内 容 简 介

本书系统地论述由常微分方程定义的动力系统的周期解及其分支理论，介绍研究有关周期解及其各种分支现象的一般理论与方法，包括 Hopf 分支、退化 Hopf 分支，自治、周期系统周期解的局部分支，非双曲孤立闭轨及闭轨族在自治、周期扰动下的非局部分支，平面系统的 Hopf 分支、Poincaré 分支及同异宿分支等.

本书自成系统，从介绍最基本的定性理论入手，在介绍基本的定性方法与分支理论的基础上逐步深入地研究不同程度的退化分支现象. 本书可作为高等院校数学专业的研究生、教师及相关科学研究工作者的教学、科研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的周期解与分支理论/韩茂安著. —北京：科学出版社，2002

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-009809-9

Ⅰ. 动… Ⅱ. 韩… Ⅲ. 动力系统(数学)—周期解 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073357 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

2002年3月第一次印刷　　印张：15 1/4

印数：1—2 000　　字数：396 000

定价： 31.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉)

前　言

动力系统理论在20世纪60年代形成基本框架,到80年代才逐步完整起来,而动力系统分支理论的发展则稍缓慢,这是因为结构不稳定系统可以以多种形式出现分支现象,分支发生的层次也不尽相同,这导致分支理论的内容不断向纵向深入发展.作者于1983年在南京大学数学系开始接触分支理论领域,最初是参加由叶彦谦教授主持的、Jack K. Hale教授主讲的分支理论学习班,当时由于时间和能力所限,只是粗略地研读了Hale教授与周修义教授合著的分支理论专著“Methods of Bifurcation Theory”的中文油印本.直到1987年获得博士学位后才较系统、深入地研读了该书的原版,此后逐步熟悉了分支理论的基本内容与方法,特别是从1989年开始主持国家自然科学基金项目以来,在分支理论这片沃土上不断耕耘,并在微分方程周期解的Hopf分支、Poincaré分支、同异宿分支,调和解与亚调和解的共振分支,不变环面的分支等方面获得一系列的研究成果,在以上多方面,建立了判定周期解个数的一般方法,这些方面的部分成果,已在书《微分方程分支理论》(韩茂安、朱德明,煤炭工业出版社,1994)与《Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems》(Luo Dingjun, Wang Xian, Zhu Deming and Han Maoan, World Scientific, 1997)中出现.最近几年,在一些退化分支方面,有不少新成果面世.这些研究工作一是在理论上更深一层,二是出于实际应用的需要,例如,在研究二次系统极限环的个数时就出现多级的退化分支(包括Hopf分支、Poincaré分支及同异宿分支等),而且有一些退化分支至今也未得到满意的解决.当然,由于多项式系统的非线性项是有限的,其分支的退化级别也必定是有限的.在1997年初本人就开始筹划写一部专门讨论周期解的各种分支方法的著作,在以后几年的写作过

程中内容的选取和次序的安排曾有多次变动.现在虽然定稿并出版,但在内容安排、理论的深度和广度方面仍恐有许多不足.作者试图使本书具有以下三个方面的特点:一、较系统地介绍自治系统与周期系统周期解的各种分支方法,尤其是介绍在其他书中看不到的各种退化分支现象;二、在论证上自成一体,读者通过阅读本书能够迅速了解和掌握分支理论的新发展,并使得有兴趣的学者尽快进入分支理论的若干研究前沿;三、本书在最基本的理论基础上展开讨论,并着重介绍作者本人的研究成果.实际上,本书约半数内容是系统地总结作者最近五六年的研究成果,许多结果是本书独有的.

本书共分五章,现将各章内容简介如下:

第一章:主要是收集微分方程与奇点和极限环有关的定性理论与方法,包括有关初值解的基本定理,用来研究周期解分支的一致压缩映射原理和隐函数定理,双曲奇点的稳定流形与中心流形定理,研究解的稳定性的 Liapunov 方法,平面系统的指标公式,平面奇点类型的判别方法,无穷远奇点分析方法,规范型的理论与应用等.以上方面的理论和方法在本章均有较系统的介绍,但对多数定理并没有给出证明,因为这些定理的证明在很多书中都能找到.然而在应用有关理论与方法及引入新的方法讨论一些有研究背景的非线性系统的定性性质方面,均给出了详细的论证(例如周期线性系统周期解的范数估计、Liénard 方程细焦点的稳定性判定、若干系统规范型的进一步标准化等),这一部分均取自本人已发表的论文或者首次在本书出现.

第二章:较系统地论述高维自治与周期系统非局部周期解的分支.首先,不加证明地介绍了双曲闭轨的稳定流形定理,然后,对所研究的系统引入曲线坐标变换,对所获得的 Poincaré 映射或分支方程利用 Rolle 中值定理等分析工具给出一个或多个周期解的存在条件,在应用压缩映射原理讨论周期解的存在性时我们给出了可以测定保证周期解存在的小参数变化范围的方法,弥补了以往结果的不足,例如,可以证明线性系统

$$\ddot{x} + x = \cos^2 t + \varepsilon x \sin^2 t$$

当$|\varepsilon| < \frac{1}{2}$时有惟一的 π 周期解,环面系统

$$\dot{x} = \varepsilon[-\sin x + \cos t]$$

当$0 < |\varepsilon| \leqslant \frac{1}{3}$时(在环面上)恰有两个闭轨,且均为 2π 周期的.本章还研究了平面系统双曲闭轨的周期扰动,给出了次调和解的分支判据,以及寻求这些解随参数改变而变化的规律的方法,对高维可积自治系统的闭轨在自治或周期扰动下周期解的分支也进行了研究,获得了用于判定周期解存在与否的 Melnikov 函数,特别给出了利用同宿 Melnikov 函数决定次调和解的个数的方法.

第三章:主要研究一般的高维自治系统与周期系统的小振幅周期解,这些周期解在未扰动系统的给定解或奇点的小邻域内出现,称之为局部分支.这一章介绍研究这种周期解分支的两种方法,一是广为人知的 Liapunov-Schmidt 方法,二是鲜为人知但却易于接受的初等方法,用这两种方法不但可以研究经典的 Hopf 分支问题,而且还可用于一些退化的 Hopf 分支(即奇点余维数大于1),同时第二种方法又可用于研究具非半单特征值的线性系统的单参数闭轨族在自治扰动下的分支现象,这两种方法在建立决定周期解个数的分支函数或分支方程时各具特色.

上述三章的内容主要是论述高维自治或周期系统的局部与非局部周期解的分支理论,这些理论当然也适用于平面系统.然而,由于平面系统的特殊性,可对这类系统进行更深入的研究,获得更细致的成果,这就是在第四章与第五章所要做的工作.

第四章:引入了 Hopf 环性数、含闭轨族的开集的环性数及同宿轨、异宿轨的环性数的概念,并给出了用 Melnikov 函数及其他的附加条件来决定这几类环性数的一般方法.本书所考虑的扰动系统一般都含有多个参数,这与单参数扰动有本质的不同,例如,对方程

$$\dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + a_2 x^3 - a_3^2 x^5 + \varepsilon a_3 x^7), \quad \dot{y} = -x$$

来说，当 $a=(a_1,a_2,a_3)=0$ 时，出现全局中心，而当 $a\neq 0$ 且作为常量时，必存在 $\varepsilon^*(a)>0$，使当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon^*$ 时，原点的环性数为 2. 然而，把 a 当作参数，则当 $|\varepsilon|+|a|$ 充分小时，原点的环性数是 3. 同、异宿分支是第四章的难点，这一章给出决定同、异宿环稳定性的前三个量的计算公式. 讨论了这些奇闭轨在扰动下产生一个、二个或三个极限环的条件. 作为应用，讨论了出现于三维与四维系统余维二分支中两类含双参数的多项式系统极限环的全局惟一性问题.

第五章：继续研究平面系统的极限环. 首先介绍了旋转向量场理论，引入了新的成果，对一般的平面系统给出了极限环存在、不存在及惟一存在的判定条件，进一步研究了 Liénard 系统的 Hopf 分支、Poincaré 分支，以及给出了决定这类系统在整个平面上环性数的方法，例如，证明了五次系统

$$\dot{x} = y(Ny^2+1) - \varepsilon\left(x^5 + \sum_{i=1}^{4} a_i x^i\right), \quad \dot{y} = -x(1+bx^2)$$

（其中 $N\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 为常数，$\varepsilon\geqslant 0$ 充分小，a_i 为有界参数）的环性数为 2；n 次系统

$$\dot{x} = y - \varepsilon\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \quad \dot{y} = -(x+x^2)$$

的环性数为 $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$，而当 $\varepsilon=1$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为任意参数时，量 $\left[\frac{2n-1}{3}\right]$ 也是上述 n 次系统在原点的 Hopf 环性数.

限于作者的知识水平，与弱化 Hilbert 第 16 问题有关的二次系统极限环的分支、平面上含三个或更多个点的异宿环的扰动分支，以及空间同异宿分支等都没能在书中介绍.

作者从 1982 年以来一直得到叶彦谦教授的不断指导和帮助，作者也得到罗定军教授经常的帮助，本人也从主要合作者朱德明

教授那里得到不少帮助;自从作者于1996年参加国家自然科学基金重点项目以来,曾多次得到张芷芬教授和李承治教授的指导和关心,并就各种分支问题的难点和解决方法进行过多次有益的讨论.作者于1998～1999年在美国Georgia Institute of Technology访问期间,在科研和生活上都得到过Jack K. Hale教授的许多帮助;本书的初稿曾在动力系统研讨班及相关课程的教学中试用过多次,我的同事顾圣士、章仰文、汪静、向光辉、陈贤峰及研究生孟争、吴玉海、陈华、林鹰等曾研读过该书的部分章节并提出了许多修改建议,作者借此书出版之际一并向以上各位师长、挚友、同事及研究生们表示衷心的感谢.谢谢我的研究生孟争、吴玉海、陈华、林鹰、王宗勇、金雷,他们在紧张的学习之余帮我打出了全部书稿.感谢上海交通大学校领导和应用数学系领导给我提供良好的工作环境.感谢国家自然科学基金委员会对作者研究工作的一贯支持.感谢国家科学技术学术著作出现基金对本书出版的支持.感谢科学出版社吕虹编辑对出版本书的辛勤工作.最后,感谢我的妻子林国风和儿子韩通对我一贯的支持和帮助,他们最知我感恩的心.

作　者

于上海交通大学

目　　录

第一章　奇点及其局部性质

微分方程最基本的解是定常解,对自治系统而言,定常解对应着微分方程在相空间中的奇点.研究奇点的局部性质是微分方程定性理论最基本的任务.本章主要讨论自治系统的局部性质,并给出有关奇点定性分析的理论与方法.首先从线性系统开始.

§1　线性系统

1.1　常系数线性系统

常系数齐次线性系统的一般形式是

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

其中 A 是 n 阶矩阵,其元素为实数.

定义 1.1　如果 A 的行列式 $\det A \neq 0$,则称 $x=0$ 为(1.1)的初等奇点;如果 A 没有具零实部的特征根,则称 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点;如果 A 的特征值均有负(正)实部,则称 $x=0$ 为(1.1)的汇(源),如果 $x=0$ 为(1.1)的双曲奇点且不是汇和源,则称其为(1.1)的鞍点.

易见双曲奇点必是初等的,反之未必.又对 $n=2$ 的情况,如所周知,(1.1)的汇(源)是稳定(不稳定)的焦点或结点,而此时非双曲的初等奇点是中心奇点.

线性方程(1.1)的通解具有形式 $e^{At}x$,其中

$$e^{At} = \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i\,!} A^i t^i .$$

每个解在 $R \times R^n$ 空间中表示一条曲线,该曲线在相空间 R^n 中的投影为(1.1)的轨线.

由矩阵理论,存在可逆矩阵 T,使得线性变换

$$T: y = Tx. \tag{1.2}$$

把(1.1)化为标准型

$$\dot{y} = By, \tag{1.3}$$

其中 $B = TAT^{-1}$ 为 A 的实 Jordan 标准型,因此它可写成下述块对角形:

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-, B_0), \tag{1.4}$$

其中 $B_+(B_-, B_0)$ 的特征值具有正实部(负实部、零实部),于是(1.3)的基本解矩阵 e^{Bt} 可写为

$$e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, \quad e^{B_- t}, \quad e^{B_0 t}). \tag{1.5}$$

如果 $x = 0$ 为双曲奇点,则有

$$B = \mathrm{diag}(B_+, B_-), \quad e^{Bt} = \mathrm{diag}(e^{B_+ t}, e^{B_- t}),$$

且 $x = 0$ 为(1.1)的汇(源)当且仅当 $B = B_-(B = B_+)$. 由线性系统解的结构或由指数矩阵的定义知

$$\lim_{t \to +\infty} e^{B_- t} = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} e^{B_+ t} = 0,$$

且趋于零的方式是指数式的. 若 B_- 本身是一个 Jordan 块,则可设

$$B_- = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}, \quad \lambda < 0,$$

或

$$B_- = \begin{pmatrix} C & I & & \\ & \ddots & I & \\ & & \ddots & I \\ & & & C \end{pmatrix}_{2k\times 2k}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a < 0,$$

此时有

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

或

$$e^{B_- t} = \begin{pmatrix} D & Dt & \cdots & \dfrac{Dt^{k-1}}{(k-1)!} \\ & D & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & Dt \\ & & & D \end{pmatrix} e^{at},$$

$$D = e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

同样,若 B_+ 或 B_0 本身是一个 Jordan 块,则 $e^{B_+ t}$ 与 $e^{B_0 t}$ 有与 $e^{B_- t}$ 类似的表达式.

对任意常向量 $y \in R^n$,与(1.4)的分块相应地可作分解 $y = (y_+, y_-, y_0)^T$,使 $By = (B_+ y_+, B_- y_-, B_0 y_0)^T$,其中上标“$T$”表示转置.令 E^u,E^s 与 E^c 表示 R^n 的线性子空间,且满足

$$TE^u = \{y \in R^n \mid y_- = y_0 = 0\},$$

$$TE^s = \{y \in R^n \mid y_+ = y_0 = 0\},$$

$$TE^c = \{y \in R^n \mid y_- = y_+ = 0\}.$$

由(1.5)易知集合 TE^u, TE^s 与 TE^c 是(1.3)的不变集,换句话说,这三个集合各由(1.3)的整条轨线组成.不变集 TE^u(TE^s)的特征是:对(1.3)的任一解 $e^{Bt}y$,当且仅当 $y \in TE^u$($y \in TE^s$)时有 $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{Bt}y = 0$($\lim\limits_{t \to +\infty} e^{Bt}y = 0$).分别称 TE^u, TE^s 与 TE^c 为(1.3)的不稳定集、稳定集与中心集.注意到

$$e^{At} = T^{-1}e^{Bt}T,$$

可知不变集 TE^u, TE^s 与 TE^c 在变换(1.2)下的原像 E^u, E^s 与 E^c 即为原系统(1.1)的不稳定集、稳定集、中心集.

定义 1.2 如果存在同胚 $h: R^n \to R^n$,使

$$h(e^{At}x) = e^{Lt}h(x),$$

其中 L 为 n 阶实矩阵,则称 n 维线性系统(1.1)与下述 n 维线性系统

$$\dot{z} = Lz, \quad z \in R^n \tag{1.6}$$

为拓扑共轭的.

可证(见[3]).

定理 1.1 设原点为(1.1)与(1.6)的双曲奇点,则(1.1)与(1.6)为拓扑共轭的当且仅当矩阵 A 与 L 有相同个数的具正实部的特征根.

例 1.1 考虑三维线性系统

$$\dot{x} = ax - y, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = -z, \tag{1.7}$$

易知其基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix} e^{at}\cos t & -e^{at}\sin t & 0 \\ e^{at}\sin t & e^{at}\cos t & \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

设 $a>0$,则 E^u 为(x,y)坐标面,E^s 为 z 轴,(1.7)的相图如图 1.1 所示,图中箭头表示 t 增加时轨线上动点的运动方向.请读者画出当 $a<0$ 或 $a=0$ 时(1.7)的相图.

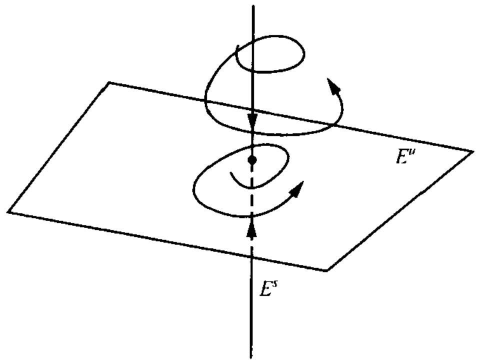

图 1.1 (1.7)的相图($a>0$)

1.2 周期线性系统

考虑非自治线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1.8}$$

其中 $A(t)$为 n 阶连续实矩阵,且存在 $T>0$ 使 $A(t+T)=A(t)$ 对一切 $t\in R$ 成立.称(1.8)为齐次周期线性系统.设 $X(t)$表示(1.8)的基本解矩阵,且满足 $X(0)=I_n$,此处 I_n 为 n 阶单位矩阵.利用解的存在惟一性知

$$X(t+T) = X(t)X(T).$$

引理 1.1 存在矩阵 B 与 S,且 S 为实的,使

$$X(T) = e^{BT}, \quad X^2(T) = e^{2ST}.$$

证明 不妨设 $X(T)$为 Jordan 标准型且只含一个 Jordan 块 C,即设

$$X(T) = C = \lambda I_n + R, R = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 λ 为复数,由 R 的形式知存在自然数 m,使对 $k>m$ 有 $R^k=0$.令

$$BT=(\ln\lambda)I_n+Q,\quad Q=-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j\lambda^j}(-R)^j,$$

则 $e^{BT}=\lambda e^Q=\lambda\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}$.由于对 $x\in R$,$|x|<1$,有

$$\ln(1+x)=\sum_{j\geqslant 1}(-1)^{j+1}\frac{x^j}{j}\equiv q(x),$$

因此

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{q^k(x)}{k!}=e^{q(x)}=1+x.$$

形式上利用上式,并注意到 $q\left(\frac{R}{\lambda}\right)=Q$ 且当 $k>m$ 时 $Q^k=0$,可得

$$I_n+\frac{R}{\lambda}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{Q^k}{k!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{Q^k}{k!},$$

故有 $e^{BT}=\lambda\left(I_n+\frac{R}{\lambda}\right)=C=X(T)$.

由 $e^{BT}=X(T)$,取共轭得 $e^{\bar{B}T}=X(T)$,于是 $e^{BT}\cdot e^{\bar{B}T}=e^{(B+\bar{B})T}=X^2(T)$,令 $S=\frac{1}{2}(B+\bar{B})$,则 S 为实矩阵.证毕.

引理 1.2(Floquet 定理) 存在非奇异的连续 T 周期矩阵 $P(t)$ 与 $2T$ 周期实矩阵 $R(t)$ 使

$$X(t)=P(t)e^{Bt},\quad X(t)=R(t)e^{St}.$$

此外,周期变换 $x=P(t)y$,$x=R(t)z$ 分别把(1.8)化为常系数系统 $y=By$ 与 $z=Sz$.

证明 令 $P(t)=X(t)e^{-Bt}$,$R(t)=X(t)e^{-St}$,由引理 1.1 可知 P,R 满足所述性质.证毕.

矩阵 B 的特征值 λ 称为(1.8)的特征指数,而矩阵 $X(T)=e^{BT}$ 的特征值 $\mu=e^{\lambda T}$ 称为(1.8)的特征乘数.如果(1.8)的特征指数均具有非零实部,则称 $x=0$ 为(1.8)的双曲零解.

引理 1.3 周期系统(1.8)有 T 周期解($2T$ 周期解)当且仅当(1.8)以 $\mu=1(\mu=-1)$ 为特征乘数.

证明 首先证明存在整数 k 使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$(其中 $i=\sqrt{-1}$)为(1.8)的特征指数当且仅当(1.8)有形如 $e^{\lambda t}p(t)$ 的解,其中 $p(t)\neq 0$ 为 T 周期的向量函数.

事实上,若 $e^{\lambda t}p(t)$ 为(1.8)的解,则由引理 1.2 存在 $x_0\neq 0$ 使 $e^{\lambda t}p(t)=P(t)e^{Bt}x_0$,将 t 换为 $t+T$ 并由周期性易知

$$P(t)e^{Bt}[e^{BT}-e^{\lambda T}I_n]x_0=0,$$

故有 $\det(e^{BT}-e^{\lambda T}I_n)=0$,因此利用 B 的 Jordan 型易知必存在 B 的特征值 λ',使 $e^{\lambda T}=e^{\lambda' T}$,从而存在整数 k,使 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i=\lambda'$ 为 B 的特征值.反之,设 $\lambda+\frac{2k\pi}{T}i$ 为 B 的特征值,仍利用 B 的 Jordan 型知存在 $x_0\neq 0$ 使 $e^{Bt}x_0=e^{\left(\lambda+\frac{2k\pi}{T}i\right)t}x_0$,故解 $e^{\lambda t}(e^{\frac{2k\pi i}{T}t}P(t)x_0)$ 具有所需要的形式.

现在注意到 $\mu=1(\mu=-1)$ 为(1.8)的特征乘数当且仅当(1.8)以 $\lambda=\frac{2k\pi}{T}i\left(\lambda=\frac{(2k+1)\pi}{T}i\right)$ 为特征指数,其中 k 为某整数.于是由前面所证结论知后者成立当且仅当(1.8)有形如 $p(t)$ 的 T 周期解($e^{\pi it/T}p(t)$ 的 $2T$ 周期解).证毕.

引理 1.4 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为(1.8)的特征乘数,则

$$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n=\exp\int_0^T \mathrm{tr}A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由行列式的求导法则可证 $\det X(t)$ 满足一阶微分方程 $\dot{u}=[\mathrm{tr}A(t)]u$,因此有(Liouville 公式)