285

中等专业学校教材

测量平差

（新二版）

哈尔滨冶金测量学校　刘启沐

测绘出版社

中等专业学校教材

测量平差

（新二版）

哈尔滨冶金测量学校　刘启沐

测绘出版社

本书根据1964年新一版修订而成。全书共分七章，主要讨论测量平差的基本理论和方法。并详细地介绍了各种平差方法的解算过程和精度评定问题。

此次再版对原书作了较大修改，增加了误差分布曲线、测边网和边角网的平差以及矩阵平差等内容。

本书是中等测绘专业教材，也可作为中级测量技术人员自修参考用书。

中等专业学校教材

测量平差

哈尔滨冶金测量学校　刘启沐

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16·印张 $18^1/_2$·字数 427 千字

1974年11月北京新一版·1984年6月新二版

1984年6月第三次印刷

印数 29,800—40,800 册·定价 1.55 元

统一书号：15039·新331

前　　言

原书于1960年初版，1964年出了修订版，迄今已20年了。根据20年来生产实践及教学实践的经验，急需对原书进行彻底地修改。这次修改后的新书与原书相比较，在内容和编排方面，主要的差异有下述几点：

1．在介绍“最小二乘法原理”的概念时，试图避免应用“概率论”的理论，直接引入误差分布曲线及其函数式，以说明最小二乘法原理的概念，让读者对最小二乘法原理有一个粗浅的认识。

2．本书中，把任意函数化为线性函数时，是利用全微分公式，而不是台劳级数公式。这样，就避免了涉及较深的数学知识。

3．随着量距的现代化，如测边网和边角网等已被广泛采用。关于测边网和边角网的平差，在本书的第四章和第六章中将予介绍。

4．随着计算工具的现代化，本书中，对数形式的式子基本上被真数形式的式子所代替。

5．本书中，第七章是新增加的，矩阵作为一种数学工具，在测量平差中已显示出它的优越性。并将成为测量平差得力的数学工具。

6．本书中，误差传播定律及其应用写在第二章中，条件平差及其应用写成第四章，间接平差及其应用写成第六章。所有这些内容，原书均是分章写的。

本书中，联系实际以平面控制为主。而平面控制又以三角网为主。因为长时间以来，三角网是平面控制的主要形式。

在修订本书时，试图把概念的阐述尽可能清楚一些，式子的推导尽可能仔细一些，联系实际尽可能多一些。由于编者水平所限，很难如愿。存在的缺点和错误，请读者批评指正。

本书承鲁林成副教授和徐彩琴同志审阅，提出了很多宝贵意见和建议，谨此表示感谢。

编者　1982.10.

目 录

第一章　观测误差及最小二乘法

概　　述

本章将从观测值含有不可避免的误差谈起，接着介绍观测误差的性质及其产生的原因，最后介绍最小二乘法的意义和应用。即是说，本章将从观测实践到误差理论，作最简要的描述。因为，它是测量平差的基础知识。

§1-1　观测误差

在野外测量中，观测的未知量一般可概括为水平长度、铅垂长度(地面点高程)、水平角度和垂直角度四种。又可进一步概括为长度和角度两种。对于不同类型的未知量，需要不同的观测仪器和观测方法。即使同一类型的未知量，因为需要有精粗之别，采用的观测仪器和观测方法也各不相同。因此，观测工作很复杂，也很重要，是质量的关键。

用仪器观测未知量而获得的数值叫做观测值。观测的实践证明，观测值含有不可避免的误差，而不是未知量的真值。例如，一个平面三角形三内角之和应为180°，这180°便是三内角和的真值。如果用仪器观测这三个角，其和一般不等于180°，不是比它大，就是比它小，与180°之差称为三角形闭合差。三角形之所以有闭合差，是因为三个角度观测值含有误差的缘故。又例如，观测某一个长度，观测几次就得到几个互不相等的观测值。按道理该长度只有一个，就是该长度的真值。说明这些互不相等的观测值一定含有误差。观测值含有的误差称为观测误差。

观测误差产生的原因是多种多样的，概括起来可分为下列三个方面：

1．仪器误差　观测工作是使用特制的仪器来完成的。各种各样的测量仪器都不是完美无缺的。即使最精密的仪器，也含有一定的误差。例如，丈量长度的各种各样的尺子，包括水准尺在内，它们的格值都含有误差，所标记的长度并不是真长。另一方面，尺子不管是用金属、木材或塑料做的，它们的长度随着温度的变化而变化，所以，用这些尺子量得的长度就不是真长。又例如，水准测量用的水准仪，其照准轴不平行于水准轴时，在水准标尺上的读数将会产生误差，这个误差将随着水准标尺距水准仪的距离增大而增大。再例如，测角用的经纬仪，其度盘有刻划误差和偏心差，垂直轴不真正垂直，水平轴不真正水平，等等误差，都使角度观测值含有误差。

2．周围环境的影响　观测时的自然界，如温度、湿度、风力、大气折光等因素，都会使观测值产生误差。如温度不仅给丈量长度带来误差，也会给水准测量和角度测量带来误差。大气的水平折光给水平角观测带来误差，大气的垂直折光给垂直角观测和水准测

量带来误差。自然界影响观测值的因素，其特点是复杂多变、难于准确地掌握其规律。

3. 观测者的影响 由于观测者的感觉器官的鉴别能力有着一定的局限性，所以不论在仪器的安置、照准、读数等方面，都会使观测值产生误差。此外，观测者的操作技术水平及作业时的认真负责态度，也将对观测值的质量起着不同程度的影响。

如上所述，观测值产生误差的因素是很多的。有的因素变化很慢，在一定时间内不变，有的因素变化很快，转瞬即异；有的因素容易被掌握，有的因素则难于被掌握；有的因素对观测值的影响是正值，有的则为负值；有的因素对观测值的影响比较大，有的则比较小。所以，观测误差是很多因素影响的代数和。

如上所述，仪器、环境和人三个方面的因素是引起观测误差的根源。因此，我们把这三方面的因素总合起来称为观测条件。不难想象，观测条件的好坏将与观测值的质量有着密切的关系。当观测条件好一些，比如说，仪器的精度高一些，并经过了严格的校正；观测者操作熟练而且认真仔细一些；周围环境对观测有利一些。那么，观测时所产生的误差平均说来就相应地小一些，因而观测值的质量就要高一些。反之，观测条件差一些，观测值的质量就要低一些。所以，观测条件的好坏决定了观测值质量的高低。当观测条件不同时，观测值的质量也不相同，则我们称这些观测值的精度是不相等的。当观测条件相同时，观测值的质量也是相同的，同样，我们称这些观测值的精度是相等的。

观测误差按其性质的不同，分为系统误差和偶然误差两种。

一、系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，某一因素引起的误差如果保持着相同的符号和大小，或者随着因素的变化，其引起的误差数值则遵循着一定的规律变化，凡具有这种性质的误差称为系统误差。例如，用30米长的钢尺量距，量得的距离为S，此尺与标准尺比较，测得尺长改正数为a，则距离S中含有尺长引起的误差为$\frac{a}{30}S$，其大小与S成正比，并与a同号。又如钢尺量距时的温度不是标准温度（与标准尺比较时的温度），我们已经知道，钢尺的长度热则伸长冷则缩短，丈量时的温度如果高于标准温度，那么伸长了的钢尺就把距离量短了，其误差应该为正。反之，丈量时的温度如果比标准温度低，则缩短了的钢尺把距离量长了，其误差应该为负。丈量时的温度与标准温度相差越大，则温度对距离产生的误差就越大。又如水准仪的照准轴不平行于水准轴，则在标尺上读数产生误差，其大小与水准仪至标尺的距离成正比，而且具有相同的符号。

系统误差是一种有规律性的误差，可采用观测的方法或计算方法以消除或大大地削弱它。例如，尺长误差和温度对距离的影响，可用计算的方法消除。照准轴不平行水准轴对高差的影响，观测时采取前后视相等就可以消除。

二、偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小（绝对值）和符号（正负）上都表现出偶然性，即从观测的顺序来观察，这列误差没有规律性，具有这种性质的误差称

为偶然误差。例如，观测时的照准误差，读数时的估读误差等等，都属于偶然误差。

如果某一列观测值，其误差的数值及符号变化均有一定的规律，则这列观测值所包含的主要误差就是系统误差。若观测误差的大小及符号没有任何规律，则这列观测值所包含的主要误差就是偶然误差。

观测结果不可避免地包含偶然误差，它不可能被消除，但可以选择好的观测条件削弱它。

§1-2 偶然误差的性质

任一被观测的量，客观上总是存在着一个代表其真正大小的数值，这一数值称为该被观测量的真值。设在相同的观测条件下，对该量进行了 n 次观测，其观测值为

$$L_1、L_2、\cdots\cdots、L_n$$

观测值与其观测量真值之差，称为该观测值真误差。用式子表示则为

$$\Delta_i = L_i - X \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-1}$$

观测值真误差有时简称误差，论其性质属偶然误差。前已指出，按观测顺序排列的一列偶然误差，从大小和符号上来看没有规律性，但从另外一个角度来考察，即用统计学的方法来考察，偶然误差是有规律的。为了好理解，从一个实际的例子谈起。

在某测区，共测了 817 个三角形，求得 817 个三角形闭合差。三角形闭合差，它既是三内角观测值和的真误差，论性质它又是偶然误差。把这 817 个闭合差，按绝对值的大小并以 0.5″ 为一区间列于表 1-1 内。

表 1-1

误差的区间	为负值的 Δ		为正值的 Δ	
	个数 ν	相对个数 ν/n	个数 ν	相对个数 ν/n
0.00″—0.50″	123	0.151	121	0.148
0.50 —1.00	104	0.127	90	0.110
1.00 —1.50	75	0.092	78	0.095
1.50 —2.00	55	0.067	51	0.062
2.00 —2.50	27	0.033	39	0.048
2.50 —3.00	20	0.024	15	0.018
3.00 —3.50	10	0.012	9	0.011
3.50 —∞	0	0	0	0

表 1-1 中的相对个数是指某区间正的或负的闭合差的个数与闭合差总个数的比值。例如，在区间（−0.500″,0.00″）内的闭合差为 123 个,其相对个数为 123/817＝0.151。相对个数表明,在区间（−0.500″, 0.00″）内，1000 个闭合差中可能有 151 个，100 个闭合差中可能有 15 个。

从表 1-1 可以看出，误差的分布情况有下列几点：（1）绝对值较小的误差比绝对值

较大的误差出现的个数较多；（2）绝对值相等的正误差和负误差出现的个数接近；（3）误差的绝对值有一定的限值。

实践已经证明，在大量的观测结果中，都同样具有本例的几个性质。因而，人们总结出偶然误差的四个性质为：

1. 在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值。
2. 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的可能性要大。
3. 绝对值相等的正误差和负误差出现的可能性相等。
4. 偶然误差的算术平均值，随着观测次数的无限增加而趋近于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varDelta_1+\varDelta_2+\cdots\cdots+\varDelta_n}{n}=0$$

在本书中，采用[ ]表示一列数值的代数和。与代数中的Σ符号是同一个意思。故上式一般写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\varDelta]}{n}=0 \tag{1-2}$$

表达误差分布的情况，除了采用如表 1-1 的表格形式外，还可以利用图形来表达，如图 1-1 所示。

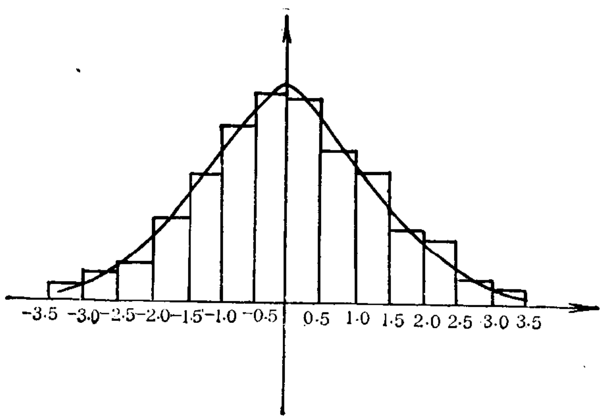

图 1-1

图 1-1 中，横坐标表示误差，纵坐标表示各区间内误差出现的相对个数除以区间的间隔值(本例误差的间隔值是0.5″)，这样，每一误差区间上的长方形面积，表示误差在该区间出现的相对个数。这图显示了偶然误差的性质。误差较小的长方形较高，其面积较大，即出现的相对个数较多，亦即出现的观测个数较多；反之，误差较大的长方形较矮，其面积较小，即出现的相对个数较少，亦即出现的观测个数较少。所有长方形基本上对称于纵坐标轴，这说明绝对值相等的正误差和负误差出现的相对个数很接近。误差的绝对值大于 3.50″ 的长方形没有，表明其面积为零，即出现的相对个数为零，亦即不会出现。还须指出，所有长方形面积之和等于 1，即出现的相对个数为 1。

如果观测的次数无限的增多，即本例观测的三角形无限的增多，把误差的区间无限的

缩小，那么，长方形则无限的变仄而其数目则无限的增多，这时，将无数长方形顶点联接起来成为一个圆滑的曲线，如图 1-1，这个曲线称为误差分布曲线。这个曲线的图象充分的表现了偶然误差的性质。

§ 1-3　最小二乘法

一、误差分布曲线

根据偶然误差的性质，可以导出误差分布曲线的一般函数式为

$$y=f(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} \tag{1-3}$$

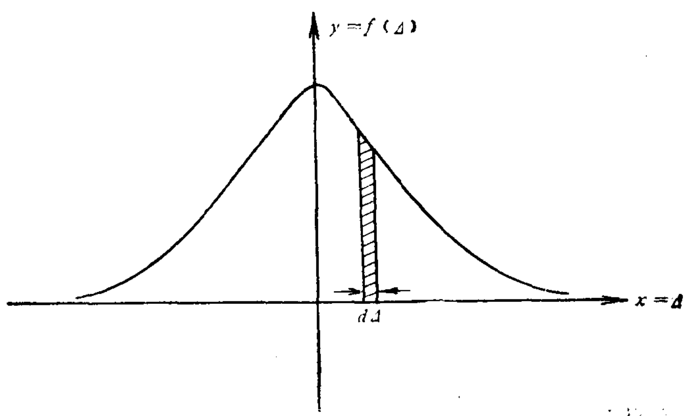

图 1-2

该函数式的图象如图 1-2。图 1-2 中区间为 $d\Delta$ 的微小长方形的面积为 $f(\Delta)d\Delta$，表示当 $n\to\infty$，$d\Delta\to 0$ 时，真误差出现在 $d\Delta$ 区间内的相对个数，而 $f(\Delta)$ 称为相对个数分布密度，简称密度函数。这里提到的相对个数，严格的说应为概率。因为相对个数是其概率的近似值。只因其容易理解，又不需要别的数学知识，故采用此名。本节试图以不涉及更多的数学知识，介绍一下最小二乘法的概念。

图 1-1 中任一长方形的面积就是真误差在区间 $d\Delta$ 出现的相对个数。所有长方形面积之和就是所有相对个数之和。从相对个数的定义知道，所有相对个数之和应恒为 1，即图 1-2 中曲线与横轴所夹的面积应恒为 1。根据这个性质，我们就会知道图 1-3 中各图的曲线与其横轴所夹面积均等于 1。

(1-3) 式中的 h 是一个与观测条件紧密相关的数。观测条件比较好，则观测质量就比较高，趋近于 0 的误差出现的密度函数就比较大，因而 h 也就比较大。反之，观测条件比较差，则观测质量就比较低，趋近于 0 的误差出现的密度函数就比较小，因而 h 也就比较小。由图 1-3a，图 1-3b 和图 1-3c 进行比较，便可以明显地看出来。

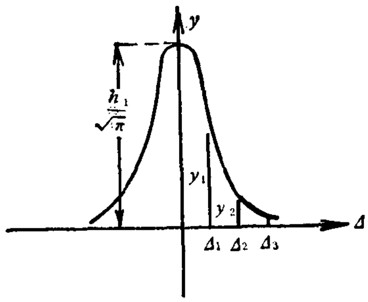

图 1-3 *a*

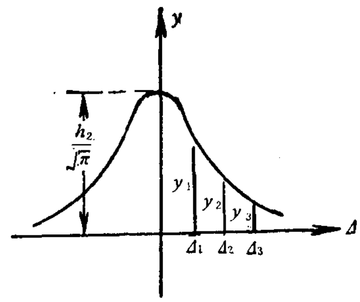

图 1-3 *b*

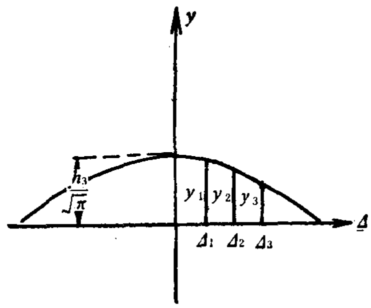

图 1-3*c*

二、最小二乘法

在不同的观测条件下测定某一未知量，得到观测值为L_1、L_2、……、L_n，这些观测值的真误差分别为Δ_1、Δ_2……、Δ_n，由（1-3）式，这些真误差出现的相对个数分布密度分别为

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \Delta_1^2} \\
y_2 &= \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \Delta_2^2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 \Delta_n^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

相对个数分布密度y_1、y_2、……y_n同时出现的相对个数分布密度应为

$$P = y_1 \cdot y_2 \cdots\cdots y_n \tag{1-5}$$

观测值与真值相比有大有小，而真误差的绝对值越大，y_1、y_2、……y_n越小，因而观测值离真值越远，（1-5）式中的P值越小。反之，真误差的绝对值越小，y_1、y_2、……y_n越大，即（1-5）式中的P值越大。将（1-4）式代入（1-5）式得

$$P = y_1 \cdot y_2 \cdots\cdots y_n$$

$$= \frac{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 \Delta_1^2 + h_2^2 \Delta_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 \Delta_n^2)} \tag{1-6}$$

如P为最大，则（1-6）式中的

$$h_1^2 \Delta_1^2 + h_2^2 \Delta_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 \Delta_n^2 = 最小 \tag{1-7}$$

在实际观测中，观测的次数不是无穷多次，而是很有限的次数，所以，根据有限次的观测值只能求得最靠近真值的值，我们称这最靠近真值的值为最或是值。设最或是值为x，其与观测值之差为

$$v_i = x - L_i \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-8}$$

v称为观测值改正数，通常简称改正数。所以将（1-7）式中的Δ_i换以v_i则为

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2 v_n^2 = 最小 \tag{1-9}$$

以h为常数，设

$$h_1^2 = p_1 h^2,\ h_2^2 = p_2 h^2,\ \cdots\cdots,\ h_n^2 = p_n h^2 \tag{1-10}$$

则（1-9）式变为

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots\cdots + p_n v_n^2 = 最小$$

或

$$[pvv] = 最小 \tag{1-11}$$

（1-10）式表明，p_i与h_i^2成正比，所以，p_i值也是表示观测值的可靠程度，故称p_i为观测值L_i的权。关于权的概念，第二章还将专门介绍。如果各观测值的可靠程度相同，则它们的权相等即$p_1 = p_2 = \cdots\cdots = p_n$，故（1-11）式变为

$$[vv] = 最小 \tag{1-12}$$

当（1-8）式中的x如为最或是值时，则（1-11）或（1-12）式必然等于最小，同时，（1-6）式的P值必然为最大值，即n个观测值同时出现的相对个数分布密度为最大。反之，当n个观测值同时出现的相对个数分布密度为最大时，则（1-11）或（1-12）式必然等于最小，因而其x必然为最或是值。所以在实际中，利用（1-11）或（1-12）式等于最小的原理，可以求出观测量的最或是值。顾名思义，这种求最或是值的方法称为最小二乘法。（1-11）或（1-12）式是测量平差的理论依据，各种平差计算公式都是据此推演出来的。

（1-1）式定义的真误差与（1-8）式定义的改正数，从形式上来看似乎不太协调，但可以避免以后出现矛盾并方便计算。如真误差按（1-1）式定义，就与求闭合差的公式一致了。如改正数按（1-8）式定义，根据改正数计算最或是值就比较方便。

§1-4 测量平差的任务

未知量是通过观测才可以获得。而观测值含有不可避免的误差是通过有多余观测才被发现。具有多余观测的一组观测值，它们之间互不相等，或不满足于某些数学理论值．我们可以根据（1-11）式的理论，求出最或是值。根据观测值求最或是值，是测量平差这门

学科的首要任务。

观测条件决定了观测质量，而观测质量的好坏，需要用数值作出评价。这是测量平差的第二个任务，是一个不可忽视的任务。