高等学校教材

理论力学

下册

刘家信　李慧剑　主编

机械工业出版社

高等学校教材

理论力学

下册

主　编　刘家信　李慧剑
副主编　王　平　周洪彬
参　编　魏继光
主　审　陈继荣　马世麟

机械工业出版社

本书是根据国家教委审订的《高等工业学校理论力学课程教学基本要求》、并结合编者自己多年的教学实践经验与体会编写的。为便于学习，本书列举了较多的例题，每章之后均附有一定数量的思考题和习题。书末还附有习题的参考答案，以供读者作自我检查之用。

本册包括动力学的基本内容与一些有关专题（质点的运动微分方程、动量定理、动量矩定理、动能定理、碰撞、动静法、分析静力学、拉格朗日方程、质点的相对运动微分方程、机械振动）。

本书可作为高等工业学校机械类、土建类各专业以及其他一些相关专业的90～110学时《理论力学》课程的教材，也可供有关工程技术人员参考。在对内容作适当的增删后，本书的使用范围还可进一步扩大。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学　下册/刘家信，李慧剑主编．—北京：机械工业出版社，1996.10

高等学校教材

ISBN 7-111-05273-0

Ⅰ.理… Ⅱ.①刘… ②李… Ⅲ.理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.O31

中国版本图书馆[redacted]数据核字（96）第10404号

出版：机械工业出版社（北京市百万庄南街1号　邮政编码100037）

责任编辑：[illegible]　版式设计：杨丽华　责任校对：罗利华

封面设计：郭景云　责任印制：侯新民

北京昌平精工印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行

1996年8月第1版・1996年8月第1次印刷

787mm×1092mm 1/32・10⅞印张・238千字

0 001—3 700册

定价：14.20元

目　录

动　力　学

动 力 学

动力学研究物体的运动及其变化与所受力之间的关系。

在静力学中,研究了物体受力的平衡问题,但并没有讨论当力系不满足平衡条件时,物体的状态将会发生什么样的变化?在运动学中,只从几何角度研究了物体的运动及其变化的规律,但并未涉及物体运动状态之所以发生变化的物理原因。显然,要想全面了解和掌握物体机械运动的一般规律,以上两方面的问题都是必须回答的。在将要研究的动力学中,把力和运动联系起来进行研究,分析了物体的运动和变化与其所受作用力之间的关系,同时还考虑了物体自身的力学特性,即对物体的机械运动进行最全面的分析研究。

动力学的知识,无论在工程实际或科学研究中,都有着十分广泛和重要的应用。随着现代机械向着高速、高效、精密方向的发展,这些要求大多都需要进行动力分析和计算。此外,如对宇宙飞行、系统运动稳定性等问题的研究,也都与动力学的理论密切相关。

在动力学中,经常要用到的两种简化力学模型是质点和质点系。所谓质点,是具有一定质量而其几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体。例如,在研究地球环绕太阳的运行轨道时,地球的形状和大小在所研究的问题中不起主要作用,因而可将它们的影响忽略不计,而将地球抽象化为一个质量集中在地球中心的质点。所谓质点系,是指由有限个或无限个相互以一定方式联系着的质点所组成的系统。任何物体(包括固

体、液体、气体等)，只要在所研究的问题中，其形状和大小不能忽略时，都可以看成是某个质点系。至于在静力学中讨论过的刚体，则是一种特殊的质点系，即刚体是各质点间的距离永远保持不变的质点系。

从研究对象来分，动力学的内容可分为质点动力学和质点系动力学两部分。

在动力学里研究的问题比较广泛，但就其性质来说，可大致归纳为以下几类：1)已知物体的运动情况，求其上的作用力。这类问题称为动力学的第一类基本问题；2)已知作用于物体上的力，求物体的运动情况。这类问题称为动力学的第二类基本问题；3)已知物体的部分运动和部分受力，求另一部分未知的运动和力。这是以上两类基本问题的综合。

第十二章　质点的运动微分方程

本章将先介绍作为整个动力学理论基础的动力学基本定律；然后由动力学基本方程建立质点的运动微分方程，并应用它解决质点动力学的两类基本问题。

第一节　动力学基本定律

动力学基本定律是在人们对机械运动进行长期大量的观察和实验的基础上建立起来的。这些定律最后由牛顿在总结前人、特别是伽利略研究成果的基础上明确地提出，所以通常又称为牛顿三定律。这三条定律描述了动力学最普遍、最基本的规律，它们是古典力学体系的核心。

第一定律(惯性定律)　质点如不受任何力的作用,则将维持其原有的静止或匀速直线运动状态。

掌握这个定律时需要注意三点:1)定律指出了任何质点在不受力时,都具有保持其原有运动状态不变的特性,这个特性又称为惯性。因此,第一定律又称为惯性定律。惯性是质点本身的一个重要力学属性。2)由于绝对不受力的物体实际上是不存在的,因此,定律中的不受力应理解为受到平衡力系的作用。3)定律从相反的方面定性地指出了改变质点运动状态的条件:必须受到其他物体的作用,这种作用就是不平衡的力。

至于质点运动状态的变化与其所受力之间的定量关系,则由第二定律具体给出。

第二定律(力与加速度关系定律)　质点因受力作用而产生的加速度,其大小与力的大小成正比、与质点质量成反比,其方向则与力的方向相同。

如果用 m 表示质点的质量,用 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别表示作用力和加速度,则在选择适当的单位后,此定律可用数学式子表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}\quad \text{或}\quad m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{12-1}$$

式(12 1)建立了质点的质量、作用力和加速度三者之间的定量关系,称为动力学基本方程,它是解决动力学问题的基本依据。

掌握这个定律时需要注意以下几点:1)式(12-1)是矢量方程,所以,质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的指向与作用力 $\boldsymbol{F}$ 的指向完全相同,即加速度的指向唯一地由作用力的指向决定。2)由运动学知,点的加速度是一个瞬时值,故该定律给出了加速度与作用力之间的瞬时关系。作用力对质点运动的影响是通过加速度

表现出来的，作用力并不直接决定质点运动速度的大小和方向。3)由式(12-1)可知，完全相同的力若分别作用在质量不同的质点上，则质量较小的质点将获得较大的加速度，而质量较大的质点将获得较小的加速度。也就是说，质点的质量越大，它的运动状态也将越不容易改变。因此，质量是质点惯性大小的度量。4)一般说来，一个质点不仅仅只受到一个力的作用，因此，式(12-1)中的 $\boldsymbol{F}$ 应理解为作用在同一个质点上的所有力的合力。为了强调这点，式(12-1)常常写为

$$m\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{12-2}$$

在地球附近，任何物体都受到重力 $\boldsymbol{P}$ 的作用，物体在重力作用下产生的加速度称为重力加速度，用 $\boldsymbol{g}$ 表示。根据第二定律，有

$$m\boldsymbol{g}=\boldsymbol{p} \tag{12-3}$$

于是，物体的质量与重量之间的关系应为 $m=\dfrac{p}{g}$

必须注意，质量和重量是两个完全不同的概念。质量是物体惯性大小的度量，在古典力学中作为不变的常量处理。而重量则是地球对物体引力的大小，严格地说，重量与重力加速度的大小随着物体在地球上位置的不同而略有差异(在我国，一般可取 $g=9.80\mathrm{m/s^2}$)。因此，物体的重量只有在地球附近的空间里才有意义。而质量却是物体的固有属性，即使脱离了地球的引力范围，在重量不存在的情况下，质量依然存在。

在国际单位制中，质量的常用单位为千克，记为 kg。并规定能使质量为 1kg 的质点，产生 $1\mathrm{m/s^2}$ 的加速度的力，为一个国际单位，称为牛顿，记为 N，即有 $1\mathrm{N}=1\mathrm{kg}\times1\mathrm{m/s^2}$

在工程实际中过去惯用的工程单位制里，力的单位为公斤力，记为 kgf。工程单位制与国际单位制中，力单位的换算

关系为 1kgf≈9.8N

需要特别指出的是，动力学基本方程并非在任何参考系中都成立，而是只适用于某些特定的参考系。凡是动力学基本方程适用的参考系称为惯性参考系。在常见的一般工程技术问题中，若将固连在地球上的参考系或相对地面作匀速直线平动的参考系作为惯性参考系，就可以得到相当精确的符合实际的结果。对于某些需要考虑地球自转影响的问题，则要选取以地球中心为坐标原点、三根轴指向三个恒星的地心——恒星坐标系。

第三定律(作用反作用定律) 两个物体相互间的作用力与反作用力，总是大小相等、方向相反、沿同一条直线而分别作用在两个不同的物体上。

掌握这个定律时需要注意以下两点：1)本定律在静力学中也已讨论过，不过当时是对平衡问题而言的。现在动力学中又再次提出，说明力的作用反作用关系不仅在平衡时适用，就是在运动变化的普遍情况下也是适用的。2)定律给出了质点间相互作用时必须遵守的关系，因此，它提供了由质点动力学过渡到质点系动力学的桥梁。

第二节 质点的运动微分方程

第二定律的数学表达式(12-2)称为动力学基本方程，根据实际问题的需要，可以把它写成不同的形式。

一、矢量形式的质点运动微分方程

由动力学基本方程

$$m\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{F}i$$

根据运动学，有 $\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$，将其代入上式左端，便得

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_i \boldsymbol{F}i \tag{12-4}$$

式(12-4)就是矢量形式的质点运动微分方程。它比较简明，常在作理论推导时应用。

二、直角坐标形式的质点运动微分方程

将式(12-4)两端投影至固定直角坐标系，可得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=\sum_i F_{ix}\\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=\sum_i F_{iy}\\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}&=\sum_i F_{iz}\end{aligned}\right\} \tag{12-5}$$

其中 x、y、z 为质点的位置坐标，如图 12-1 所示。式(12-5)就是直角坐标形式的质点运动微分方程。

式(12-5)常在作具体数值计算时使用。

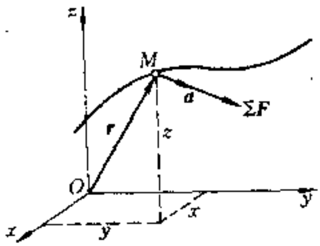

图 12-1

三、自然坐标形式的质点运动微分方程

由运动学知，有时采用沿已知运动轨迹的弧坐标法去描述点的运动，不仅简便，而且具有更为明确的力学意义。对于质点的运动与力的关系的研究，也可在已给轨迹中进行讨论。

(一)自然轴系

当质点的运动轨迹是空间已知曲线时，可类似于空间笛卡儿直角坐标系，在已知轨迹的任一点 M 处，建立一个局部

的固定直角轴系。具体方法如下:过 M 点沿弧坐标的正向取切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$。若与 M 点非常接近的 M' 点的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}'$,则由矢量 $\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 构成一个平面,如图 12-2a 所示。当点 $M'\rightarrow M$ 时,该平面必然以 M 点的 $\boldsymbol{\tau}$ 为轴旋转至某个极限位置,这个极限位置的平面称为轨迹曲线在 M 点处的密切面。显然,垂直于 M 点的切线方向可以有无穷多条法线。其中,位于密切面内的法线称为主法线,垂直于密切面的法线称为副法线。沿已知轨迹 M 点处的切线、主法线和副法线方向便可建立一个正交的直角轴系。令这三个坐标轴方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{\tau}$(切向单位矢量,沿 M 点切线方向并指向弧坐标正的一方)、$\boldsymbol{n}$(主法向单位矢量,沿 M 点主法线方向并指向 M 点的曲率中心)、$\boldsymbol{b}$(副法向单位矢量,沿 M 点副法线方向并满足 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$)。由这三个单位矢量就建立了一个局部的直角坐标系,并称为在已知轨迹 M 点处的自然轴系,如图 12-2b 所示。

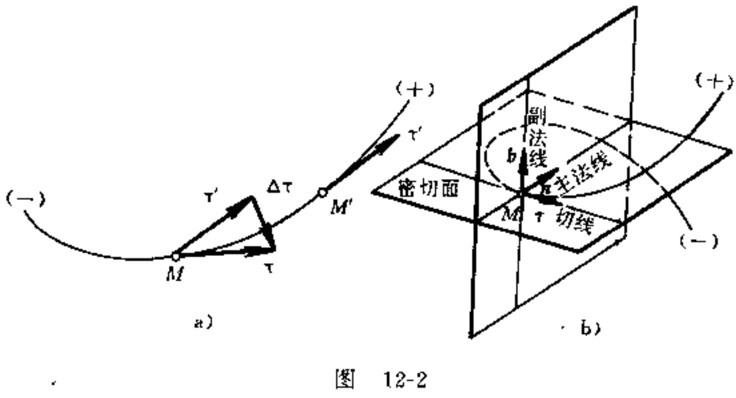

图 12-2

(二)自然坐标形式的质点运动微分方程

由运动学知,点的法向加速度

$$a_n = v\frac{d\tau}{dt} = v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t}$$

即 a_n 的极限方向与 $\Delta\tau$ 的极限方向一致。由上面的分析已知，$\Delta\tau$ 的极限位置在轨迹 M 点的密切面内，因此，a_n 恒在 M 点的密切面内，即某点的法向加速度必沿相应点处的主法线方向。于是，某点的全加速度

$$a = a_\tau + a_n = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho}n$$

必然分解为沿自然轴系切向和主法向的两个分量，而加速度在副法线方向上的投影必恒等于零，即有 $a_b \equiv 0$。

将式(12-4)两端投影至自然轴系，可得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= \sum_i F_{i\tau} \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \sum_i F_{in} \\ 0 &= \sum_i F_{ib} \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}6)$$

式(12-6)就是自然坐标形式的质点运动微分方程。在质点运动轨迹已知的情况下，采用自然坐标形式的方程求解往往是方便的。

根据问题的需要，还可将质点动力学基本方程投影到其他坐标系上，从而得到其他形式的质点运动微分方程。

第三节　质点动力学的两类基本问题

应用质点的运动微分方程，可以求解有关质点动力学的两类基本问题。

一、质点动力学第一类基本问题

已知质点的运动规律，求作用在质点上的力就属于这类

问题。这类问题的求解一般是比较简单的，问题的求解通常归结为微分运算问题。

二、质点动力学第二类基本问题

已知作用在质点上的力，求质点的运动规律就属于这类问题。这类问题的求解通常归结为积分联立微分方程组的问题。由于积分运算往往比微分运算复杂，因此，当力的变化规律比较复杂时，往往会遇到较大的数学困难。当力函数的变化规律很复杂时，还可能得不到解析解，而只能求得近似的数值解。在求解的积分过程中，积分常数需要根据运动的初始条件确定。

有些工程实际问题既要求质点的运动规律，又要求未知的约束反力，显然，这是属于两类基本问题综合在一起的动力学问题，它们的求解需要综合上述两类问题的方法。

例 12-1　一质量为 m 的重物 A 放在升降重物的吊笼的地板上，如图 12-3a 所示。求当吊笼以不变的加速度 $\boldsymbol{a}$ 上升与下降时，地板对重物的约束反力。

解　取重物 A 为研究对象。重物受重力 $\boldsymbol{p}$ 和地板反力 $\boldsymbol{F}_N$ 的作用，受力图如图 12-3b 所示。因重物作平动，故可作为质点处理。由于作直线运动，可取图示坐标轴 x，设向上为正。

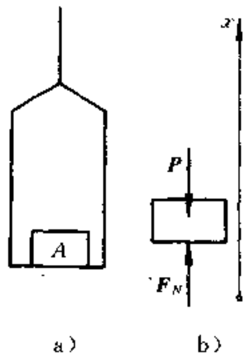

图　12-3

根据直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\sum_i F_{ix}$$

可得:1)匀加速上升时,有 $ma=F_N-P$

解得 $F_N=mg+ma$

2)匀加速下降时,有 $-ma=F_N-P$

解得 $F_N=mg-ma$

由以上结果可见,此时的约束反力由两部分组成:一部分是由重物的重力引起的,即当 $a=0$ 时,$F_N=P=mg$,这和重物静止平衡时的反力一样,称为静反力;另一部分是由于重物的运动变化(加速度不为零)所引起的,称为附加动反力,它与加速度的大小和方向有关。总的反力可称为动反力。于是在动力学问题中的约束反力一般称为动反力,它由静反力和附加动反力两项组成。动反力不仅与物体所受的主动力有关,而且还与物体的运动变化(即加速度)有关,这点与静力学问题中的约束反力有明显的区别。

由上面的结果还可看到,当重物加速上升时,动反力大于物体的重量,这称为超重现象;当重物加速下降时,动反力又小于物体的重量,特别是,若下降的 $a\geqslant g$ 时,重物将脱离地面而 $F_N=0$,这称为失重现象。

例 12-2 桥式起重机的跑车吊起一重为 $\boldsymbol{W}$ 的重物,沿水平梁作匀速运动,速度为 v_0,绳长为 l,如图 12-4 所示。由于突然急刹车,重物因惯性绕悬挂点 O 向前摆动。若忽略重物的大小,求钢绳的最大拉力。

解 取重物为研究对象,并将其视为质点。作用在其上的力有重力 $\boldsymbol{W}$ 和拉力 $\boldsymbol{F}_T$,受力图如图所示。刹车前,重物以匀速 $\boldsymbol{v}_0$ 作水平直线运动,刹车后,重物沿以悬挂点 O 为圆心、l 为半径的圆弧向前摆动。

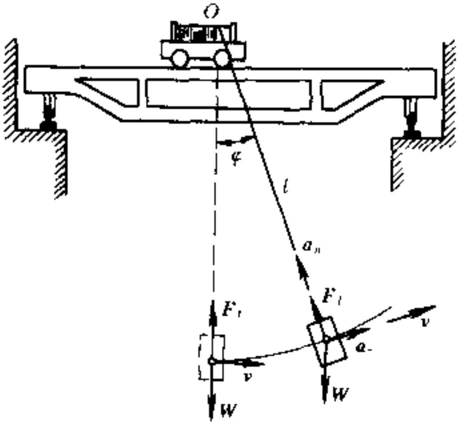

图 12-4

由于运动轨迹已知，可选用自然坐标形式的运动微分方程式(12-6)。设在任意瞬时，绳与铅垂线的夹角为 φ，则有

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}=-W\sin\varphi \quad \frac{W}{g}\frac{v^2}{l}=F_T-W\cos\varphi$$

由第二式得 $F_T=W\cos\varphi+\dfrac{Wv^2}{gl}$

式中 φ 和 v 均为变量。由第一式知 $a_t=\dfrac{dv}{dt}=-g\sin\varphi$

即重物作减速运动。因此可以判断，在刚刹车的初始瞬时，$\varphi=0$ 时绳的拉力最大，其值为

$$F_{T\max}=W+\frac{Wv_0^2}{gl}$$

考虑到刹车前的拉力即为静拉力 $F_{T0}=W$，故刹车后的拉力增加了一项附加动拉力 $Wv_0^2/(gl)$。因此，为确保安全，避免钢绳中产生过大的拉力，在起重机的运行过程中，跑车的行走速度不能太大，并应力求平稳，在不影响吊装工作的条件下，钢绳可尽量长些。