\{\overline{S}_k\}$，则

$$\overline{S}_1 = S_{n_1}, \overline{S}_2 = S_{n_2}, \cdots, \overline{S}_k = S_{n_k} \cdots$$

因此$\{\overline{S}_k\}$为原级数部分和数列$\{S_n\}$的一个子列$\{S_{n_k}\}$，从而有

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S$$

命题1.3说明，任何收敛级数都具有结合性质，但它的逆命题不一定成立。例如，级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + \cdots$$

是收敛的，但不加括号的级数$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$却是发散的。

习　题　7.1

1. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和$S_n = \dfrac{2n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。

(1) 求此级数一般项u_n；(2) 判定此级数的敛散性。

2. 用定义判定下列级数的敛散性，对收敛级数，求出其和。

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n + 1}{q^n}$ $(|q| > 3)$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$

3. 利用级数的性质判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}-\frac{\ln^n 3}{3^n}\right)$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$　　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$　(x 是实数)

4. 分别就级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛和发散两种情况，讨论下列级数的敛散性。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$　　　(2) $1000+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

6. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛。反之是否成立？

7. 利用 Cauchy 准则证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛。

8. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散。

9. 证明：若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

7.2　正项级数

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项都是非负的，则称为正项级数。显然，正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加，所以，根据单调有界定理，立刻得到下面的定理。

【定理 2.1】　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

上面定理的重要性主要不在于利用它来判别正项级数的敛散性，而在于它是证明下面许多有用的判别准则的基础。

【定理 2.2】（比较判别法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数，并且对于每一 n，有 $a_n\leqslant b_n$。

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。

【证】　由已知对于每一 n，有 $a_n\leqslant b_n$，所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k=\bar{S}_n$$

由定理 2.1，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则数列$\{\bar{S}_n\}$有上界，从而数列$\{S_n\}$也有上界，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，由同一定理，数列$\{S_n\}$无上界，从而数列$\{\bar{S}_n\}$也无界，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散。

【例 2.1】 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}=1+\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}+\cdots$$

的敛散性，其中P是任意非负实数。此级数称为广义调和级数，或P-级数。

【解】 当$P\leqslant 1$时，有

$$\frac{1}{n^P}\geqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故由比较判别法知$P\leqslant 1$时，$P$-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$发散。

当$P>1$时，将P-级数加括号如下

$$1+\left(\frac{1}{2^P}+\frac{1}{3^P}\right)+\left(\frac{1}{4^P}+\frac{1}{5^P}+\frac{1}{6^P}+\frac{1}{7^P}\right)+\left(\frac{1}{8^P}+\cdots+\frac{1}{15^P}\right)+\cdots$$

它的各项均不大于下述正项级数的对应项

$$1+\left(\frac{1}{2^P}+\frac{1}{2^P}\right)+\left(\frac{1}{4^P}+\frac{1}{4^P}+\frac{1}{4^P}+\frac{1}{4^P}\right)+\left(\frac{1}{8^P}+\cdots+\frac{1}{8^P}\right)+\cdots=$$
$$1+\frac{1}{2^{P-1}}+\frac{1}{4^{P-1}}+\frac{1}{8^{P-1}}+\cdots$$

这最后的级数是收敛的等比级数，公比$r=\frac{1}{2^{P-1}}<1$，故由比较判别法知，当$P>1$时，P-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$收敛。

使用比较判别法时，需要知道一些级数的敛散性，以作为比较标准。几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^n$和$P$-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$常常被当做标准。

【例 2.2】 讨论下列正项级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

【解】 (1) 因为

$$0<u_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

而几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，故由比较判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$$

收敛。

(2) 因为

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}>\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$是发散的$P$-级数($P=\frac{2}{3}<1$)，故由比较判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

发散。

(3) 因为

$$0 < u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx < \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

又P-级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛($P=\frac{3}{2}>1$)，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

收敛。

定理 2.2 有下面的简便的推论。

【推论】 设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (b_n \neq 0)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

(1) 若$k<+\infty$，则从$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛可以断定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2) 若$k>0$，则从$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散可以断定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也发散。

【证】 我们仅证明(1)。根据极限定义，取$\varepsilon=1$，则存在一个自然数N，使当$n \geqslant N$时，

$$\frac{a_n}{b_n} < k+1 \qquad \text{即} \qquad a_n < (k+1) b_n$$

于是根据比较判别法知(1)是成立的。

上述推论称为比较判别法的极限形式。

【例 2.3】 判别下列正项级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

【解】 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$发散。

(2) 因为$1-\cos\frac{\pi}{n}$是$\frac{\pi}{n}$的二阶无穷小($n\to\infty$时)，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{n})$收敛。

【定理 2.3】（积分判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)(a > 0)$ 上非负、连续，单调下降，且

$$f(n) = u_n \qquad (n \geqslant N)$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同。

【证】 为简便计，设 $a = 1, N = 1$，由已知条件，对任何正整数 k，有

$$u_{k+1} = f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) = u_k$$

从而有

$$S_{n+1} - u_1 \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

由于 $f(x) > 0$，所以 $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 b 的单调增加函数。又 S_n 也是单调增加。若广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 I，则 $\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < I$，于是 $S_{n+1} < I + u_1$，即 $\{S_n\}$ 有界，由定理 2.1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。若广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$，从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

【例 2.4】 试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^P}$，当 $P > 1$ 时收敛，当 $0 < P \leqslant 1$ 时发散。

【证】 设

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^P} \qquad (x \geqslant 2)$$

则函数 $f(x)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上满足 $f(x) > 0$，连续且单调减小（因为 $f'(x) < 0$），$f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^P}$，即满足定理 2.3 的条件。当 $P = 1$ 时

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

广义积分发散。当 $P \neq 1$ 时

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^P} = \frac{1}{1-P}(\ln x)^{(1-P)}\Big|_2^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{当 } P < 1 \text{ 时} \\ \frac{1}{P-1}(\ln 2)^{1-P} & \text{当 } P > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

故由积分判别法知，当 $P > 1$ 时，所论级数收敛；当 $0 < P \leqslant 1$ 时，所论级数发散。

无论是比较判别法，还是积分判别法，都必须借助于敛散性已知的级数或广义积分。下面介绍另外两个判别法，都是利用级数本身的条件来判断其敛散性的。

【定理 2.4】（D'Alembert 判别法） 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

则当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$（或 $\rho = +\infty$）时，级数发散。

【证】 由数列极限定义，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon$$