

215

TN, 11.32
G: 8

21 世纪高等学校电子信息类系列教材

《数字信号处理(第二版)》

学习指导

高西全 丁玉美 编著



A0988663

西安电子科技大学出版社

2001

内 容 简 介

本书是《数字信号处理(第二版)》(丁玉美、高西全编著)的教学配套书。书中简要归纳了《数字信号处理(第二版)》各章的基本概念、基本内容和学习要点,并对其中一些重要的定理和结论通过例题进行了较深入的讨论和证明;主要从设计方法与设计过程角度对数字滤波器设计内容进行了归纳总结,并介绍了FIR滤波器的优化设计程序,使读者较容易地学会设计各种滤波器。对各章的习题均给出详细解答,部分习题提供了2~3种解题方法,并对一些计算复杂的问题给出了MATLAB求解程序及其运行结果。本书与教材内容相互补充,既具有普通习题解答的功能,又有助于深入理解数字信号处理理论和提高解决实际问题的能力。

本书可与《数字信号处理(第二版)》配套使用,也可供高等学校相关专业学生、教师和从事数字信号处理的科技人员参考。

21世纪高等学校电子信息类系列教材

《数字信号处理(第二版)》学习指导

高西全 丁玉美 编著

责任编辑 夏大平 孙雪妹

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)8227828 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 西安文化彩印厂

版 次 2001年11月第1版 2001年11月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 16.75

字 数 399千字

印 数 1~6 000册

定 价 20.00元

ISBN 7-5606-0408-0/TN·0182

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本书封面贴有西安电子科技大学出版社的激光防伪标志,无标志者不得销售。

前 言

本书系高等学校电子信息类规划教材《数字信号处理(第二版)》(以后简称教材)的学习指导书与习题解答,可与教材配套使用,也可单独作为高等学校数字信号处理课程的教学与学习参考书。

“数字信号处理”是一门理论与实践紧密结合的学科。本科生主要学习数字信号处理的基础知识,为将来进一步深造或在工作实践中进一步研究数字信号处理理论与技术实现打好基础。做大量典型而深入的习题有助于加深理解和巩固数字信号处理的基本理论知识,有助于提高分析问题和解决实际问题的能力。但正确地求解习题是基于概念清楚及思路正确,但这一点恰恰是初学者所缺少的。所以许多初学者反映做完习题后不知道是否正确,迫切需要一本习题解答。

近年来,多所院校选用我们编写的统编教材《数字信号处理》,随着读者不断增多,向我们索要习题解答和讨论问题的读者越来越多。为了满足广大读者的需求,我们编写了本书,希望有助于读者学好“数字信号处理”课程,提高解题的能力。

本书在内容安排方面,主要考虑与教材内容互相补充。对于教材中叙述详细的内容本书只作简单归纳或直接引用,对由于篇幅所限而未能深入讨论和证明的一部分结论,本书中作为例题进行讨论解答。

所以,本书前八章中,除第二章外,每章基本上有三部分内容:

- 基本内容与学习要点归纳;
- 例题;
- 习题解答(教材中每章所有习题的详细解答)。有些题目采用几种解法,以启发读者深入思考。

考虑到教材第一、二章内容的紧密性,并且为了便于归纳总结,我们这里将两章内容合并提出学习要点及例题,并放至第一章。第二章仅给出教材第二章习题解答。

本书中所选例题是对教材内容及习题的补充和提高,对数字信号处理的一些问题进行了更深入的讨论,以提高读者分析问题和解决问题的能力。部分例题还给出了实际工程中考虑问题的观点与方法。对一些手算很困难的问题给出了用 MATLAB 工具箱函数计算的程序及其运行结果,以便读者了解这一现代化软件工具及其使用方法。

第九章编写了四份综合自测题,仅供读者学习时进行自我检查,但读者不能将自测题看作各种考试的模拟题。

第十章给出教材中四个实验的 MATLAB 实验程序和 C 语言 FFT 子程序,供读者上机实验时参考。附录中分类列出 MATLAB 信号处理工具箱函数,以便读者查阅,其详细说明可通过帮助(Help)命令得到。

本书主要作为初学者学习“数字信号处理”课程的学习参考书。学习过程中最好先独立求解习题,再对照习题解答纠正错误的概念和解法,在做题过程中得到训练和提高,锻炼

独立解决问题的能力。这样就达到了我们写这本书的目的。该书也可作为“数字信号处理”任课教师和科技人员的参考书。

为了使读者阅读方便，对公式、表、图的引用不易产生误解，本书公式、图、表序号采用两段数码表达，如图 1.1。教材采用三段，如图 1.2.1。

本书第一、二、五章习题解答、第九章由丁玉美编写，其余章节由高西全编写。研究生田毅珂和薛富国提供了实验程序，在此表示感谢。编写过程中参阅了许多参考书，这里谨向所有作者表示诚挚的谢意。

西安电子科技大学出版社的夏大平同志对本书进行了细致的编辑，并提出了有益的建议，在此深表谢意！

由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

作者

2001 年 2 月

第一章

时域离散信号与系统理论分析基础

本章 1.1 节“学习要点”和 1.2 节“例题”部分的内容对应教材第一、二章内容。

为了便于归纳总结，我们将《数字信号处理(第二版)》教材中第一章和第二章的内容合在一起叙述，这样使读者对时域离散线性时不变系统的描述与分析方法建立一个完整的概念，以便在分析和解决问题时，能全面考虑各种有效途径，选择最好的解决方案。

基础知识往往是最重要的，各种实际的应用技术都是基于相应的理论基础。本书中滤波器分析、设计与实现方法，均是基于第一、二、三、四章的数字信号处理理论基础。但第三、四章的 DFT 及 FFT 讲述离散化频域的数字信号处理原理，所以本书只将第一、二章合在一起归纳总结。

第一、二章的内容可归纳为：① 时域离散信号；② 时域离散信号的两种变换(FT 和 ZT)；③ 时域离散线性时不变系统的描述与分析(时域和频域)。

在《数字信号处理(第二版)》教材中，用绝大部分篇幅讨论时域离散线性时不变系统的分析、设计与实现。这是由于时域离散线性时不变系统的理论较成熟，便于讲解，而数字系统则不然。数字系统实际上是时域离散线性时不变系统系数量化的结果。也就是说，考虑了时域离散系统系数量化效应之后，就得到相应的数字系统的性能。有限字长效应(即量化误差)分析理论比较成熟，所以，按这种结构形式学习数字信号处理是合理的。特别是现代数字系统(如 DSP)的字长越来越长，处理精度越来越高(16 位，32 位，64 位等)，这时，如果忽略系数量化误差，则可认为时域离散系统与数字系统就无差别了。

1.1 学习要点

1.1.1 时域离散信号——序列

时域离散信号(以下简称序列)是时域离散系统处理的对象，研究时域离散系统离不开序列。例如，在时域离散线性时不变系统的时域描述中，系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 就是系统对单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的响应输出序列。掌握 $\delta(n)$ 的时域和频域特性，对分析讨论系统的时域特性描述函数 $h(n)$ 和频域特性描述函数 $H(e^{j\omega})$ 和 $H(z)$ 是必不可少的。

1. 序列的概念

在数字信号处理中，一般用 $x(n)$ 表示时域离散信号(序列)。 $x(n)$ 可看作对模拟信号 $x_a(t)$ 的采样，即 $x(n) = x_a(nT)$ ，也可以看作一组有序的数据集合。

要点 在数字信号处理中，序列 $x(n)$ 是一个离散函数， n 为整数，如图 1.1 所示。当 $n \neq$ 整数时，

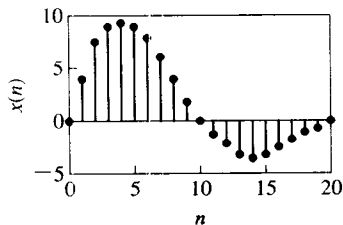


图 1.1 序列 $x(n)$ 图示方法

$x(n)$ 无定义,但不能理解为零。当 $x(n)=x_a(nT)$ 时,这一点容易理解。当 n =整数时, $x(n)=x_a(nT)$,为 $x_a(t)$ 在 $t=nT$ 时刻的采样值,非整数倍 T 时刻未采样,而并非为零。在学习连续信号的采样与恢复时会看到, $x(n)$ 经过低通滤波后,相邻的 $nT\sim(n+1)T$ 之间的 $x_a(t)$ 的值就得到恢复。

例如, $x(n)$ 为一序列,取 $y(n)=x(n/2)$, n 为整数是不正确的,因为当 n =奇数时, $y(n)$ 无定义(无确定的值)。

2. 常用序列

为了学习后面的内容,必须熟悉一些常用序列,以便讨论其傅里叶变换和 Z 变换及其基本性质等。常用序列有六种:①单位脉冲序列 $\delta(n)$,②矩形序列 $R_N(n)$,③指数序列 $a^n u(n)$,④正弦序列 $\cos(\omega n)$ 、 $\sin(\omega n)$,⑤复指数序列 $e^{j\omega n}$,⑥周期序列。由于前三种序列非常简单,而后面三种与相应的模拟信号的特点大不相同,所以下面仅对后三种序列的定义及特点进行小结。

1) 正弦序列和复指数序列

正弦序列指 $\cos(\omega n)$ 和 $\sin(\omega n)$ 。复指数序列指 $e^{j\omega n}=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n)$,其实部和虚部为正弦序列。由此可见,正弦序列和复指数序列的特性相同,所以放在一起讨论。

ω 为数字域频率,单位为弧度,表示两个相邻 n 之间正弦序列的相位、复指数序列的相角的变化量,所以 ω 表示正弦序列的变化快慢。如果将 $x(n)=\cos(\omega n)$ 看作对连续正弦信号 $x_a(t)=\cos(\Omega t)$ 的等间隔采样,即

$$x(n)=\cos(\omega n)=x_a(nT)=\cos(\Omega nT)$$

则 $\omega=\Omega T$,数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 成线性关系, Ω 的单位为rad/s,所以 ω 的单位应为rad(采样间隔 T 以秒为单位), ω 表示在一个采样间隔 T 上正弦波相位的变化量。

要点 正弦序列 $\cos(\omega n)$ 与模拟正弦信号 $\cos(\Omega t)$ 的唯一不同点为 n 只能取离散整数,且无量纲,而 t 为连续时间变量,以秒为单位。由此不同点引起正弦序列随 ω 的变化规律与连续正弦函数随 Ω 的变化规律有很大差别,这一点造成数字滤波器频域特性与模拟滤波器的频域特性也有很大差别(见滤波器设计)。

(1) $e^{j\omega n}=e^{j(\omega+2\pi m)n}$, $\cos(\omega n)=\cos((\omega+2\pi m)n)$,但是, $e^{j\Omega t}\neq e^{j(\Omega+2\pi m)t}$, $\cos(\Omega t)\neq\cos((\Omega+2\pi m)t)$ 。正弦序列和复指数序列对 ω 变化呈以 2π 为周期,所以,在数字频域考虑问题时,取数字频率的主值区: $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$,前者用于时域离散信号与系统的傅里叶分析中,而后者适用于离散傅里叶变换(DFT)。

(2) 当 $\omega=0$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最慢(不变化);当 $\omega=\pi$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最快。所以在序列的频谱分析和数字滤波器描述中,在主值区上,将 $\omega=0$ 附近称为数字低频,而将 $\omega=\pi$ 附近称为数字高频。容易证明,当满足时域采样定理($1/T\geq 2f_c$)时,模拟信号的最高频率 f_c 对应的数字频率 $\omega_c=2\pi f_c T\leq\pi$ 。当取奈奎斯特采样速率 $f_s=2f_c$ 时, $\omega_c=2\pi f_c T=2\pi f_c/f_s=\pi$ 。

这一特点与模拟正弦信号 $x_a(t)=\cos(\Omega t)$ 截然不同, Ω 越大, $\cos(\Omega t)$ 变化越快,其原因是 t 连续取值,而 n 只取整数。

(3) 由以上两点可以推知,数字滤波器(时域离散系统)的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 必须以 2π 为周期。后面会证明,频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 就是对激励信号 $e^{j\omega n}$ 的响应加权函数,即

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y(n) = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

已知 $e^{j(\omega_0 - 2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n}$, 所以, 如果 $H(e^{j(\omega_0 + 2\pi m)}) \neq H(e^{j\omega_0})$, 即系统对 $e^{j(\omega_0 + 2\pi m)n}$ 的响应输出与系统对 $e^{j\omega_0 n}$ 的响应不相同, 产生物理矛盾: “同一系统对相同的激励信号的响应不同。”

2) 周期序列

如果 $x(n) = x(n + mN)$, m 和 N 为整数, $N > 0$, 则称 $x(n)$ 为周期序列, 周期为 N , 记为 $\tilde{x}_N(n)$ 。

周期序列的定义只有一点与模拟周期信号定义不同, 即周期序列的自变量 n 和周期 N 只能取整数。正是这一区别, 使得某些模拟周期信号, 离散化后就不一定是周期序列。

例如, $e^{j\Omega_0 t}$ 一定是周期函数, 周期 $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, 而 $e^{j\omega n}$ 是否是周期序列, 取决于数字频率的取值。为了说明这个问题, 我们假设 $e^{j\omega n}$ 以 N 为周期, 导出 $e^{j\omega n}$ 为周期序列的条件。

由以上假设及周期序列的定义可知, $e^{j\omega n}$ 应满足

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+kN)}, \quad k \text{ 和 } N \text{ 为整数, } N > 0$$

所以必须满足

$$\omega k N = 2\pi m, \quad m \text{ 为整数}$$

当 $k=1$ 时, $\omega N = 2\pi m$ 。所以, 只有当 $N/m = 2\pi/\omega$ 为有理数时, N 和 m 才有整数解, $e^{j\omega n}$ 才是周期序列。此时只要将 $2\pi/\omega$ 化成最简分数(分子分母化为整数), 则分子就是周期 N 。

例如, $x_1(n) = \cos((\pi/7)n)$, $x_2(n) = \cos(n/7)$ 。对 $x_1(n)$, $\omega = \pi/7$, $2\pi/\omega = 2\pi/(\pi/7) = 14$, 所以 $x_1(n)$ 为周期序列, 周期 $N_1 = 14$; 对 $x_2(n)$, $\omega = 1/7$, $N_2/m = 2\pi/\omega = 2\pi/(1/7) = 14\pi$, 为无理数, 即 N_2 和 m 无整数解, 所以 $x_2(n)$ 不是周期序列。因此, 正弦序列和复指数序列不一定是周期序列, 当 $\omega = a\pi$ (a 为有理数) 时, 它们一定是周期序列。

1.1.2 序列的傅里叶变换(FT)

1. 序列傅里叶变换定义

以下两式:

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} & (1.1) \\ x(n) = \text{IFT}[X(e^{j\omega})] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega & (1.2) \end{cases}$$

称为傅里叶变换对。

$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$ 存在的条件为^[1]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.3)$$

2. 周期序列的傅里叶变换

周期序列不满足(1.3)式, 但为了将傅里叶变换分析法用于周期信号, 引入奇异函数 $\delta(\omega)$, 可定义周期序列的傅里叶变换。

设 $\tilde{x}_N(n)$ 表示以 N 为周期的周期序列, 则其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}_N(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_N(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (1.4)$$

其中, $\delta(\omega)$ 为单位冲激函数, $\tilde{X}_N(k)$ 称为 $\tilde{x}_N(n)$ 的离散傅里叶级数(DFS)系数, 计算公式为

$$\tilde{X}_N(k) = \sum_{\langle n \rangle} \tilde{x}_N(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1.5)$$

其中, $\sum_{\langle n \rangle}$ 表示在任意一个周期区间上求和。 $\tilde{X}_N(k)$ 也是以 N 为周期。

由于 $\tilde{x}_N(n)$ 不满足(1.3)式, 因此按(1.1)式不能直接计算出 $\text{FT}[\tilde{x}_N(n)]$ 。所以, 对周期序列进行傅里叶变换时, 应先按式(1.5)求得 $\tilde{X}_N(k)$, 再套用(1.4)式得到 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}_N(n)]$ 。

3. 序列的傅里叶变换具有唯一性

序列的傅里叶变换具有的唯一性可用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow{1-1} x(n)$$

4. 傅里叶变换的基本性质

序列傅里叶变换的基本性质列于表 1.1 中。下面仅对非常重要的共轭对称性进行小结, 以便读者掌握。

表 1.1 序列傅里叶变换的基本性质

序列	傅里叶变换
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$
$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$, a, b 为常数
$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{-j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
$nx(n)$	$j[dX(e^{j\omega})/d\omega]$
$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$
$j \text{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_r(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_i(n)$	$j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	
$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_N(k) ^2$	

序列傅里叶变换的共轭对称性的基本内容有如下两种情况:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + jX_o(e^{j\omega}) \end{array} \quad (1.6)$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} x(n) = x_e(n) + x_o(n) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \end{array} \quad (1.7)$$

式中, 符号 \leftrightarrow 表示两端为傅里叶变换关系, $x_r(n) = \text{Re}[x(n)]$ 为 $x(n)$ 的实部, $x_i(n) = \text{Im}[x(n)]$ 为 $x(n)$ 的虚部, $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ 和 $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$ 分别表示 $x(n)$ 的共轭对称序列和共轭反对称序列; $X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$, $X_I(e^{j\omega}) = \text{Im}[X(e^{j\omega})]$; $X_e(e^{j\omega}) = [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j(-\omega)})]/2$ 和 $X_o(e^{j\omega}) = [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j(-\omega)})]/2$ 分别表示 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称函数和共轭反对称函数。

共轭对称函数 $f_e(x)$ 和共轭反对称函数 $f_o(x)$ 分别定义为满足如下关系式的函数:

$$f_e(x) = f_e^*(-x)$$

$$f_o(x) = -f_o^*(-x)$$

式(1.6)和(1.7)完全为时域和频域的对偶关系: (1.6)式将时域 $x(n)$ 写成实部与虚部之和, 频谱 $X(e^{j\omega})$ 写成共轭对称分量与共轭反对称分量之和; 而(1.7)式将时域 $x(n)$ 写成共轭对称分量与共轭反对称分量之和, 频谱 $X(e^{j\omega})$ 写成实部与虚部之和。所以很容易记忆。

这里特别提请读者注意, 实序列傅里叶变换的共轭对称性可由(1.6)式和(1.7)式得出, 不用死记硬背。

$x(n)$ 可分为以下 4 种情况:

(1) $x(n)$ 为实序列, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 可得到 $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega})$ 为共轭对称函数, 即 $X(e^{j\omega})$ 满足

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j(-\omega)})$$

(2) 若 $x(n)$ 为实偶序列, 即 $x(n) = x(-n)$, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 及(1.7)式中 $x_o(n) = 0$ 可知, $X(e^{j\omega})$ 为实偶函数, 即

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(-\omega)})$$

(3) 若 $x(n)$ 为实奇序列, 即 $x(n) = -x(-n)$, 则由(1.6)式中 $x_i(n) = 0$ 及(1.7)式中 $x_e(n) = 0$ 可知, $X(e^{j\omega})$ 为纯虚奇对称函数, 即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j(-\omega)}) = -X(e^{j(-\omega)})$$

(4) 若 $x(n)$ 为实因果序列, 且 $x(n)$ 表示为

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

则

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), & n > 0 \\ x_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

或
$$x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), & n > 0 \\ x(0), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

所以说,对实因果序列,只要知道 $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$,则可求得 $x(n)$ 及 $X(e^{j\omega})=\text{FT}[x(n)]$,过程如下:

已知

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{FT}[x_e(n)] \xrightarrow{\text{IFT}} x_e(n) \xrightarrow{(1.8)} x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

只要已知 $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ 和 $x(0)$,则

$$j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \xrightarrow{\text{IFT}} x_o(n) \xrightarrow{(1.9)} x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

由上述可见,对实因果序列 $x(n)$,其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的实部包含了 $X(e^{j\omega})$ 或 $x(n)$ 的全部信息,即 $X(e^{j\omega})$ 中有冗余信息。

1.1.3 序列的 Z 变换(ZT)

1. Z 变换定义

Z 变换定义如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(z) = \text{ZT}[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n) = \text{IZT}[X(z)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz \end{array} \right. \quad (1.11)$$

其中, c 是一条在 $X(z)$ 的收敛域上,并包含原点的逆时针闭合围线。显然,如果不知道 $X(z)$ 的收敛域,则 c 不能确定, $\text{IZT}[X(z)]$ 则无法计算。由此可看出 Z 变换的收敛域的重要性。

2. $X(z)=\text{ZT}[x(n)]$ 存在的条件与 $X(z)$ 的收敛域

Z 变换存在的条件指能使 $|X(z)| < \infty$ 的条件。为了讨论方便,将 z 写成极坐标形式

$$z = re^{j\omega}, \quad r = |z|, \quad \omega = \arg[z]$$

则

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$$

Z 变换存在的条件为

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

即 $X(z)$ 存在的充分条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty \quad (1.12)$$

$X(z)$ 存在的条件比 $X(e^{j\omega})$ 存在的条件宽得多。只要 $|x(n)|$ 的增长速度小于 r^n ,则 $\text{ZT}[x(n)]$ 就存在。

$X(z)=\text{ZT}[x(n)]$ 的收敛域定义为满足(1.12)式的 r 的取值域。换言之,使 $|X(z)| < \infty$ 的 $|z|$ 的取值域称为 $X(z)$ 的收敛域。显然, $X(z)$ 的收敛域与 $x(n)$ 有关。

要点 $x(n) \xrightarrow{1-1} [X(z), \text{收敛域}]$,也就是说,对一个确定的 $x(n)$,其 Z 变换 $X(z)$ 的

表达式及其收敛域是一个整体,二者共同唯一确定 $x(n)$ 。

例如:

$$(1) \quad x_1(n) = a^n u(n)$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$(2) \quad x_2(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

这两个序列截然不同,但 $X_1(z)$ 与 $X_2(z)$ 表达式完全相同,只能靠收敛域的区别来唯一确定 $X_1(z)$ 与 $X_2(z)$ 的 IZT。

3. 典型序列 Z 变换的收敛域

(1) 双边序列的 Z 变换收敛域为一环域,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_- < |z| < R_+$$

(2) 因果序列的 Z 变换收敛域为某圆外,包括无穷远处,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_- < |z| \leq \infty$$

双边序列和因果序列是时域离散线性非移变系统分析与设计中最常用的序列,在 IZT 的计算中,以上概念很有用。其它类型的序列,根据具体情况,确定其 Z 变换的收敛域。

4. 逆 Z 变换 (IZT) 的计算

逆 Z 变换的计算方法有幂级数法(长除法),部分分式法和留数法^[1]。下面仅对较通用的留数法进行介绍。

IZT $[X(z)]$ 的原始计算公式为(1.11)式的围线积分

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz$$

可根据留数定理计算该围线积分。为了方便,令 $F(z) = X(z)z^{n-1}$, 并设

$\{a_k\}$ —— $F(z)$ 在 c 内的极点集

$\{b_k\}$ —— $F(z)$ 在 c 外的极点集

$$\text{则} \quad x(n) = \sum_k \text{Res}[F(z), a_k] \quad (1.13)$$

$$\text{或} \quad x(n) = - \sum_k \text{Res}[F(z), b_k] \quad (1.14)$$

使用(1.14)式的条件为 $n \leq N - M - 1$, 其中 N 和 M 分别为 $X(z)$ 的分母和分子(z 的正次幂)多项式的次数。 $\text{Res}[F(z), z_k]$ 表示 $F(z)$ 在极点 z_k 处的留数。

(1.13)和(1.14)式说明, $x(n) = \text{IZT}[X(z)]$ 等于 $F(z)$ 在 c 内的所有极点的留数之和,或等于 $F(z)$ 在 c 外的所有极点的留数之和并取负号。

留数计算公式:

将 $F(z)$ 化为 z 的正次幂有理分式, 设 z_0 为 $F(z)$ 的一个 m 阶极点, 则 $F(z)$ 可表示成

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \psi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 处无极点}$$

$$\text{Res}[F(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}\psi(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z=z_0} \quad (1.15)$$

当 $m=1$ 时

$$\text{Res}[F(z), z_0] = \psi(z)|_{z=z_0} = F(z)(z-z_0)|_{z=z_0} \quad (1.16)$$

由此可见,一阶极点的留数计算非常简单。而数字信号处理课程中,大多数情况下为一阶极点。

5. Z 变换的主要性质与定理

为了便于读者查阅,将 Z 变换的主要性质与定理列在表 1.2 中,表中,

$$X(z) = ZT[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)], \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

表 1.2 Z 变换的主要性质与定理

序号	名称	性质与定理内容	备注
1	线性	$ZT[ax(n)+by(n)] = aX(z)+bY(z),$ $R_- < z < R_+$	$R_- = \max[R_{x-}, R_{y-}]$ $R_+ = \min[R_{x+}, R_{y+}]$
2	时域移位	$ZT[X(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z), R_{x-} < z < R_{x+}$	对某些特殊序列,收敛域有变化
3	乘指数序列	$ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), a R_{x-} < z < a R_{x+}$	
4	序列乘 n	$ZT[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, R_{x-} < z < R_{x+}$	
5	初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	$x(n)$ 为因果序列
6	终值定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	$x(n)$ 为因果序列 $X(z)$ 的极点,除一个可以在单位圆上外,其余全位于单位圆内
7	时域卷积定理	$ZT[x(n) * y(n)] = X(z) \cdot Y(z), R_- < z < R_+$	R_- 和 R_+ 同 1

6. 傅里叶变换与 Z 变换的关系

比较 $X(e^{j\omega})$ 与 $X(z)$ 的定义公式:

$$X(z) = ZT[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

容易得到二者的关系为

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.17)$$

这说明,序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的取值。即傅里叶变换是 Z 变换的特例($z=e^{j\omega}$)。只有当 $X(z)$ 的收敛域包含单位圆时, $x(n)$ 才存在傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

1.1.4 时域离散线性时不变系统的描述与分析

1. 系统模型

时域离散系统可以用图 1.2 表示。

$$y(n) = T[x(n)]$$

$T[\cdot]$ 表示系统对输入信号的处理变换函数, 这种变换函数可以是线性时不变的, 也可以是非线性时不变、线性时变或非线性时变的。对于线性时不变系统, $T[\cdot]$ 应满足以下约束条件:

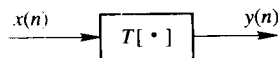


图 1.2 时域离散系统模型

(1) $T[\cdot]$ 具有线性特性。即满足齐次性和可加性, 其数学描述如下:

如果

$$T[x_1(n)] = y_1(n), \quad T[x_2(n)] = y_2(n)$$

则

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

其中 a 和 b 为常数。

(2) $T[\cdot]$ 具有时不变性。

如果

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

系统对输入信号的处理特性不随时间变化。

2. 时域离散线性时不变系统的描述

时域离散线性时不变系统可以在时域或频域描述。

(1) 时域描述:

① 单位脉冲响应序列: $h(n) = T[\delta(n)]$ 表示系统对 $\delta(n)$ 的响应输出, 它可以由输出输入信号联系起来 ($y(n) = h(n) * x(n)$), 所以可用 $h(n)$ 表示系统对输入信号的处理功能。

② 差分方程:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

实质上, 系统特性完全由差分方程的系数决定。由于讨论的是线性时不变系统, 所以 a_k 和 b_k 均为常数 (不随 n 变化)。

(2) 频域描述:

① 系统函数

$$H(z) = ZT[h(n)] = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1.18)$$

② 频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 在数字滤波器设计中有很重要的作用(见第五、六、七章)。 $H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 也可以由系统差分方程求得。

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\left(1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}\right)} \quad (1.19)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.20)$$

显然, $H(z)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 完全由系数 a_k 和 b_k 确定, 而与输入和输出信号无关。在第五章中会看到, 系统的一种实现网络结构直接由 a_k 和 b_k 确定。

(3) 系统频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 的特点。因为 $H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)]$, 所以, $H(e^{j\omega})$ 的特点就是序列傅里叶变换(即序列频谱)的特点。为了不重复叙述, 将二者放在一起讨论。

① $H(e^{j\omega})$ 一般为复函数, 所以常表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.21)$$

$|H(e^{j\omega})|$ ——幅频特性函数, 表示系统对输入序列 $e^{j\omega n}$ 的增益。

$\theta(\omega)$ ——相频特性函数, 表示系统对 $e^{j\omega n}$ 的相角(复角)的改变量。

如果 $h(n)$ 为实序列, 则

$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{j(-\omega)})|$, 即 $|H(e^{j\omega})|$ 为偶函数;

$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$, 即 $\theta(\omega)$ 为奇函数。

② $H(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期。这一特点与模拟滤波器大相径庭, 所以要特别注意。

③ 低通滤波器的通带以 $\omega = 2\pi k$ 为中心, 高通滤波器则以 $\omega = (2k+1)\pi$ 为通带中心。物理解释是: $\omega = 2\pi k$ 附近, $\cos(\omega n)$ 变化很慢, 可称为低频正弦序列, 而 $\omega = (2k+1)\pi$ 附近, $\cos(\omega n)$ 变化很快, 可称为高频正弦序列(k 为整数)。

3. 时域离散线性时不变系统的输入/输出关系

时域离散线性时不变系统的每一种描述函数($h(n)$, $H(z)$, $H(e^{j\omega})$)都是其输入到输出的变换函数。

(1) 时域:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.22)$$

或

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a_k, b_k \text{ 为常数}$$

(2) 频域:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \quad (1.23)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \quad (1.24)$$

应当特别注意, 以上对时域离散线性时不变系统的描述及 I/O 关系, 不能用于非线性及时变系统, 因为这些关系公式只有对线性时不变系统才能推导出。例如, 输入/输出关系(1.22)式推导过程如下:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \\
 y(n) &= T[x(n)] \\
 &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{根据线性性质} \\ \text{根据非移变性} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot T[\delta(n-m)] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\
 &= x(n) * h(n)
 \end{aligned}$$

如果不满足线性时不变条件, 则如上卷积关系(1.22)式是推导不出来的。

(3) 序列卷积的计算方法: 此内容在教材中和第一章习题解答中都较详细地进行了介绍, 这里不再重复。

4. 时域离散线性时不变系统的稳定性及因果性判断

(1) 时域:

稳定条件:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad h(n) \text{ 为系统单位脉冲响应(下同)}$$

因果系统定义: 系统输出变化不会发生在输入变化之前。该定义等价于因果系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 为因果序列, 即当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$ (证明见例 1.5)。

因果稳定条件:

$$\begin{cases} h(n) = 0, n < 0, & \text{因果条件} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, & \text{稳定条件} \end{cases}$$

(2) z 域:

稳定条件: $H(z) = ZT[h(n)]$ 的收敛域包含单位圆。

因果稳定条件: $H(z)$ 的所有极点全部在单位圆内。

实质上, 时域条件和频域条件是完全统一的。当 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆时, (1.12) 式对 $r=1$ 成立, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, 这正是时域稳定条件。当 $H(z)$ 的所有极点均在单位圆内时, $H(z)$ 的收敛域必然为 $R_- < |z|$, 且 $R_- < 1$, 所以必有 $h(n) = IZT[H(z)]$ 为一因果序列, 且 $h(n)$ 存在傅里叶变换。故 $h(n)$ 满足

$$\begin{cases} h(n) = 0, & n < 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

这正是系统因果稳定的时域条件。在滤波器分析设计中, z 域因果稳定条件用得较多。

5. 系统函数 $H(z)$ 的极、零点与系统幅频特性函数 $|H(e^{j\omega})|$

一般情况下, $H(z)$ 可表示为有理分式形式

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = Az^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \quad (1.25)$$

其中, c_k 为 $H(z)$ 的零点, d_k 为 $H(z)$ 的极点。当 $N > M$ 时, $H(z)$ 在原点有 $(N-M)$ 阶零点, 当 $N < M$ 时, $H(z)$ 在原点有 $(M-N)$ 阶极点。

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - c_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

为了叙述方便, 令 $B = e^{j\omega}$, $c_k B = B - c_k$ 为第 k 个零点矢量, $d_k B = B - d_k$ 为第 k 个极点矢量。由于 B 是随数字频率 ω 旋转的矢量, 所以 $c_k B$ 和 $d_k B$ 也是随 ω 变化的矢量。代入以上符号, $H(e^{j\omega})$ 可以写成如下形式(令 $A=1$):

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M c_k B}{\prod_{k=1}^N d_k B} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

所以

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{k=1}^M |c_k B|}{\prod_{k=1}^N |d_k B|} = \frac{H(z) \text{ 的所有零点矢量模之积}}{H(z) \text{ 的所有极点矢量模之积}} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M \arg[c_k B] - \sum_{k=1}^N \arg[d_k B] \\ &= \omega(N-M) + (H(z) \text{ 的所有零点矢量相角之和}) \\ &\quad - (H(z) \text{ 的所有极点矢量相角之和}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

例如, 当 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$ 时, $H(z)$ 的零点 $c_1=0$, $c_2=-1$, 极点 $d_1=0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$, $d_2=0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}$ 。 $H(z)$ 的零点和极点位置如图 1.3(a) 所示, $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 1.3(b) 所示。

由图可见, $|H(e^{j\omega})|$ 曲线截止特性不好, 通带中心 $\omega=0$ 处衰减较大。为了改善通带平稳性, 再加一个极点 $d_3=0.5$, 为了使截止特性变陡些, 加入零点 $c_3=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$, $c_4=e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$, 这时 $H(z)$ 为

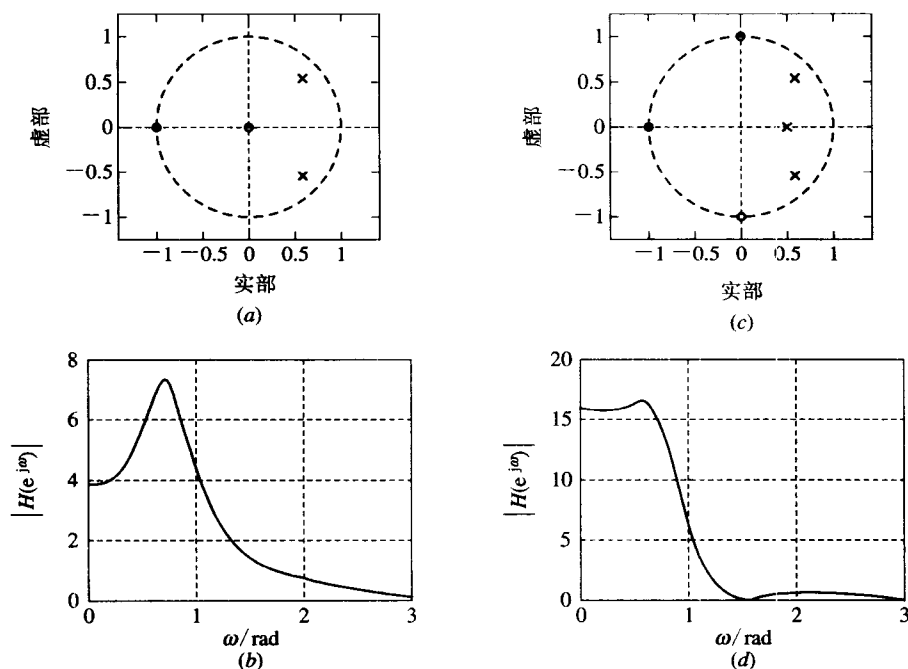
$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})(1-jz^{-1})(1+jz^{-1})}{(1-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

改进后的 $H(z)$ 零、极点位置和 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线如图 1.3(c) 和 (d) 所示。

综上所述, 关于 $H(z)$ 的零、极点对 $|H(e^{j\omega})|$ 的贡献, 可得出如下结论:

(1) 位于原点的零点和极点不影响 $|H(e^{j\omega})|$, 只影响 $\theta(\omega)$ 。因为位于原点的零点矢量(或极点矢量)的模恒为 1, 不随 ω 变化。

(2) 单位圆附近的零点 $c_k = |c_k| e^{j\arg[c_k]}$ 对应的零点矢量的模 $|c_k B|$ 在 $\omega = \arg[c_k]$ 时为最

图 1.3 $H(z)$ 的零、极点分布及 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线

(a) 零、极点图; (b) 幅频特性; (c) 改进后的零、极点图; (d) 改进后的幅频特性

短, 使(1.26)式表示的 $|H(e^{j\omega})|$ 的分子变小, 即 $|H(e^{j\omega})|$ 在 $\omega = \arg[c_k]$ 频点形成波谷。而且, c_k 越靠近单位圆, 波谷就越低, 单位圆上的零点形成 $|H(e^{j\omega})|$ 的零点。

(3) 同理, 单位圆附近的极点 $d_k = |d_k|e^{j\arg[d_k]}$ 在 $\omega = \arg[d_k]$ 频点形成 $|H(e^{j\omega})|$ 的波峰, 且极点愈靠近单位圆, 波峰越尖锐(选择性越好)。但极点不能位于单位圆上, 否则系统不稳定。

请读者将图 1.3(a) 中的零点和极点沿径向移动以改变其到单位圆的距离, 并画出相应幅频特性, 验证以上结论。

根据以上结论, 对低阶 $H(z)$, 可根据 $H(z)$ 的零、极点位置, 定性画出 $|H(e^{j\omega})|$ 曲线; 也可以由此概念, 通过设置适当的零、极点, 设计要求不高的简单数字滤波器, 即所谓的零、极点累试设计法。

1.1.5 模拟信号的采样与恢复

在信号处理领域, 一般将信号分为三大类: ① 模拟信号(连续信号); ② 时域离散信号; ③ 数字信号。每一类信号又有一维、二维、三维和 multidimensional 信号。本书只讨论一维信号分析与处理, 在通信与信号处理中, 一维信号一般为时间 t 的函数, 连续信号是其幅度和时间都连续的信号, 记为 $x_a(t)$; 时域离散信号是时间上离散, 幅度取值仍连续的信号, 记为 $x(n)$, 简称为序列, $x(n)$ 可看作 $x_a(t)$ 的时域采样: $x(n) = x_a(nT)$, T 为采样周期, 数字信号是一种时间上和幅度上都离散化的信号, 记为 $x_d(n)$, $x_d(n)$ 可看成对 $x(n)$ 的幅度量化的结果。数字信号的最大优点是其幅度可用有限位二进制数来表示, 由于时间上也是离散