高等学校工程专科教材

概率与数理统计

常柏林　卢静芳　李效羽　编

高等教育出版社

（京）112 号

高等学校工程专科教材

概率与数理统计

常柏林　卢静芳　李效羽　编

*

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张 8.25 字数 210 000
1993年 5 月第 1 版　1993年 5 月第 1 次印刷
印数 0001 — 15 199
ISBN7－04－004156－1/O·1199
定价 3.25 元

前　言

为了适应高等工程专科学校培养应用性人才的需要，改变专科照搬本科教材的现状，提高高等工程专科数学教学质量，我们在国家教委高教司的领导下，在全国高等工程专科数学教材编审组的组织下，在高等教育出版社的指导下，根据高等学校工程专科概率与数理统计课程的教学基本要求，编写了本教材.

本书在结构体系，内容安排、习题选择等方面努力体现专科特色，力求贯彻以应用为目的、以必需够用为度的原则，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养，注意讲清概念、减少数理论证和加强理论与实践的联系.

本教材实际授课时数为 38 ～ 50.

参加本书编写工作的有常柏林(盐城工业专科学校副教授)，卢静芳(长春建筑高等专科学校副教授)，李效羽(湖南计算机专科学校副教授)，最后由常柏林统稿定稿.

本书由湖南省数学学会副理事长、中南工业大学蔡海涛教授担任主审，参加审稿的还有肖必泉(厦门大学)、 夏浩然(长沙有色金属专科学校)、梅顺治(武汉河运专科学校)等同志. 苏永法(南京机械专科学校)、邢文斗(沈阳工业高等专科学校)、章平(南京交通高等专科学校)、钱翼文(上海轻工业高等专科学校)、彭延铭(上海冶金高等专科学校)、樊启宙(南昌水利水电专科学校)、郑吉富(重庆钢铁专科学校)、谭玉明(新疆煤炭专科学校)等同志对本书的编写给予了热情的帮助和支持. 对此，我们表示

衷心的感谢.

由于我们水平有限，书中一定存在着不少缺点和错误，敬请读者批评指正.

编　者

1992年4月

目　　录

第一章 随机事件与概率

第一节 随 机 事 件

一、随机试验与随机事件

1. 随机现象

自然现象与社会现象是各式各样的，若从结果能否预言的角度出发去划分，可以分为两大类. 其中一类现象是可以预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复实验或观察，它的结果总是确定的，这一类现象称为确定性现象. 例如，在标准大气压下，温度达到 100 ℃ 的纯水必然沸腾；异性电荷必然相互吸引等. 另一类现象是不能预言其结果的，即在保持条件不变的情况下，重复实验或观察，或出现这种结果，或出现那种结果，这一类现象称为随机现象. 例如，掷一枚质地均匀的骰子，所出现的点数；某电话交换台每小时内所接到的呼唤次数；某门炮向某一目标射击，每次弹着点的位置等.

人们发现，随机现象虽然对于个别实验或观察来说，无法预言其结果，但在相同的条件下进行大量的实验或观察时，却又呈现出某种规律性. 例如，掷一枚质地均匀而对称的硬币，当掷的次数相当多时，就会发现出现正面(有花的一面)和反面(有字的一面)次数的比约为 1:1；查看各国人口统计资料，就会发现在新生婴儿中男孩和女孩各约占一半，随机现象所呈现的这种规律性，我们称为随机现象的统计规律性. 概率与数理统计就是揭示和应用随机现象统计规律性的一门学科.

2. 随机试验与随机事件

在一定条件下，对自然现象和社会现象进行的实验或观察，称为试验. 试验通常用 E 表示，举例如下:

例 1 E_1: 掷一枚质地均匀的硬币，观察它出现正面或反面;

例 2 E_2: 掷一枚质地均匀的骰子，观察它出现的点数;

例 3 E_3: 记录某电话交换台一小时内接到的呼唤次数;

例 4 E_4: 一射手进行射击，直到击中目标为止，观察他的射击情况;

例 5 E_5: 在一批灯泡里，任取一只,测试它的寿命.

上面 5 个试验有以下的共同特性:

(1)可以在相同的条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个，但事先明确试验的所有可能结果;

(3)每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们把具有上述三个特性的试验称为随机试验. 显然，上述 5 个试验都是随机试验，今后所说的试验也都是随机试验.

随机试验的结果称为该随机试验的随机事件，简称事件. 事件通常用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示. 例如，在例 2 中，“出现奇数点”是随机事件，在例 5 中，“所取灯泡的寿命不超过 1000 小时”是随机事件等等.

概率与数理统计是通过随机试验中的随机事件来研究随机现象的.

二、基本事件与样本空间

随机试验的每一个可能的基本结果称为这个试验的一个基本事件(样本点)，记作 ω. 全体基本事件的集合称为这个试验的样本空间，记作 $\boldsymbol{\Omega}$.

例如，例 1 中的试验，基本结果有两个: 正(正面向上)，反(反面向上)，即有两个基本事件: 正、反，这个试验的样本空间为

$\Omega_1=\{$正，反$\}$

例 2 中的试验，基本结果有六个："出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"，分别用 1,2,3,4,5,6 表示，即有六个基本事件：1,2,3,4,5,6；这个事件的样本空间为

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$

同样例 3，例 4，例 5 的样本空间分别为

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$

$\Omega_4=\{1,01,001,\cdots\}$，这里的 0 表示没有击中，1 表示击中

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$

显而易见，随机事件或为基本事件，或由基本事件所组成，因此随机事件是样本空间 Ω 的子集. 我们说事件发生是该事件中的一个基本事件发生；反过来，如果某事件中的一个基本事件发生，则该事件发生.

例如，在例 2 中，$A=\{1,3,5\}$是Ω_2的一个子集，它表示"出现奇数点". 我们说 A 发生，是指"出现 1 点"、"出现 3 点"、"出现 5 点"这三个基本事件中的一个发生；反过来，当"出现 1 点"，"出现 3 点"，"出现 5 点"这三个基本事件之一发生时，事件 A 发生. "出现偶数点"为事件 $B=\{2,4,6\}$，"出现的点数不超过 4"为事件 $C=\{1,2,3,4\}$. 又如，在例 3 中，$D=\{t\mid 500\leqslant t\leqslant 600\}$是$\Omega_5$的一个子集，它表示事件"灯泡的寿命在 500 小时与 600 小时之间".

特殊地，Ω 也是一个随机事件，由于每次试验总是 Ω 中的一个基本事件发生，即 Ω 必然发生，所以 Ω 称为必然事件，它是一个特殊的"随机"事件. 同样空集 ϕ 也是一个特殊的"随机"事件，由于任何一个基本事件都不属于 ϕ，这样在每一次试验中，ϕ 都不可能发生，所以，我们称 ϕ 为不可能事件. 例如，在例 2 中，事件"点数不大于 6"是必然事件，"点数大于 6"是不可能事件. 显然，必然事件与不可能事件所反映的现象是确定性现象，并不具有随机性，这说明确定性现象是作为随机现象的特例来研究的.

三、事件的关系与运算

和集合的关系与集合的运算相对应，下面介绍事件之间的关系与事件的运算.

设 Ω 为样本空间，A, B, $A_k(k=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$为事件，它们都是$\Omega$ 的子集.

1. 包含关系

如果事件 A 发生，导致 B 必然发生，则称事件 B 包含事件 A. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如在例 2 中，若记：

$A=\{1,3,5\}$，即"出现奇数点"

$B=\{1,2,3,4,5\}$，即"出现的点数不超过 5"

显然 $A\subset B$, 即事件 B 包含事件 A. 这是因为若事件"出现奇数点"发生，则事件"出现的点数不超过 5"必然发生.

包含关系可用图 1－1 直观地说明.

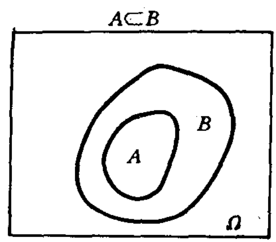

图 1－1

2. 相等关系

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等. 它表示 A 与 B 在本质上是同一个事件.

3. 事件的和

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和，记为：$A\cup B$（或 $A+B$）（图 1－2）.

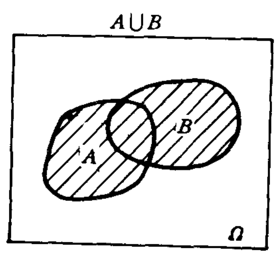

图 1－2

例如，在例 2 中若记：

$A=\{1,3,5\}$，即"出现奇数点"；

$B=\{1,2,3,4\}$，即“出现的点数不超过4”；

则 $A\bigcup B=\{1,2,3,4,5\}$，即“出现的点数不超过5”.

类似地，称“n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生”的事件为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n$；称“可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$，中至少有一个发生”的事件为可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n\bigcup\cdots$.

4. 事件的积

事件A与事件B同时发生的事件，称为事件A与事件B的积，记为$A\bigcap B$(或AB)(图1－3).

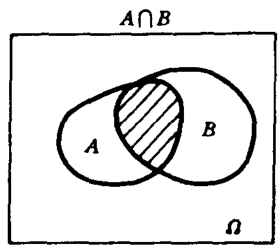

图 1－3

例如，在例2中，若记：

$A=\{1,3,5\}$，即“出现奇数点”；

$B=\{1,2\}$，即“出现的点数不超过2”；

则 $A\bigcap B=\{1\}$，即“出现1点”.

类似地，称“n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生”的事件为n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}=A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n$；称“可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生”的事件为可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n\bigcap\cdots$.

5. 互不相容事件

如果事件A与事件B不可能同时发生，即$A\bigcap B=\phi$，则称A，B是互不相容事件(图1－4).

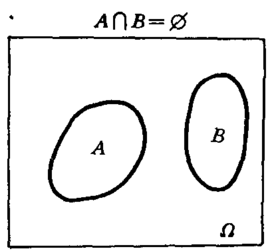

图 1－4

例如，在例2中，若记：

$A=\{1,3,5\}$，即“出现奇数点”；

$B=\{2,4\}$，即“出现小于 5 的偶数点”；

则　$A\cap B=\phi$，A，B 是互不相容事件，即 A，B 不可能同时发生.

6. 事件的差

A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$(图 1－5).

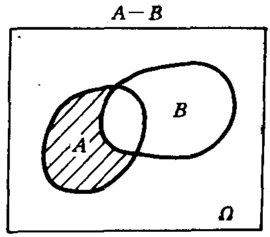

图 1－5

例如，在例 2 中，若记：

$A=\{1,3,5\}$，即“出现奇数点”；

$B=\{1,2,3,4\}$，即“出现的点数不超过 4”；

则　$A-B=\{5\}$，“即出现 5 点”.

7. 逆事件

如果事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件)，记为 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$ (图 1－6).

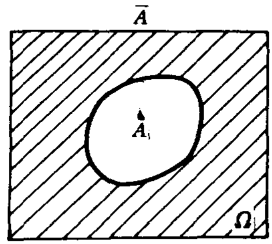

图 1－6

例如，在例 2 中，若记：

$A=\{1,3,5\}$，即“出现奇数点”，

则 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，即“出现偶数点”.

我们不难验证下面的三个结论：

(1) $A=\overline{\overline{A}}$

(2) $A-B=A\overline{B}$

(3) $\overline{A}=\Omega-A$

上面我们引入了概率论的一些基本概念，为了与集合论的概念相对照，特列成下表：

从集合的运算规则可以得到事件的运算规则：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	空间(全集)
ϕ	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	基本事件，样本点	Ω中的元素
$A\subset\Omega$	事件 A	Ω的子集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 等于集合 B
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的余集
$A-B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A\cap B=\phi$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

对偶公式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

分配律和对偶公式还可以推广至任意有限个事件或可列个事件.

例 6 设一个工人生产了三个零件，若记A_1＝“第 1 个零件是正品”，A_2＝“第 2 个零件是正品”，A_3＝“第 3 个零件是正品”，试表示:

(1)没有一个零件是次品;

(2)只有第一个零件是次品;

(3)恰有一个零件是次品;

(4)至少有一个零件是次品.

解 (1)“没有一个零件是次品”表示成 $A_1A_2A_3$;

(2)“只有第一个零件是次品”表示成$\overline{A_1}A_2A_3$;

(3)“恰有一个零件是次品”表示成$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$;

(4)“至少有一个零件是次品”表示成$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ 或$\overline{A_1A_2A_3}$.

第二节　事件的概率

一、概率的统计定义

在实际问题中，常常需要知道随机事件在试验中发生的可能性有多大，为此，我们先介绍事件的频率的概念.

定义　若事件 A 在 N 次试验中出现 n 次，则称

$$f_N(A)=\frac{n}{N} \tag{1.1}$$

为事件 A 在这 N 次试验中出现的频率，称 n 为事件 A 在这 N 次试验中出现的频数.

频率具有下列性质:

①　$0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$

②　$f_N(\Omega)=1, f_N(\phi)=0$

③　(i) $f_N(A\bigcup B)=f_N(A)+f_N(B)-f_N(AB)$

(ii)特别地，若 A, B 互不相容，则

$$f_N(A\bigcup B)=f_N(A)+f_N(B)$$

(iii)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$f_N(A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n)=f_N(A_1)+f_N(A_2)+\cdots+f_N(A_n)$$

④　$f_N(A)=1-f_N(\overline{A})$

⑤　若 $A\subset B$, 则 $f_N(A)\leqslant f_N(B)$

频率性质③ (i)的证明如下:

设 n_A、n_B 和 n_{AB} 分别为事件 A、B 和 AB 在 N 次试验中发生的次数，显然事件 $A\bigcup B$发生的次数$n_{A\bigcup B}$为

$$n_{A\bigcup B}=n_A+n_B-n_{AB}$$

所以

$$f_N(A\bigcup B)=\frac{n_{A\bigcup B}}{N}=\frac{n_A+n_B-n_{AB}}{N}$$

$$=\frac{n_A}{N}+\frac{n_B}{N}-\frac{n_{AB}}{N}$$

$$=f_N(A)+f_N(B)-f_N(AB)$$

频率的其它性质，请读者自证.

为了研究事件频率的规律性，下面举两个例子.

例 1 蒲丰(Buffon)与皮尔逊(Pearson)曾分别掷一枚质地均匀的硬币，其结果如下表:

实验者	掷硬币的次数	正面出现的频数	正面出现的频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表可以看出，投掷次数充分多时，正面出现的频率在0.5附近摆动.

例 2 检查某产品，当产品的长度在13.60厘米到13.90厘米之间时，认为是合格的，否则是次品. 现分别抽出60件，150件，…，1800件来检查，其合格品件数如下表:

抽取件数	合格品件数(频数)	合格品频率
60	50	0.833
150	131	0.873
600	548	0.913
900	820	0.911
1200	1091	0.909
1800	1631	0.906

从表中可以看出，抽取的件数充分多时，合格品的频率在0.9附近摆动.

上面两例说明，在充分多次重复的试验中(即 N 充分大时)，事件的频率总在一定值 p 附近摆动，这揭示了随机事件的一个极其重要的特性:频率稳定性. 它表明数 p 是事件本身客观存在的一种固有的属性. 因此，数 p 可以对事件 A 发生的可能性大小进行度量.