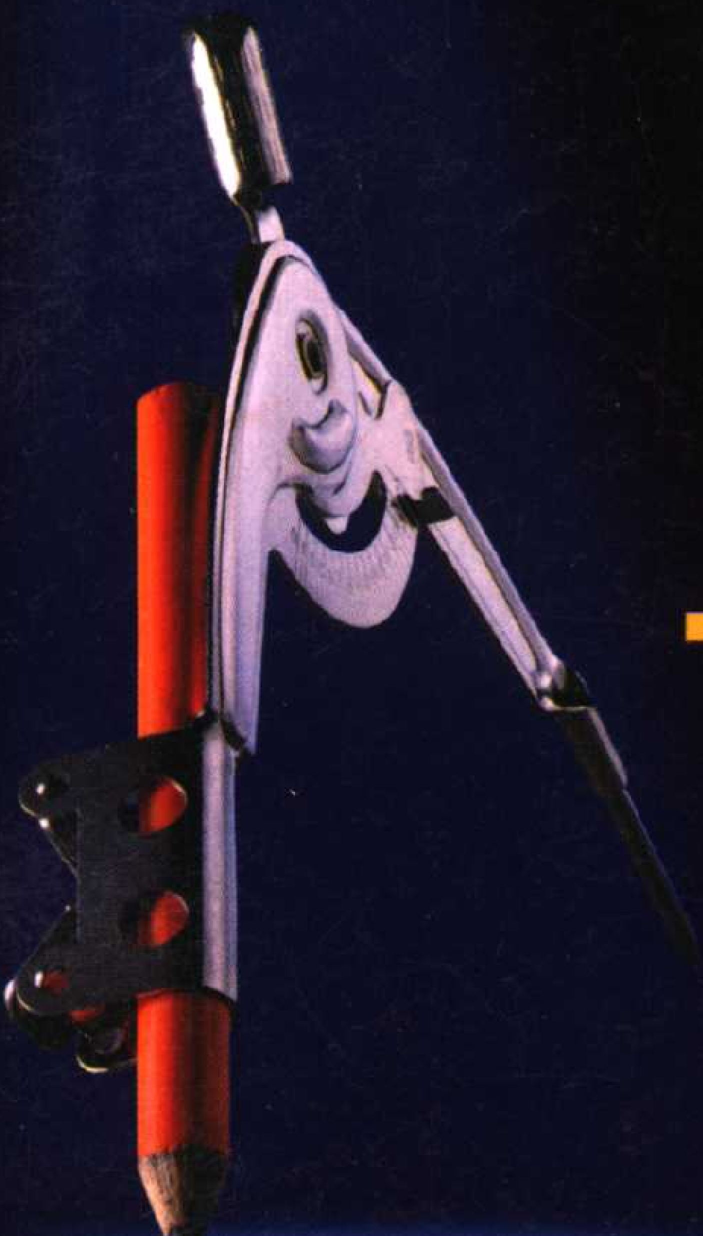
高考一典通

数学



少年儿童出版社

高考一典通

数　　学

时风林(主编)　沈子兴
郑瑞岳　　　　焦　勤　编著

少年儿童出版社

高考一典通

数学

时凤林(主编) 沈子兴 郑瑞岳 焦勤 编著

书生等 插图

倪基民 装帧

责任编辑 周玉洁 美术编辑 倪基民

少年儿童出版社出版发行	开本 890×1240 1/64
上海延安西路 1538 号	印张 6.875
邮政编码 200052	字数 239,000
全国新华书店经销	2002 年 8 月第 1 版
少年儿童出版社排版	2002 年 8 月第 1 次印刷
上海市委党校印刷厂印刷	印数 1-10,500

网址：www.jcph.com

电子邮件：jcph@jcph.com

ISBN7-5324-5013-9/G·1652(儿) 定价:12.00 元

目录 Mulu

第一部分 代　数

第二部分 立体几何

第三部分 解析几何

第四部分　高考新题型

第一部分

代　　数

1—1　集合与函数

【考点】

★★★★1. 熟练掌握集合的表示及运算;命题的四种形式及充分条件、必要条件的判定.

★★★★★2. 熟练掌握求函数定义域、值域及函数解析式的基本方法;掌握函数单调性、奇偶性和周期性的概念和判定方法.对于重要的基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数等,要熟悉它们的定义、性质和图像,并能运用这些知识解决有关问题.

★★★★★3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$在函数中的地位极为重要;一元二次方程的实根分布,一元二次不等式的求解;直线与二次曲线的位置关系,经常划归为二次函数问题处理,因此应熟记它的图像和性质及学科内的综合运用.

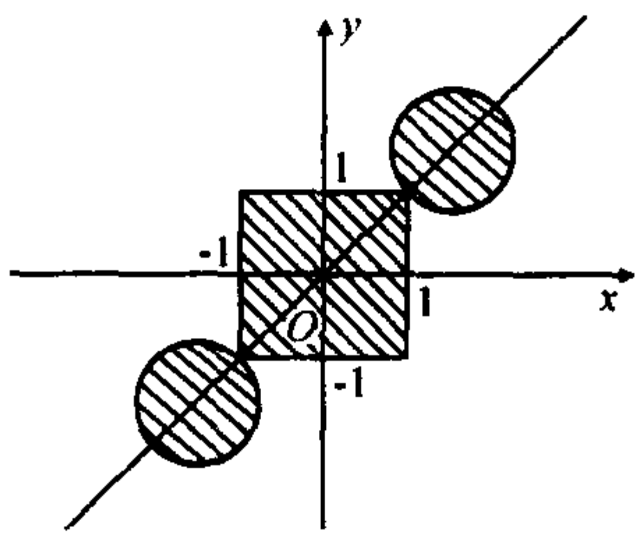
★★★★4. 深刻领会函数思想的实质,强化应用意识,高考中应用问题考查力度不断加大,选用的试题大多要用到函数的知识和方法才能正确解答,因此一定要加强应用意识,不断提高自身分析问题、解决问题的能力.

【题典】

[例题 1]　设 $A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,求 a 的范围.

分析：集合 A、B 分别表示直角坐标系中的两个点集，这类问题通常是画出图形，利用图形间的关系刻划两集合间的关系.

解答：如图，集合 A 是中心在原点，边长为2的正方形的边界和内部的点的集合，而集合 B 是圆心 (a,a) 在直线 $y=x$ 上，半径为1的圆的边界和内部的点的集合，$\because A\cap B\neq\varnothing$，故知 $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.



说明：利用图形解题时，一定要交待清楚各集合在坐标系中表示图形的特征.若是数集间的包含关系，则常利用数轴反映数集间的包含关系.

[例题2]　求证：如果 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in N\}$，$P=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in N\}$.则 $M\subset P$.

分析：集合之间包含关系的确定或证明，可用如下方法判定：若 $\forall x\in A$ 都可得到 $x\in B$，则 $A\subseteq B$；若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.本题中欲证明 $M\subset$

P,则可先证 $M\subseteq P$,再证明 P 中必有元素不在 M 中.

解答:证明:设任意的 $x_0\in M$

则 $x_0=a_0^2+1=(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5$

$\because a_0\in N$, $\therefore a_0+2\in N$, $x_0\in P$, $\therefore M\subseteq P$

又 当 $b=2$ 时, $y=1$, $\therefore 1\in P$

但 $x=a^2+1>1$, $\therefore 1\notin M$ 即 $M\neq P$,故 $M\subset P$.

说明: 从以上的解题过程可以发现:欲证 $x_0\in P$ 即证 x_0 可以表示成 $b^2-4b+5(b\in N)$ 的形式,这里特别关注的是一种"形式",因此证明时必须将 a_0^2+1 拼成 $(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5$,这是本题证明的关键所在.

[例题 3] 已知 a 为实数,A 为不等式 $x^2-(2a+1)\cdot x+(a+2)(a-1)\geqslant 0$ 的解集, B 是不等式 $x^2-a(a+1)x+a^3<0$ 的解集.

(1) 用区间表示 A 和 B.

(2) 是否存在实数 a,使 $A\cup B=R$,证明你的结论.

(3) 若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围.

分析:对含字母的一元二次不等式,首先考虑因式分解,然后再根据两根的大小关系,确定不等式的解集,若两根大小不能确定,则需进行分类讨论;两集合间的关系则可通过数轴很直观地得以体现.

解答:(1) A:$[x-(a+2)][x-(a-1)]\geqslant 0$

$\therefore A=(-\infty,a-1]\cup[a+2,+\infty)$

$B:(x-a^2)(x-a)<0$

当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，$B=(a,a^2)$

当 $0<a<1$ 时，$B=(a^2,a)$

当 $a=0$ 或 1 时，$B=\varnothing$

(2) 当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，$B=(a,a^2)$

$\because a>a-1,\therefore A\cup B\neq R$

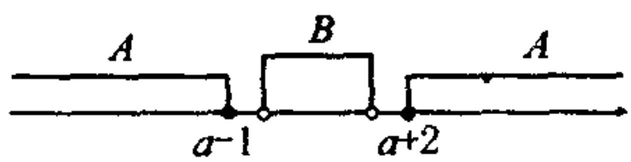
当 $0<a<1$ 时，$B=(a^2,a)$

$\because a<a+2,\therefore A\cup B\neq R$

当 $a=0$ 或 1 时，$A\cup B=B\neq R$

$\therefore$ 不存在 a 使 $A\cup B=R$

(3) 若 $A\cap B=\varnothing$，如图



$$\begin{cases} a<0 \text{ 或 } a>1 \\ a^2\leqslant a+2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 0<a<1 \\ a^2\geqslant a-1 \end{cases}$$

或　$a=0,a=1$

解得　$a\in[-1,2]$

说明：对集合中含字母问题的讨论，必须根据集合本身的特征，做到层次分明，不重不漏，标准明确。

[例题4]　已知二次函数 $y=f(x)$ 满足条件 $f(0)=\frac{1}{2}m$ 和 $f(x+1)-f(x-1)=4x-2m$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 如果 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有两个不同的

交点，且交点在区间(0,4)内，求实数 m 的取值范围.

分析：已知函数的类型——二次函数，根据条件确定函数解析式常用待定系数法，而已知二次函数与坐标轴交点情况，确定参变量的取值范围，则常利用数形结合，列出相应的不等关系，求参变量的范围.

解答：(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

由 $f(0)=\frac{1}{2}m$，得 $c=\frac{1}{2}m$

又 由

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c$$
$$=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$$
$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$
$$=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$$

得 $f(x+1)-f(x-1)=4ax+2b$

已知 $f(x+1)-f(x-1)=4x-2m$

于是得 $4ax+2b=4x-2m$

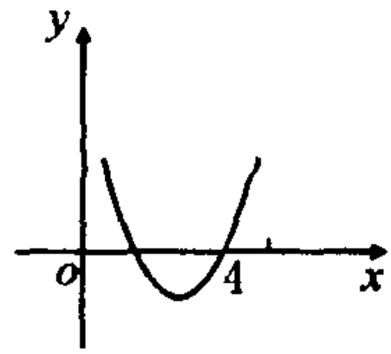
对 $x\in R$ 恒成立

$$\therefore \begin{cases}4a=4\\2b=-2m\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}a=1\\b=-m\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=x^2-mx+\frac{1}{2}m$$

(2) 函数 $y=x^2-mx+\frac{1}{2}m$ 的图像是开口向上的抛物线，对称轴方程：$x=\frac{m}{2}$，如图，则由已知得

$$\begin{cases}\Delta = m^2 - 2m > 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2}m > 0 \\ f(4) = 16 - 4m + \dfrac{1}{2}m > 0 \\ 0 < \dfrac{m}{2} < 4\end{cases}$$



即
$$\begin{cases}m < 0 \text{ 或 } m > 2 \\ m > 0 \\ m < \dfrac{32}{7} \\ 0 < m < 8\end{cases}$$

$\therefore 2 < m < \dfrac{32}{7}$,即 m 的取值范围$\left(2, \dfrac{32}{7}\right)$.

说明:1. 利用待定系数法确定函数解析式是函数中常用方法.在寻求待定系数 a、b、c 关系时,对 x 可以用特值代入法,也可利用恒等式的性质:恒等式两边对应项系数相等,列出关于 a、b、c 的等式,求出 a、b、c 的值.

2. 抛物线与 x 轴交点的情况即为二次方程根的分布问题,一般情况下总是划归到图像上,根据等价的图像列出等价的不等式组,确定参变量的范围,在后面的例题中将会加以详细分析.

[例题 5] 设 $f(x) = x^2 - (a+3)x + 3a\ (a \in R)$

(1) 若对任何实数 a,函数 $y = f(x)$图像不过点$(2p, p^2)$,求实数 p 的值.

(2) 若集合 $M=\{x \mid |x-a|<1\}$，$N=\{x \mid f(x)>0\}$，且 $M\cup N=R$，求实数 a 的范围.

分析： 函数图像不过点$(2p,p^2)$，即该点坐标不满足方程，这样可确定 p 的值；再根据 $M\cup N=R$，即可确定 a 的取值范围.

解答：(1) 根据题意得：

$$p^2\neq(2p)^2-(a+3)\cdot 2p+3a$$

整理为关于 a 的式子

得　$(3-2p)a\neq 6p-3p^2$

该式对任意 $a\in R$ 成立

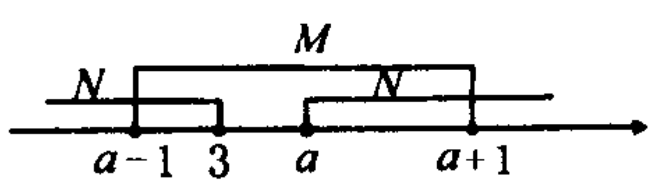
则　$$\begin{cases}3-2p=0\\6p-3p^2\neq 0\end{cases}$$

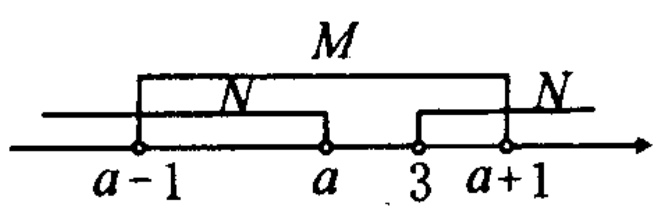
解得　$p=\dfrac{3}{2}$

(2) 由 $M=(a-1,a+1)$

$$N=\begin{cases}(-\infty,3)\cup(a,+\infty) & (a\geqslant 3)\\(-\infty,a)\cup(3,+\infty) & (a<3)\end{cases}$$

若 $M\cup N=R$





则有 $\begin{cases} a \geqslant 3 \\ a-1<3 \\ a+1>a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<3 \\ a-1<3 \\ 3<a+1 \end{cases}$

解得　$3 \leqslant a<4$ 或 $2<a<3$

从而得当 $a \in (2,4)$ 时，$M \cup N = R$

说明：问题(1)中，讨论对任何 $a \in R$，式子 $(3-2p)a \neq 6p-3p^2$ 均成立的条件，也就是考虑一元一次方程 $ax=b$ 无解的条件，即 $a=0$ 且 $b \neq 0$.

[例题6]　已知 $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$，若 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为 $M(a)$，最小值为 $N(a)$，$g(a)=M(a)-N(a)$.

(1) 求 $g(a)$ 的函数表达式.

(2) 判断函数 $g(a)$ 的单调性，并求出 $g(a)$ 的最小值.

分析：本题为二次函数最值问题，通常是利用二次函数的图像特征，根据抛物线的对称轴与区间的位置关系，确定其最值，然后再确定 $g(a)$ 的单调性，从而求出最小值.

解答：(1) 函数 $f(x)=ax^2-2x+1$ 的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}$

$\because \frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$，$\therefore x=\frac{1}{a} \in [1,3]$

从而当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 最小值

$$N(a)=1-\frac{1}{a}$$

最大值

$$M(a)=\begin{cases}9a-5 & \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\\ a-1 & \frac{1}{3}\leqslant a<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore g(a)=\begin{cases}9a+\frac{1}{a}-6 & \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\\ a+\frac{1}{a}-2 & \frac{1}{3}\leqslant a<\frac{1}{2}\end{cases}$$

(2) 设$\frac{1}{3}\leqslant a_1<a_2<\frac{1}{2}$

则 $g(a_1)-g(a_2)$

$=a_1+\frac{1}{a_1}-2-a_2-\frac{1}{a_2}+2$

$=(a_1-a_2)+\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}$

$=(a_1-a_2)\left(1-\frac{1}{a_1a_2}\right)$

$\because a_1<a_2,\therefore a_1-a_2<0$

又 $\frac{1}{a_1a_2}>1,\therefore 1-\frac{1}{a_1a_2}<0$

$\therefore (a_1-a_2)\left(1-\frac{1}{a_1a_2}\right)>0$

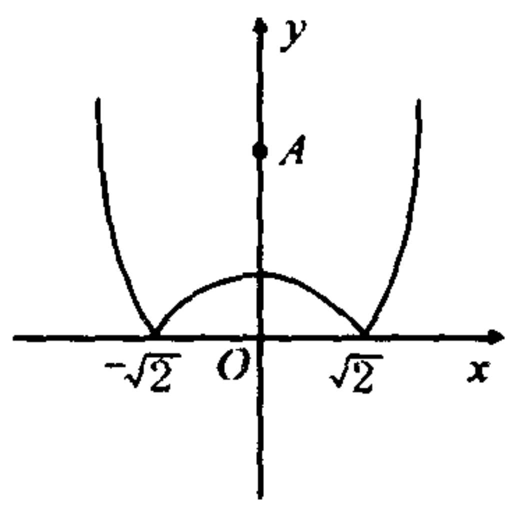
$\therefore g(a_1)>g(a_2)$

$\therefore g(a)$在 $a\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$上单调递减

同理可证 $g(a)$ 在 $a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，从而当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$g(a)$ 取最小值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

说明：1. 二次函数是中学数学中重要内容，它贯穿于整个中学数学的始终，许多复杂的问题经过换元转化最终仍是划归为二次函数，因此二次函数成为高考的热点，对含字母的二次函数最值问题，关键是确定二次函数对称轴与给定区间的位置关系，若不确定则需分类讨论. 分类时无论是定区间、动对称轴，动区间、定对称轴或动区间、动对称轴，分类讨论的标准都是以对称轴与区间的位置关系进行分类.

2. 对函数 $y=x+\frac{a}{x}$ $(a\in R)$ 的有关性质，必须熟练掌握和灵活运用.



［例题 7］ 如图，设定点 $A(0,a)(a>1)$，$P(x,y)$ 是函数 $y=\left|\frac{x^2}{2}-1\right|$ 的图像上一动点，求 $|PA|$ 的最小值及此时点 P 的坐标.

分析：因给出的函数 y 本身就是分段函数，而要求 $|PA|$ 最小值，则必须取每一段最小值中的较小者，故首先表示出 $|PA|$. 再求最小值中最小者.

解答：