

高等学校工程专科教材

概率与数理统计

常柏林 卢静芳 李效羽 编

高等教育出版社



(京) 112 号

高等学校工程专科教材

概率与数理统计

常柏林 卢静芳 李效羽 编

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8.25 字数 210 000

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数 0001 — 15 199

ISBN7-04-004156-1/O · 1199

定价 3.25 元

前 言

为了适应高等工程专科学校培养应用性人才的需要,改变专科照搬本科教材的现状,提高高等工程专科数学教学质量,我们在国家教委高教司的领导下,在全国高等工程专科数学教材编审组的组织下,在高等教育出版社的指导下,根据高等学校工程专科概率与数理统计课程的教学基本要求,编写了本教材。

本书在结构体系,内容安排、习题选择等方面努力体现专科特色,力求贯彻以应用为目的、以必需够用为度的原则,注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养,注意讲清概念、减少数理论证和加强理论与实践的联系。

本教材实际授课时数为 38 ~ 50。

参加本书编写工作的有常柏林(盐城工业专科学校副教授),卢静芳(长春建筑高等专科学校副教授),李效羽(湖南计算机专科学校副教授),最后由常柏林统稿定稿。

本书由湖南省数学学会副理事长、中南工业大学蔡海涛教授担任主审,参加审稿的还有肖必泉(厦门大学)、夏浩然(长沙有色金属专科学校)、梅顺治(武汉河运专科学校)等同志。苏永法(南京机械专科学校)、邢文斗(沈阳工业高等专科学校)、章平(南京交通高等专科学校)、钱翼文(上海轻工业高等专科学校)、彭延铭(上海冶金高等专科学校)、樊启宙(南昌水利水电专科学校)、郑吉富(重庆钢铁专科学校)、谭玉明(新疆煤炭专科学校)等同志对本书的编写给予了热情的帮助和支持。对此,我们表示

衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中一定存在着不少缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

1992年4月

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
第一节 随机事件	(1)
一、随机试验与随机事件	(1)
二、基本事件与样本空间	(2)
三、事件的关系与运算	(4)
第二节 事件的概率	(8)
一、概率的统计定义	(8)
二、古典概型	(10)
第三节 条件概率	(13)
一、条件概率	(13)
二、乘法公式	(15)
三、全概率公式	(16)
*四、贝叶斯(Bayes)公式	(18)
第四节 事件的独立性	(19)
一、两个事件的独立性	(19)
二、多个事件的独立性	(20)
习题一	(23)
第二章 随机变量及其概率分布	(26)
第一节 离散型随机变量及其分布律	(26)
一、随机变量	(26)
二、离散型随机变量	(28)
三、二点分布	(30)
四、二项分布	(31)
五、泊松分布	(34)
第二节 连续型随机变量及其概率密度	(38)
一、连续型随机变量	(38)

二、均匀分布	(41)
*三、指数分布	(42)
第三节 随机变量的分布函数与随机变量函数的分布	(43)
一、分布函数	(43)
二、随机变量函数的分布	(47)
第四节 正态分布	(50)
一、正态分布的定义及其性质	(50)
二、正态分布的概率计算	(53)
三、正态变量的函数	(55)
习题二	(57)
第三章 二维随机变量及其分布	(61)
第一节 二维随机变量及其联合分布	(61)
一、二维随机变量	(61)
*二、二维离散型随机变量	(63)
三、二维连续型随机变量	(64)
第二节 边缘分布与独立性	(69)
一、二维连续型随机变量的边缘密度	(69)
二、随机变量的独立性	(72)
*第三节 两个随机变量的函数的分布	(74)
习题三	(78)
第四章 随机变量的数字特征	(80)
第一节 数学期望	(80)
一、数学期望的定义	(80)
二、随机变量函数的数学期望	(83)
三、数学期望的性质	(86)
四、常用分布的数学期望	(89)
第二节 方差	(92)
一、方差的定义	(92)
二、方差的性质	(95)
三、常用分布的方差	(96)
*第三节 协方差与相关系数	(100)
一、协方差	(100)

二、相关系数	(102)
习题四	(105)
*第五章 大数定律与中心极限定理	(107)
第一节 大数定律	(107)
一、契比雪夫不等式	(107)
二、贝努利大数定律	(108)
第二节 中心极限定理	(110)
习题五	(115)
第六章 样本与统计量	(117)
第一节 样本与统计量的分布	(117)
一、总体与样本	(117)
二、统计量	(119)
三、统计量的分布	(120)
第二节 直方图	(128)
习题六	(131)
第七章 参数估计	(133)
第一节 点估计	(133)
一、样本数字特征法	(134)
*二、最大似然估计法	(135)
第二节 估计量的评选标准	(139)
一、无偏性	(140)
二、有效性	(142)
第三节 区间估计	(143)
一、正态总体均值的置信区间	(144)
二、正态总体方差的置信区间	(147)
习题七	(151)
第八章 假设检验	(153)
第一节 假设检验	(153)
一、问题的提出	(153)
二、显著性检验法及其基本原理	(154)
第二节 正态总体的均值与方差的假设检验	(159)
一、正态总体均值的假设检验	(159)

二、正态总体方差的假设检验—— χ^2 检验	(164)
第三节 两个正态总体均值相等与方差相等的假设检验	(170)
一、两个正态总体均值相等的假设检验	(170)
二、两个正态总体方差相等的假设检验—— F 检验	(175)
习题八	(179)
第九章 方差分析与回归分析	(182)
第一节 方差分析	(182)
一、单因素的方差分析	(182)
* 二、双因素的方差分析	(189)
第二节 一元回归分析	(194)
一、一元线性回归	(194)
二、一元线性回归方程的求法	(195)
* 三、相关显著性检验	(199)
* 四、预测与控制	(201)
* 五、可线性化的一元非线性回归	(203)
习题九	(209)
* 第十章 正交试验设计	(212)
第一节 正交表	(212)
一、问题的提出	(212)
二、正交表简介	(213)
第二节 无交互作用的正交试验设计	(215)
第三节 有交互作用的正交试验设计	(218)
* 习题十	(221)
习题答案	(223)
附表	(229)
参考书目	(256)

第一章 随机事件与概率

第一节 随 机 事 件

一、随机试验与随机事件

1. 随机现象

自然现象与社会现象是各式各样的，若从结果能否预言的角度出发去划分，可以分为两大类。其中一类现象是可以预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复实验或观察，它的结果总是确定的，这一类现象称为确定性现象。例如，在标准大气压下，温度达到 100°C 的纯水必然沸腾；异性电荷必然相互吸引等。另一类现象是不能预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复实验或观察，或出现这种结果，或出现那种结果，这一类现象称为随机现象。例如，掷一枚质地均匀的骰子，所出现的点数；某电话交换台每小时内所接到的呼唤次数；某门炮向某一目标射击，每次弹着点的位置等。

人们发现，随机现象虽然对于个别实验或观察来说，无法预言其结果，但在相同的条件下进行大量的实验或观察时，却又呈现出某种规律性。例如，掷一枚质地均匀而对称的硬币，当掷的次数相当多时，就会发现出现正面(有花的一面)和反面(有字的一面)次数的比约为 $1:1$ ；查看各国人口统计资料，就会发现在新生儿中男孩和女孩各约占一半，随机现象所呈现的这种规律性，我们称为随机现象的统计规律性。概率与数理统计就是揭示和应用随机现象统计规律性的一门学科。

2. 随机试验与随机事件

在一定条件下,对自然现象和社会现象进行的实验或观察,称为试验.试验通常用 E 表示,举例如下:

例 1 E_1 : 掷一枚质地均匀的硬币,观察它出现正面或反面;

例 2 E_2 : 掷一枚质地均匀的骰子,观察它出现的点数;

例 3 E_3 : 记录某电话交换台一小时内接到的呼唤次数;

例 4 E_4 : 一射手进行射击,直到击中目标为止,观察他的射击情况;

例 5 E_5 : 在一批灯泡里,任取一只,测试它的寿命.

上面 5 个试验有以下的共同特性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但事先明确试验的所有可能结果;

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们把具有上述三个特性的试验称为随机试验.显然,上述 5 个试验都是随机试验,今后所说的试验也都是随机试验.

随机试验的结果称为该随机试验的随机事件,简称事件.事件通常用字母 $A, B, C, \dots$ 表示.例如,在例 2 中,“出现奇数点”是随机事件,在例 5 中,“所取灯泡的寿命不超过 1000 小时”是随机事件等等.

概率与数理统计是通过随机试验中的随机事件来研究随机现象的.

二、基本事件与样本空间

随机试验的每一个可能的基本结果称为这个试验的一个基本事件(样本点),记作 ω . 全体基本事件的集合称为这个试验的样本空间,记作 Ω .

例如,例 1 中的试验,基本结果有两个:正(正面向上),反(反面向上),即有两个基本事件:正、反,这个试验的样本空间为

$$\Omega_1 = \{\text{正}, \text{反}\}$$

例 2 中的试验, 基本结果有六个: “出现 1 点”, “出现 2 点”, …, “出现 6 点”, 分别用 1, 2, 3, 4, 5, 6 表示, 即有六个基本事件: 1, 2, 3, 4, 5, 6; 这个事件的样本空间为

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

同样例 3, 例 4, 例 5 的样本空间分别为

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Omega_4 = \{1, 01, 001, \dots\}, \text{ 这里的 } 0 \text{ 表示没有击中, } 1 \text{ 表示击中}$$

$$\Omega_5 = \{t | t \geq 0\}$$

显而易见, 随机事件或为基本事件, 或由基本事件所组成, 因此随机事件是样本空间 Ω 的子集. 我们说事件发生是该事件中的一个基本事件发生; 反过来, 如果某事件中的一个基本事件发生, 则该事件发生.

例如, 在例 2 中, $A = \{1, 3, 5\}$ 是 Ω_2 的一个子集, 它表示“出现奇数点”. 我们说 A 发生, 是指“出现 1 点”、“出现 3 点”、“出现 5 点”这三个基本事件中的一个发生; 反过来, 当“出现 1 点”, “出现 3 点”, “出现 5 点”这三个基本事件之一发生时, 事件 A 发生. “出现偶数点”为事件 $B = \{2, 4, 6\}$, “出现的点数不超过 4”为事件 $C = \{1, 2, 3, 4\}$. 又如, 在例 3 中, $D = \{t | 500 \leq t \leq 600\}$ 是 Ω_5 的一个子集, 它表示事件“灯泡的寿命在 500 小时与 600 小时之间”.

特殊地, Ω 也是一个随机事件, 由于每次试验总是 Ω 中的一个基本事件发生, 即 Ω 必然发生, 所以 Ω 称为必然事件, 它是一个特殊的“随机”事件. 同样空集 ϕ 也是一个特殊的“随机”事件, 由于任何一个基本事件都不属于 ϕ , 这样在每一次试验中, ϕ 都不可能发生, 所以, 我们称 ϕ 为不可能事件. 例如, 在例 2 中, 事件“点数不大于 6”是必然事件, “点数大于 6”是不可能事件. 显然, 必然事件与不可能事件所反映的现象是确定性现象, 并不具有随机性, 这说明确定性现象是作为随机现象的特例来研究的.

三、事件的关系与运算

和集合的关系与集合的运算相对应,下面介绍事件之间的关系与事件的运算.

设 Ω 为样本空间, $A, B, A_k (k=1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ 为事件, 它们都是 Ω 的子集.

1. 包含关系

如果事件 A 发生, 导致 B 必然发生, 则称事件 B 包含事件 A . 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如在例 2 中, 若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 即“出现的点数不超过 5”

显然 $A \subset B$, 即事件 B 包含事件 A . 这是因为若事件“出现奇数点”发生, 则事件“出现的点数不超过 5”必然发生.

包含关系可用图 1-1 直观地说明.

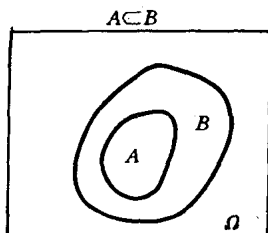


图 1-1

2. 相等关系

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等. 它表示 A 与 B 在本质上是同一个事件.

3. 事件的和

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件, 称为事件 A 与事件 B 的和, 记为: $A \cup B$ (或 $A + B$) (图 1-2).

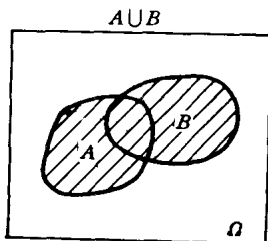


图 1-2

例如, 在例 2 中若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”;

$B = \{1, 2, 3, 4\}$, 即“出现的点数不超过4”;

则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 即“出现的点数不超过5”.

类似地, 称“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”的事件为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和, 记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$;

称“可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 中至少有一个发生”的事件为可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和, 记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$.

4. 事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件, 称为事件 A 与事件 B 的积, 记为 $A \cap B$ (或 AB) (图 1-3).

例如, 在例 2 中, 若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”;

$B = \{1, 2\}$, 即“出现的点数不超过2”;

则 $A \cap B = \{1\}$, 即“出现1点”.

类似地, 称“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”的事件为 n 个事件 $A_1,$

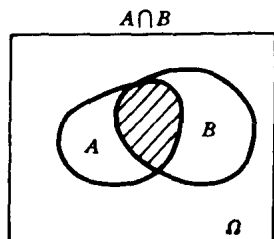


图 1-3

$A_2, \dots, A_n$ 的积, 记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$; 称“可列个事件 $A_1,$

$A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”的事件为可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

的积, 记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$.

5. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A, B 是互不相容事件 (图 1-4).

例如, 在例 2 中, 若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”;

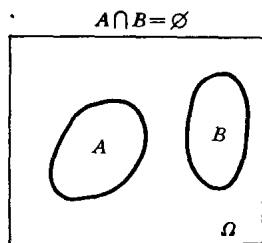


图 1-4

$B = \{2, 4\}$, 即“出现小于5的偶数点”;

则 $A \cap B = \emptyset$, A, B 是互不相容事件, 即 A, B 不可能同时发生.

6. 事件的差

A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$ (图 1-5).

例如, 在例 2 中, 若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”;

$B = \{1, 2, 3, 4\}$, 即“出现的点数不超过4”;

则 $A - B = \{5\}$, “即出现5点”.

7. 逆事件

如果事件 A 与事件 B 中必有一个发生, 且仅有一个发生, 即 $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件), 记为 $B = \overline{A}$, $A = \overline{B}$ (图 1-6).

例如, 在例 2 中, 若记:

$A = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”,

则 $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$, 即“出现偶数点”.

我们不难验证下面的三个结论:

$$(1) A = \overline{\overline{A}}$$

$$(2) A - B = A\overline{B}$$

$$(3) \overline{A} = \Omega - A$$

上面我们引入了概率论的一些基

本概念, 为了与集合论的概念相对照, 特列成下表:

从集合的运算规则可以得到事件的运算规则:

交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

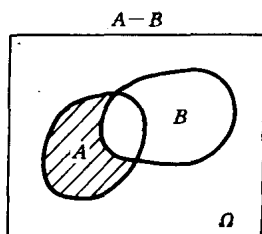


图 1-5

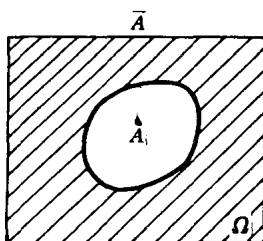


图 1-6

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	空间(全集)
ϕ	不可能事件	空集
$\omega \in \Omega$	基本事件, 样本点	Ω 中的元素
$A \subset \Omega$	事件 A	Ω 的子集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 等于集合 B
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的余集
$A - B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A \cap B = \phi$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{分配律 } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\text{对偶公式 } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

分配律和对偶公式还可以推广至任意有限个事件或可列个事件.

例 6 设一个工人生产了三个零件, 若记 A_1 = “第 1 个零件是正品”, A_2 = “第 2 个零件是正品”, A_3 = “第 3 个零件是正品”, 试表示:

- (1) 没有一个零件是次品;
- (2) 只有第一个零件是次品;
- (3) 恰有一个零件是次品;
- (4) 至少有一个零件是次品.

解 (1) “没有一个零件是次品”表示成 $A_1 A_2 A_3$;

(2) “只有第一个零件是次品”表示成 $\overline{A_1} A_2 A_3$;

(3) “恰有一个零件是次品”表示成 $\overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3}$;

(4) “至少有一个零件是次品”表示成 $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ 或 $\overline{A_1 A_2 A_3}$.

第二节 事件的概率

一、概率的统计定义

在实际问题中，常常需要知道随机事件在试验中发生的可能性有多大，为此，我们先介绍事件的频率的概念。

定义 若事件 A 在 N 次试验中出现 n 次，则称

$$f_N(A) = \frac{n}{N} \quad (1.1)$$

为事件 A 在这 N 次试验中出现的频率，称 n 为事件 A 在这 N 次试验中出现的频数。

频率具有下列性质：

- ① $0 \leq f_N(A) \leq 1$
- ② $f_N(\Omega) = 1, f_N(\phi) = 0$
- ③ (i) $f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B) - f_N(AB)$
(ii) 特别地，若 A, B 互不相容，则
$$f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$$

(iii) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容，则
$$f_N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_N(A_1) + f_N(A_2) + \dots + f_N(A_n)$$
- ④ $f_N(A) = 1 - f_N(\bar{A})$
- ⑤ 若 $A \subset B$ ，则 $f_N(A) \leq f_N(B)$

频率性质③ (i) 的证明如下：

设 n_A, n_B 和 n_{AB} 分别为事件 A, B 和 AB 在 N 次试验中发生的次数，显然事件 $A \cup B$ 发生的次数 $n_{A \cup B}$ 为

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{AB}$$

所以

$$\begin{aligned} f_N(A \cup B) &= \frac{n_{A \cup B}}{N} = \frac{n_A + n_B - n_{AB}}{N} \\ &= \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} - \frac{n_{AB}}{N} \end{aligned}$$

$$=f_N(A)+f_N(B)-f_N(AB)$$

频率的其它性质, 请读者自证.

为了研究事件频率的规律性, 下面举两个例子.

例 1 蒲丰(Buffon)与皮尔逊(Pearson)曾分别掷一枚质地均匀的硬币, 其结果如下表:

实验者	掷硬币的次数	正面出现的频数	正面出现的频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表可以看出, 投掷次数充分多时, 正面出现的频率在 0.5 附近摆动.

例 2 检查某产品, 当产品的长度在 13.60 厘米到 13.90 厘米之间时, 认为是合格的, 否则是次品. 现分别抽出 60 件, 150 件, ..., 1800 件来检查, 其合格品件数如下表:

抽取件数	合格品件数(频数)	合格品频率
60	50	0.833
150	131	0.873
600	548	0.913
900	820	0.911
1200	1091	0.909
1800	1631	0.906

从表中可以看出, 抽取的件数充分多时, 合格品的频率在 0.9 附近摆动.

上面两例说明, 在充分多次重复的试验中(即 N 充分大时), 事件的频率总在一定值 p 附近摆动, 这揭示了随机事件的一个极其重要的特性: 频率稳定性. 它表明数 p 是事件本身客观存在的一种固有的属性. 因此, 数 p 可以对事件 A 发生的可能性大小进行度量.