88

概率统计及随机过程

张福渊　郭绍建
萧亮壮　傅丽华　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书介绍概率论、数理统计、随机过程三部分内容。一章至六章为概率论，包括：随机事件的概率；随机变量及其分布；二维随机变量；随机变量的函数的分布；随机变量的数字特征；大数定律和中心极限定理。七章至十章为数理统计，包括：统计量及其分布；参数的点估计和区间估计；假设检验；回归分析。十一章至十三章为随机过程，包括：随机过程的基本概念；平稳过程；马尔可夫链。书中还配置了相当数量的例题和习题，便于读者自学；并且配置了适量应用性的例子。

全书内容丰富，深入浅出。在满足理工科大学基本教学要求的基础上，选编了部分具有广阔应用领域的内容，使得本书既可作为理工科大学的本科教材，又可作为研究生参考书，也可作为有关专业的教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计及随机过程/张福渊等编著.—北京：北京航空航天大学出版社，2000.9

ISBN 7-81077-004-7

Ⅰ.概... Ⅱ.张... Ⅲ.①概率论②数理统计③随机过程 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35323 号

概率统计及随机过程

张福渊 郭绍建 萧亮壮 傅丽华 编著

责任编辑：郭维烈

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市学院路 37 号，邮编 100083 发行部电话 82317024

http://www.buaapress.com.cn

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

北京宏文印刷厂印装 各地书店经销

*

开本：850×1168 1/32 印张：12.375 字数：333 千字

2000 年 9 月第 1 版 2001 年 7 月第 2 次印刷 印数：5 001-10000 册

ISBN 7-81077-004-7/O·001 定价：17.00 元

前　　言

概率论及以它为基础的数理统计、随机过程都是研究随机现象的数学分支。几个世纪以来，经过众多学者潜心研究，概率论、数理统计、随机过程已经成为既互相关联又自成体系的三门严谨的分支学科。随着科学技术的快速发展和生产力的大幅度提高，在各个研究领域和工程技术领域中，人们愈来愈关注随机模型，使得随机理论和方法的应用愈益广泛，几乎渗透到科学技术的各个领域之中。

本书介绍概率论、数理统计、随机过程中的基本理论和基本方法。初稿是笔者在北京航空航天大学自编的全校通用教材，1987年投入使用。几经修订，于1993年正式出版。为了适应科技发展的需求，为了适应教改的需求，我们本着立足现在，着眼未来，精益求精的指导思想，对原有版本作了全面的增删修订，从体系上作了调整，许多章节推翻原稿，重新改写。在满足理工科大学基本教学要求的基础上，在深广度方面都有提高。书中一些具有深刻理论又有广阔应用领域的内容及例子，可供读者选学或作参考。书中各章均配置了相当数量的例题和习题，并对习题给出了答案。本书既可作为理工科大学本科教科书，又可作为研究生参考书，也可作为有关专业的教师或工程技术人员的参考书。

本书关于“分位点”的定义以及附表二至附表五中的分位点数，依据中华人民共和国国家标准，统一为下侧分位点。这与以往教材中使用上侧分位点和双侧分位点是不同的。请读者注意区别。

韩於羹教授详细审阅了全部书稿，提出了极为切实的修改意见，特此致以衷心的感谢。

本书第一章至第四章由郭绍建执笔;第五、六章由傅丽华执笔;第七章至第九章由萧亮壮执笔;第十章至第十三章由张福渊执笔。张福渊对全书进行了修订统编。

限于水平,书中难免存在缺点或错误,欢迎同行专家和读者批评指正。

编者

2000 年 3 月

目　录

第一章　随机事件的概率

第一节　随机事件与样本空间

一、随机试验与随机事件

为了叙述方便，我们把各种各样的科学实验或对某一事物的某种特性的观察统称为试验。如果一个试验在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，那么，称它为随机试验，简称为试验。用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示一个试验。

例如，投掷一颗匀称的骰子，观察其出现的点数；记录某电话交换台在一天内接到的呼叫次数；在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命等，都是随机试验，并分别以 E_1, E_2, E_3 表示。

在试验中可能发生，也可能不发生的事件称为随机事件，简称事件。如试验 E_1 中，“出现偶数点”和“出现的点数大于 4”等都是随机事件；试验 E_2 中，“接到 500 次呼叫”和“呼叫次数不超过 20”等也是随机事件；试验 E_3 中，“灯泡的寿命超过 100 h”和“灯泡寿命在 300 h～500 h 之间”等亦是随机事件。以下用字母 A, B, C 或 $A_1, A_2, \cdots$ 等表示随机事件。显然，试验中的每一个可能结果都是一个最简单的随机事件，称为基本事件。可见，随机事件是由若干基本事件组成的。随机事件 A 发生当且仅当组成 A 的基本事件有一个发生。

在试验中必然会发生的事件称为必然事件，记为 S。不可能发生的事件称为不可能事件，记为 $\varnothing$。如 E_1 中，“出现的点数大于 0”是必然事件；“出现的点数小于 1”是不可能事件。必然事件

和不可能事件实际上并不是随机事件,但为了讨论方便,也把它们当作一种特殊的随机事件。

二、样本空间

定义 1 试验 E 的全部基本事件组成的集合,称为试验 E 的样本空间,记为 S。

就是说,试验 E 的基本事件是 E 的样本空间中的元素。基本事件又称为样本点。

如前面的试验 E_1, E_2, E_3 的样本空间分别为:$S_1=\{1,2,\cdots,6\}$, $S_2=\{0,1,2,\cdots\}$, $S_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

又如"投掷一枚硬币",这个试验的样本空间 $S=\{$反面向上,正面向上$\}$。若以 0,1 分别表示"反面向上"和"正面向上"这两个基本事件,则样本空间可简单地表示为 $S=\{0,1\}$。实际中,只有两种可能结果的试验是很多的。如检查一件产品是正品或是次品;射击目标是击中或是不中;人的身体健康与否等等。这些试验的样本空间都可以用 $S=\{0,1\}$ 来表示。

引入样本空间的概念之后,随机事件便是样本空间的子集。特别地,不可能事件 $\varnothing$ 表示空集,而必然事件 S 表示样本空间。这样,我们就可以引用集合论的有关知识来讨论事件间的关系与运算。

三、随机事件的关系与运算

设 E 的样本空间为 S,而 $A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 为 E 的事件。

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等(或称 A 与 B 等价),记为 $A=B$。例如,掷骰子的试验中,令 $A=\{$出现 2 点$\}$, $B=\{$出现点数小于 4$\}$, $C=\{$出现点数不大于 3$\}$,则有

$$A \subset B, \qquad B = C$$

特别地，对任意事件 A 有

$$\varnothing \subset A \subset S$$

“事件 A 与 B 至少有一个发生”这一事件称为A 与 B 之和，记为 $A+B$ 或$A \cup B$。例如，试验 E_1 中，令 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 $A+B=\{2,4,5,6\}$。显然，若 $B \subset A$，则 $A+B=A$。对任意事件 A 有

$$A + A = A, \quad \varnothing + A = A, \quad A + S = S。$$

“事件 A 与 B 同时发生”这一事件称为A 与 B 之积，记为 AB 或$A \cap B$。如试验 E_1 中，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $AB=\{3,5\}$。特别地，若 $B \subset A$，则 $AB=B$。对任意事件 A 有

$$AA = A, \quad AS = A, \quad \varnothing A = \varnothing$$

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件A 与 B 互不相容或称A 与 B 互斥。如试验 E_1 中，$A=\{2,4\}$，$B=\{5,6\}$，则 $AB=\varnothing$。显然不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件A 互不相容。如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中的任意两个事件都互不相容，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容。特别地，若 $AB=\varnothing$ 且$A+B=S$，则称事件A 与 B 互逆，或称A 与 B 对立。即 A 是B 的逆事件(对立事件)，记为 $A=\overline{B}$；B 是A 的逆事件(对立事件)，记为 $B=\overline{A}$。如在试验 E_1 中，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 A 与B 互逆。显然

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\varnothing} = S, \quad \overline{S} = \varnothing$$

“事件 A 发生而B 不发生”这一事件称为A 与B 之差，记为 $A-B$。如在试验 E_1 中，$A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,3,4\}$，则 $A-B=\{1\}$。特别地，

$$A - A = \varnothing, \quad A - \varnothing = A, \quad S - A = \overline{A}$$

不难验证：对任意事件 A, B 有

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$

事件的和与积的概念可以推广到有限多个或可列无穷多个事

件的情形。即 $A=\sum_i A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 中至少有一个发生"这一事件。

$B=\prod_i A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 同时发生"这一事件。

事件间的关系与运算可用几何图形直观地表示(参看图 1-1)。

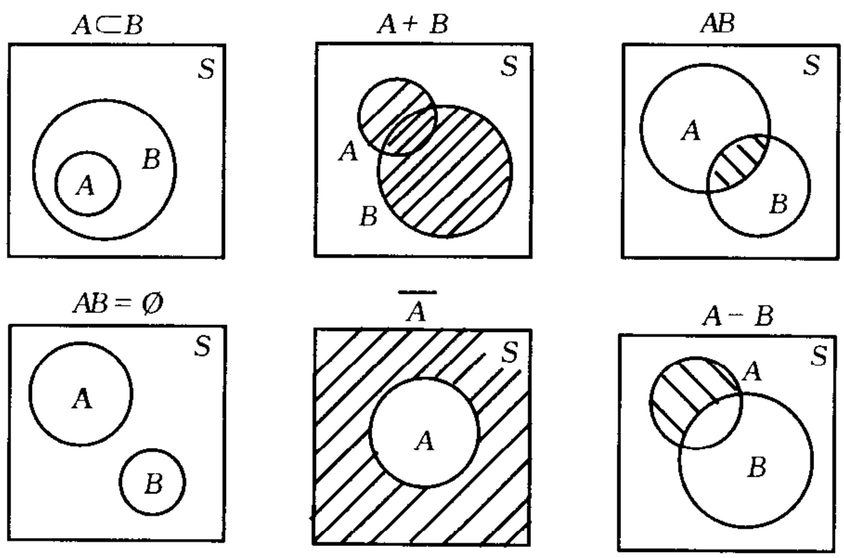

图 1-1

由于事件是样本空间的子集,不难验证事件之间的运算满足下列规则:

(1) 交换律　$A+B=B+A$,　$AB=BA$

(2) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$,$(AB)C=A(BC)$

(3) 分配律　$(A+B)C=AC+BC$,

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

(4) 德莫根(De Morgan)公式　对有限个或可列无穷多个事件 A_i,恒有

$$\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \overline{A_i}\quad,\quad \overline{\prod_i A_i}=\sum_i \overline{A_i}$$

例 1　重复投掷一枚匀称的硬币三次,记录投掷结果。设 A_i ="第 i 次投掷出现正面",$i=1,2,3$。试用 A_1,A_2,A_3 描述样本

空间 S 和下列各个事件：

(1) 只第一次出现正面(B_1)；

(2) 只出现一次正面(B_2)；

(3) 至少出现一次正面(B_3)；

(4) 出现正面不多于一次(B_4)。

解　易知样本空间 S 共有八个基本事件。

$S=\{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\overline{A}_3,\ A_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1A_2A_3,\ A_1\overline{A}_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1A_2\overline{A}_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$

(1) “只第一次出现正面”意指：第一次出现正面，而第二、三次均出现反面。于是 $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$。

(2) “只出现一次正面”是指：或者仅第一次出现正面，或者仅第二次出现正面，或者仅第三次出现正面。所以

$$B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

(3) “至少出现一次正面”是指：可能只出现一次正面，也可能出现两次正面，也可能三次都出现正面。于是

$$B_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$$

或表示为

$$B_3=A_1+A_2+A_3$$

(4) “出现正面不多于一次”是指：或者仅出现一次正面，或者三次都出现反面。所以

$$B_4=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

由于 B_4 的对立事件是“至少两次出现正面”。所以 B_4 又可表示为

$$B_4=\overline{A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3}$$

第二节　概率的定义及性质

随机事件在一次试验中既可能发生，也可能不发生。如果在

相同的条件下,把一个试验重复做许多次,我们一定会发现,某些事件发生的次数多一些,而另一些事件发生的次数少一些。例如,将一颗骰子重复掷100次,毫无疑问,事件“出现奇数点”比事件“出现1点”发生的次数会多得多。那么,发生次数多的事件在每次试验中发生的可能性大一些,而发生次数少的事件在每次试验中发生的可能性小一些。问题是:如何度量事件发生可能性的大小?对于事件A,如果实数$P(A)$满足:(1)数$P(A)$的大小表示事件A发生可能性的大小;(2)$P(A)$是事件A所固有的,不随人们主观意志而改变的一种度量。那么数$P(A)$称为事件A的概率。它是事件A发生可能性的度量。

在本节中,我们首先介绍一类最简单的概率模型,然后逐步引出概率的一般定义。

一、概率的古典定义

设试验E的样本空间S只包含有限个基本事件,即$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,并且每个基本事件发生的可能性相等,即$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$,则称这种试验为古典型随机试验,简称古典概型。下面我们来讨论古典概型中事件A的概率$P(A)$。

考虑一个具体的例子:投掷一颗匀称的骰子,观察其出现的点数。易知$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$,其中$e_i$表示出现$i$点,$i=1,2,\cdots,6$。由于骰子是匀称的,所以每个基本事件$e_i$发生的可能性相同。这是个古典概型。考虑事件$A=\{e_2, e_4, e_6\}$。因为事件$A$包含的基本事件的个数等于基本事件总数的一半,并且每个基本事件发生的可能性都相等,因此事件A发生的可能性,即概率$P(A)=\frac{1}{2}$是合理的。它恰好是A包含的基本事件的个数除以基本事件总数所得的结果。

定义2 设试验E的样本空间$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,且$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$,$E$中事件$A$包含$k$个基本事件,则称

$P(A)=\frac{k}{n}$为事件A的概率。

即事件A的概率等于事件A所包含的基本事件的个数与基本事件总数之比值。概率的这种定义称为概率的古典定义。这样定义的概率称为古典概率。

由概率的古典定义,容易证明古典概率具有下列性质:

(1) 对任意事件A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若事件$A_1,A_2,\cdots,A_m$互不相容,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

证　因为任一事件A所包含的基本事件数k恒满足$0\leqslant k\leqslant n$,故

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

由于必然事件S包含了全部n个基本事件,所以

$$P(S)=\frac{n}{n}=1$$

设事件A_i含有$k_i(0\leqslant k_i\leqslant n)$个基本事件,由定义得

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n},\qquad i=1,2\cdots,m$$

由于$A_1,A_2,\cdots,A_m$互不相容,故$\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{A_i}$含有$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$个不同的基本事件,因此

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$$

性质(3)称为概率的有限可加性。

例1　盒内装有5个红球,3个白球。从中任取两个,试求(1)取到两个红球的概率;(2)取到两个相同颜色球的概率。

解　设$A=$"取到两个红球"

B =“取到两个同颜色的球”。

从 8 个球中任取两个,每种取法为一基本事件,所有不同取法的总数就是基本事件总数。于是基本事件总数为 C_8^2。由于两个红球只能在 5 个红球中任取,所以事件 A 包含的基本事件数为 C_5^2。故由定义 2 得

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$$

令 C =“取到两个白球”,由于“取到两个同颜色球”意味着:或者“取到两个红球”,或者“取到两个白球”。因此有

$$B=A+C \text{ 且 } AC=\varnothing$$

又两个白球只能在 3 个白球中任取,因此事件 C 所含基本事件数为 C_3^2。故由概率的有限可加性及定义得

$$P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C)=\frac{5}{14}+\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{13}{28}$$

例 2 一批产品中有 M 件正品,N 件次品。从中任意取 n 件,求恰好取到 k 件次品的概率。

解 设 A_k =“抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品”。从 $M+N$ 件产品中任意抽取 n 件,每一种抽取方法为一基本事件,全部不同的抽取方法的总数即为基本事件总数。所以基本事件总数为 C_{M+N}^n。由于所取 k 件次品必须在 N 件次品中任意取,而 $n-k$ 件正品只能从 M 件正品中任意抽取。所以,事件 A_k 含基本事件数为 $C_N^k\cdot C_M^{n-k}$。故由概率的古典定义得

$$P(A_k)=\frac{C_N^k\cdot C_M^{n-k}}{C_{M+N}^n},\qquad \begin{array}{l} k=0,1,2,\cdots,l \\ l=\min(n,N) \end{array}$$

例 3 将 5 本不同的数学书,3 本不同的物理书和 2 本不同的英语书随意地摆放在书架的同一层。试求(1)5 本数学书没有两本放在一起的概率;(2)恰有 3 本数学书放在一起的概率。

解 设 A =“5 本数学书没有两本放在一起”

$$B=\text{“恰有 3 本数学书放在一起”}$$

10 本书的每一种放法为一基本事件，由于 10 本书的所有不同放法共有 P_{10} 种，故基本事件总数为 $P_{10}=10!$。

(1) 要使 5 本数学书没有两本放在一起，可分两步来实现。首先将 5 本非数学书随意摆放在书架上，共有 P_5 种不同放法。然后将 5 本数学书逐一放在相邻两本非数学书之间和两端的六个位置中的任意五个位置上，共有 A_6^5 种不同放法。故由乘法原理知，5 本数学书没有两本放在一起的所有不同放法有 $P_5\cdot A_6^5$ 种。即事件 A 含有 $P_5\cdot A_6^5$ 个基本事件。由概率定义得

$$P(A)=\frac{P_5\cdot A_6^5}{P_{10}}=\frac{1}{42}$$

(2) 恰有 3 本数学书放在一起有两种不同的情形。其一，3 本数学书放一起，另两本不放一起；其二，3 本数学书放一起，另两本也放在一起。对于第一种情形，可分两步来实现。首先将 5 本非数学书任意摆放在书架上，共有 P_5 种不同放法。然后，从 5 本数学书中任意选出 3 本，共有 C_5^3 种选法。再把这 3 本数学书固定一种排列方式并将它们当作 1 本和余下的 2 本数学书逐一放在相邻的两本非数学书之间和两端的六个位置中的任意三个位置上，共有 A_6^3 种不同放法。由于放一起的 3 本数学书有 P_3 种不同的排列方式。所以由乘法原理和加法原理知，3 本数学书放一起，而另两本不放一起的放法共有 $(P_5C_5^3A_6^3)\cdot P_3$ 种。

类似地，3 本数学书放一起，另两本也放一起的放法共有 $(P_5C_5^3A_6^2)\cdot P_3P_2$ 种。故由加法原理知，恰有 3 本数学书放一起的所有不同放法共有 $(P_5C_5^3A_6^3)P_3+(P_5C_5^3A_6^2)P_3P_2$ 种。
即事件 B 含有 $P_5C_5^3(A_6^3+A_6^2P_2)P_3$ 个基本事件。再由古典概率定义得

$$P(B)=\frac{P_5C_5^3(A_6^3+A_6^2P_2)P_3}{P_{10}}=\frac{5}{14}$$