高等学校教材

高等数学

上册

（文科类）

罗定军　盛立人　主编

化学工业出版社
教材出版中心

高 等 学 校 教 材

高等数学（文科类）

上　　册

罗定军　盛立人　主编

施建兵　张亚图　叶惟寅　沈兴钧　编

化学工业出版社

教 材 出 版 中 心

·北　　京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.上册/罗定军，盛立人主编.--北京：化学工业出版社，2001.6
高等学校教材.文科类
ISBN 7-5025-3276-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①罗…②盛… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 032739 号

高等学校教材
高等数学（文科类）
上 册
罗定军 盛立人 主编
施建兵 张亚图 叶惟寅 沈兴钧 编
责任编辑：唐旭华
责任校对：顾淑云
封面设计：田彦文
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
发行电话 （010）64918013
http //www cip com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11 字数 297 千字
2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月北京第 1 次印刷
印 数：1—6000
ISBN 7-5025-3276-5/G・853
定 价：18.00 元

序　　言

随着科学技术的快速进步，我国的高等教育事业正在迅猛发展，有愈来愈多的大学生需要学习高等数学，特别是文科各系的这种需求增幅更大．目前国内已有众多种类的工科高等数学教材出版，与之相比，可供文科类数学使用的教材却相当少．为了适应新的需求，在化学工业出版社的组织与帮助之下，南京师范大学、安徽大学、南京工业大学等院校的有关教师（他们中有不少人曾长期从事这方面的教学工作）编写了这部适用于文科学生，以及工科院校经济管理系学生使用的高等数学教材．

这部教材立足于适应文科学生的特点，尽可能做到通俗易懂和少而精．它用数学中分析处理各类应用问题的思想把高等数学里的一些基本概念和方法，通过浅显的语句表述出来．特别是，本书还配备有较多的例题，其中不少就是把应用问题数学模型化之后再用高等数学方法加以解决的．这使本书增加了可读性以及对学生的吸引性．

与现有的同类教材相比，本书的篇幅很紧凑，上下两册共约 60 万字左右．上册的微积分（包括微分方程初步）预计在 90 学时内即可讲完．它较好地体现了少而精和重视应用的特色．至于应用规划这一部分，则列举了不少数学应用的著名范例．尽管没有严格的数学推导，但却能用通俗的语言把这些问题叙述得很有趣味，使用本教材时如来不及讲完它，不妨留下一些给学生自己阅读，以增加他们的阅读能力和对数学的兴趣．

综上所述，我认为这是一部颇具特色的文科类高等数学教材，相信在它问世之后定会受到广大师生的欢迎．

叶彦谦

2000 年 12 月于南京大学

编 者 的 话

近年来我国高等教育大幅度扩大招生规模，使得需要学习高等数学的大学生人数与日俱增. 与之相映，可供文科（包括工科院校的经济管理类）各专业使用的高等数学教材则相当匮乏. 为此，在化学工业出版社的组织协助下，南京师范大学、安徽大学、南京化工大学、南通师范学院和江苏教育学院的部分教师着手编写了这部适合上述文科类专业使用的高等数学教材.

在编写过程中，我们较充分地交流了彼此的教学心得与体会，分析文科类学生的特点，认为他们主要是通过这一课程的学习，掌握高等数学中最基本的概念与思想方法，特别应初步学会用数学方法去分析处理各类应用问题. 因此，编写这部教材应尽可能用直观的、通俗的方式表述基本数学概念，贯彻宁可少些，但要好些的原则，多配备例题，以阐明分析问题的思路与解题方法，便于学生弄懂并掌握基本概念与方法. 可以说，这些基本思想贯穿于编写这本教材的整个过程.

这部教材分上下两册. 上册为第一篇，内容包括微积分与微分方程，其中第一章到第四章由南京师范大学施建兵、罗定军执笔，第五章到第七章由江苏教育学院张亚图、南京师范大学叶惟寅、沈兴钧执笔，上册由罗定军统稿. 下册分为三篇，即第二篇线性代数，由南通师范学院沈苏林、吴永康执笔，第三篇概率和统计，由南京工业大学郭金吉、甘泉，安徽大学盛立人执笔，第四篇实用规划，由盛立人执笔，下册由盛立人统稿. 每章最后附有适量的练习题，答案则分列于上、下册的最后. 部分答案由南京师范大学研究生袁蔚莉、肖敏帮助完成，顺致谢意.

本教材篇幅紧凑，第一篇到第三篇 160 学时可讲完，第四篇则较适合于文史哲法学类专业的学生，使用时可灵活掌握，依各校具

体情况定夺，甚至可由学生自己阅读．这部分的特点是不追求数学的严格论证，主要是想通过历史上用数学解决社会、自然现象中的问题的一些经典例子来说明数学在应用中的重要性，以便更好地培养文科学生对数学的兴趣．总而言之，希望通过我们的努力使这部教材更具有吸引性与可读性．书中少数带“＊”号部分为选学内容．

衷心感谢南京大学叶彦谦教授对本书的关心、帮助，并亲自为此书作序．

限于编者的水平，加之编写时间的紧迫，书中肯定会出现不少谬误与疏漏之处，敬请广大读者不吝指正．

编者

2001年元月

目 录

第一篇 微 积 分

第一章 一元函数 …… 1

§1 函数概念 …… 1

§2 反函数与复合函数 …… 8

§3 初等函数 …… 10

练习 1 …… 17

第二章 极限与连续 …… 21

§1 极限的定义与性质 …… 21

§2 极限的计算、两个重要极限 …… 33

§3 函数的连续性 …… 42

§4 闭区间上连续函数的性质 …… 50

练习 2 …… 51

第三章 一元函数微分学 …… 56

§1 导数与微分的概念 …… 56

§2 求导数与微分的法则 …… 64

§3 微分中值定理与洛必达法则 …… 80

§4 导数的应用 …… 90

练习 3 …… 113

第四章 一元函数积分学 …… 122

§1 定积分的概念 …… 122

§2 定积分的性质 …… 128

§3 不定积分及其计算 …… 135

§4 定积分的计算 …… 150

§5 定积分的应用 …… 164

练习 4 …… 176

第五章 无穷级数 …… 182

§1　无穷级数的敛散性 …………………………………………………… 182
§2　数项级数 ………………………………………………………………… 189
§3　幂级数 …………………………………………………………………… 201
§4　初等函数的幂级数展开 ……………………………………………… 210
§5　无穷级数的应用 ……………………………………………………… 221
练习 5　………………………………………………………………………… 226
第六章　多元微积分 ………………………………………………………… 229
§1　多元函数的基本概念 ………………………………………………… 229
§2　二元函数的极限和连续性 …………………………………………… 235
§3　偏导数与全微分 ……………………………………………………… 239
§4　二元函数微分法的应用 ……………………………………………… 251
§5　二重积分的概念 ……………………………………………………… 256
§6　二重积分的计算 ……………………………………………………… 261
练习 6　………………………………………………………………………… 274
第七章　微分方程 …………………………………………………………… 277
§1　微分方程及其解 ……………………………………………………… 277
§2　初等积分法 …………………………………………………………… 281
§3　常系数线性微分方程 ………………………………………………… 297
§4　差分方程初步 ………………………………………………………… 307
练习 7　………………………………………………………………………… 322
练习题答案 …………………………………………………………………… 325

第一篇 微 积 分

第一章 一 元 函 数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则着眼于研究变量以及变量之间的变化的相互关系——函数关系. 为便于承上启下，本章将在中学数学的基础上对一元函数的概念作出简要的复习，有些概念则适当地深化.

§1 函 数 概 念

1. 常量与变量

现实世界中许多事物的变化常常用数量来体现，如人体的高度、货物的重量、环境的温度、家庭的收入与支出、企业的利润等等. 其中有的量在考察的过程中不发生变化，而保持一个定值，这种量称为**常量**；还有一些量在考察过程中是变化着的，它们可以取各种不同的数值，这些量就称为**变量**. 例如，一架客机从甲地直飞乙地的飞行过程中，乘机人数是一个常量，而飞行高度、飞行距离等则为变量. 以下常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量.

2. 集合与数集

集合是数学中的基本概念之一，它在现代数学中起着非常重要的作用. 人们在认识客观事物的过程中，常根据研究对象的不同特性把它们分类进行研究. 例如，某班级的全体学生，某商场仓库内某种货物的全体，所有的有理数，平面 (x, y) 上的直线 $x+y-1=0$ 上的所有点等等，都分别组成一个集合. 一般地说，集合是指具有某种特定性质的研究对象的全体，组成此集合的每一个对象称为该集合的**元素**. 通常用大写字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、

b、c、x 等表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素则记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素则记作 $a\notin A$，或 $a\overline{\in} A$.

由有限个元素 a_1，a_2，…，a_n 组成的集合 A，可用穷举法表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$．一般地，具有性质 P 的元素 x 的全体所组成的集合 M 可表示为：$M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$.

本书研究的对象是函数，因此只涉及到数的集合．简称为**数集**.并主要限于实数集 R，R 的常用子集有自然数集 N、整数集 Z 和有理数集 Q 以及下面所说的区间等.

实数集R与数轴相对应．取一条水平直线，在其上取定一点O作为原点，规定一个正方向（如图 1.1 中箭头向右所指）及一个单位长度(图 1.1 中线段$\overline{O1}$)，此直线称为数轴．其上每一点 p 有坐标 x，即$\overline{Op}$的有向长度．这样实数集 R 就与此直线(称为 x 轴)上的点一一对应．它就是我们所研究的各种变量 x 的变化范围.

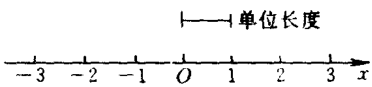

图 1.1

x 的**绝对值**记为$|x|$,它定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } 0\leqslant x \text{ 时}, \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

以后常常要用到它以及它所涉及的几个不等式（证明从略）

$$0\leqslant|x|,$$
$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,$$
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

区间也是一个常用的数学名词．通常把实数集 R 记为**无穷区间** $(-\infty,+\infty)$．有限的**闭区间** $[a,b]$ 和**开区间** (a,b) 分别为如下的数集

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

有时还用到半开半闭的区间（包括一端为$-\infty$或$+\infty$)：$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 和 $(-\infty,b)$，它们所代表

的集合的含意都是很明显的.

邻域的概念也是常用的. 给定一点 x_0（即 x_0 为一实数）及正数 δ，点 x_0 的 δ 邻域是指以 x_0 为中心，长度为 2δ 的**开区间**

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

在下面的极限理论中还常用到 x_0 的**空心** δ 邻域，它是指把上述区间的中心点 x_0 挖去所得的两个开区间的并集，即

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x : 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

例如 $x_0=1,\delta=\frac{1}{2}$. 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left\{x \,\middle|\, |x-1|<\frac{1}{2}\right\}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，空心邻域则为 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\cup\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$.

3. 一元函数的定义

在现实世界中，一些客观事物所反映出的数量的变化往往不是孤立的，它们常相互依赖并按一定的规律变化，这就是**函数关系**. 先举几个例子.

例 1 由平面几何可知，圆的面积 S 与其半径 r 之间有如下公式：

$$S=\pi r^2.$$

它反映了面积 S 如何随 r 的变化而变化.

例 2 假设某商品的单价为 0.5 元，则该商品的销售量 x（件）和销售收入 y（元）之间的关系是

$$y=0.5x.$$

如果每件商品的成本为 a 元，则利润 p（元）由下式给出

$$p=(0.5-a)x.$$

例 3 自由落体运动. 设如图 1.2，取坐标轴指向地心. 时刻 $t=0$ 时物体从原点 O 自由落下，则由中学物理可知下落的距离 S 与时间 t 的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

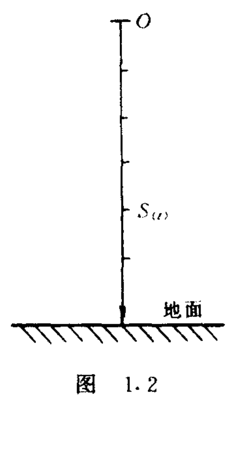

图 1.2

其中 g 为重力加速度. 设物体着地时的时刻为 T，则上述关系式对 $[0, T]$ 内的 t 值为有效.

上述几例都反映出变量之间的相互依赖关系. 这些关系确定了相应的法则，使其中一个变量在一定范围内取值时，另一变量都有相应的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是数学上的一元函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，数集 $D\subseteq R$，若有确定的法则 f，使对于任一数 $x\in D$，总有变量 y 的一个确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中称 x 为**自变量**，y 为**因变量**或**函数**. 数集 D 称为此函数的**定义域**，而数集 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为此函数的**值域**.

在实际问题中，函数的定义域可根据实际意义来确定，如在例 1、例 2 中，$D=(0,+\infty)$，在例 3 中，$D=[0,T]$. 而数学中的函数 $y=f(x)$ 的定义域则是使表达式 $f(x)$ 有意义的自变量 x 的取值范围. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $D=[-1,1]$，$y=\log_a x$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$.

上述定义中所说的是只有一个自变量的情形，这时的函数就称为一元函数. 在例 2 中若考虑到原料价格的上涨，则成本 a 也就不再是常量，而是一个变量，因此这时变量 p 就依赖于两个量 x 和 a 的变化而变化，出现了两个自变量的情形，作为它们的函数 p 就称作**二元函数**. 依此还可以出现更多个自变量的情形，自变量个数大于 1 时所对应的函数关系称为多元函数. 在第一篇的前五章我们只讨论一元函数，有时就简称为函数.

在平面直角坐标系 $\{Oxy\}$ 中（即取相互垂直而相交于 O 的水平和铅直直线作坐标轴，x 轴水平指向右方，y 轴铅直而指向上方，如图 1.3 所示），这时平面点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形，在通常情况下它对应于 (x, y) 平面上的一条曲线.

例 4 取 x 的绝对值所得的函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & 0\leqslant x,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

显然它也可表示为 $y=\sqrt{x^2}$，该函数的图形如图 1.3 所示.

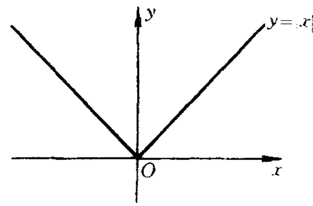

图 1.3

有时一个函数也可以在其自变量的不同的变化范围内用几个不同表达式来确定，这种函数常称为**分段函数**.

例 5 函数

$$y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

其定义域为 $[-1,1]$，对每一 $x\in[-1,1]$，有一个确定的 y 值与之对应，它的图形如图 1.4.

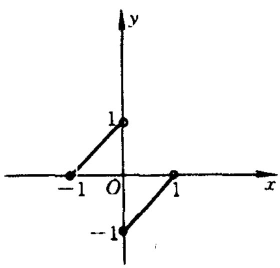

图 1.4

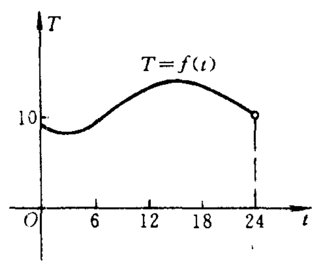

图 1.5

在某些实际问题中，函数关系可由仪器测定描出其图形，但不一定能给出精确的数学表达式. 有时也可用列表的方法给出.

例 6 某城市某日的气温 T(℃)和时间 t(小时,h)的关系 $T=T(t)$由气温自动记录仪描出的一条曲线确定，如图 1.5.

例 7 某商场 1999 年上半年各月份（用 t 表示）毛线的零售量 S（千克，kg）由下表给出：

t	1	2	3	4	5	6
S	186.5	203.4	71.2	64.8	25.7	10.9

则 S 随 t 变化的关系由上表确定，函数 $S=S(t)$的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 8 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域.

解 由反三角函数与对数的定义可知

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leqslant 1,\quad 0<3x-2,\quad 3x-2\neq 1.$$

由此三式可以解得

$$-5\leqslant x-1\leqslant 5,\quad \frac{2}{3}<x,\quad x\neq 1.$$

因此定义域 $D=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,6]$.

例 9 设 $f(x)=x^2$，求 $f(2)$、$f(a)$、$f(x+1)$、$f\left(-\dfrac{1}{t}\right)$，$f(f(x))$.

解 $f(2)=2^2=4,f(a)=a^2,f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1,$

$$f\left(-\frac{1}{t}\right)=\left(-\frac{1}{t}\right)^2=\frac{1}{t^2},f(f(x))=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4.$$

4. 函数的几种特性

考虑函数 $y=f(x)$,其定义域为 $D\subseteq R$.

(1) 奇偶性 设 D 关于原点为对称，故 $x\in D$ 时 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**. 例如在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=x^2$ 为偶函数，$y=x^3$ 为奇函数. 易见偶函数的图形关于 y 轴为对称，奇函数的图形则关于原点对称.

(2) 周期性 在中学数学课中就已经熟悉，三角函数具有周期性，如 $\sin x$，$\cos x$ 以 2π 为周期，$\tan x$，$\cot x$ 以 π 为周期. 一般地，考虑 D 上定义的函数 $f(x)$，若存在不为零的常数 l，使对任意 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$为**周期函数**，l 称为 $f(x)$的周期. 通常所说的周期是指最小周期，即使上式成立的最小正数 l. 对周期函数来说，只要画出它在 $[0,l]$ 内的图形，把它上面的每一点一次次水平地向左、向右移动距离 l，即可得出整个

图形.

(3) 有界性　对数集 $X\subseteq D$,若存在正常数 M,使对一切 $x\in X$,均有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在集合 X 上**有界**;如不存在使上式成立的 M,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 例如 $f(x)=\sin x$,因 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上有界,但在 $(0,1]$ 上无界,因为对任何正数 M,总可取 $x>0$ 足够小,使 $M<\frac{1}{x}$. 在 (x,y) 平面上,有界函数的图形限制在两直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 所界定的带形区域内. 无界函数的图形在铅直方向则不存在有限的界限.

(4) 单调性　取定子区间 $I\subseteq D$,若对任意 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad 或\quad (f(x_2)<f(x_1)),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加的**(或**单调减少的**). 从函数曲线来看,沿着 x 增加的方向,单调增加的函数的曲线向右上方跑(上升的),单调减少函数的曲线则是下降的. 例如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少,而在 $(0,+\infty)$ 上则单调增加. $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是单调增加函数.

例 10　讨论函数

$$y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\quad (a\ 为常数,1<a)$$

的上述诸性质.

解　此函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 由

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{a^{-x}+a^x}=-f(x)$$

可知它是奇函数. 但不具有周期性. 对任意 x,有

$$|f(x)|=\left|\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\right|\leqslant\frac{a^x+a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=1,$$

故为有界函数. 又对任意 $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a^{x_2}-a^{-x_2}}{a^{x_2}+a^{-x_2}}-\frac{a^{x_1}-a^{-x_1}}{a^{x_1}+a^{-x_1}}$$

$$=\frac{2(a^{x_2-x_1}-a^{x_1-x_2})}{(a^{x_2}+a^{-x_2})(a^{x_1}+a^{-x_1})}>0,$$

因此 $f(x)$ 是单调增加的.

在第三章学过微分法以后利用导数可以给出判别函数单调性的简易方法.

§2 反函数与复合函数

1. 反函数

在函数关系中，自变量与因变量可以是相对的. 如在上一节的例 2 中销售收入与销售量的依赖关系为 $y=0.5x$，若把 x 解出得 $x=2y$，则 x 就成为 y 的函数. 这时 y 就成为自变量，而 x 成为因变量. 后一函数就视为前一函数的反函数，或者说，他们互为反函数. 一般地有下述定义.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 若对每一 $y\in Z$ 都有 D 中惟一的一个值 x，使得 $f(x)=y$，则它在 Z 上确定了 x 为 y 的一个函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in Z.$$

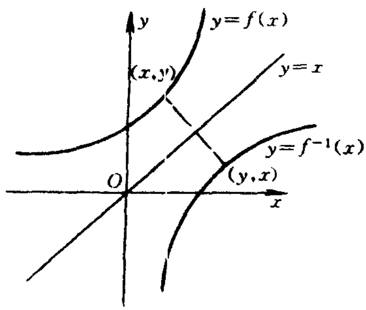

图 1.6

习惯上我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因而常把 f^{-1} 所代表的函数关系写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 由此可见，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1.6. 它也充分地说明了 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

给定了函数 $y=f(x)$，$x\in D$，只要 $f(x)$ 在 D 上是一一对应的，它就存在反函数. 单调函数是一一对应的，因此单调函数必存在反函数，它仍然为单调的，且

$f(x)$与$f^{-1}(x)$同时为单调增加，或同时为单调减少.

例 1 $y=3x-1$为单调增加函数，显然它的反函数为$y=\frac{x+1}{3}$，仍然是单调增加的.

例 2 $y=x^2$在R上不是一一对应的，因为此函数的值域$Z=[0,+\infty)$，对每一$y\in Z$有$\pm\sqrt{y}$两个值与之对应. 从而它没有反函数. 但若把它分成两个单调函数：$y=x^2$，$x\in(-\infty,0]$和$y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$，如前所述它们都是单调函数，其反函数分别为$y=-\sqrt{x}$，$0\leqslant x$和$y=\sqrt{x}$，$0<x$.

例 3 求$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数.

解 把上式改写为$e^{2x}-2ye^x-1=0$，将其视为e^x的二次方程，可解出$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$. 由于$0<e^x$，故右端的负号应舍去. 得到$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$. 从而所求的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

2. 复合函数

定义 1.3 设有两个函数$y=f(u)$，$u\in U$和$u=\varphi(x)$，$x\in X$. 若后一函数的值域$\varphi(X)\subseteq U$，则对每一$x\in X$，有$u=\varphi(x)\in U$与之对应，而对这个u，依前一函数关系又有惟一的$y=f(u)$与之对应. 这样对$x\in X$，就有惟一的$y=f(\varphi(x))$与之对应. 从而$f(\varphi(x))$构成了y依赖于x的一个函数关系，把它称为$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$两函数的**复合函数**. 其中u称为**中间变量**.

在函数研究中，复合函数的概念是非常重要的. 一个形式复杂的函数往往可以视为两个或更多个简单函数（如下一节所介绍的基本初等函数）复合而成，这样在后面对之求极限、求微分或导数、求积分时就可以有效地进行. 因此要学会如何把复杂函数分解为一些简单函数的复合. 这就好比脱衣服一样要由外到内一层层脱下来才行.

例 4 分别指出函数$y_1=\arccos(2x+1)$，$y_2=\log_a\sin\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$