热弹性力学概论

王洪纲

清华大学出版社

热弹性力学概论

王洪纲

清华大学出版社

内 容 提 要

本书简要阐述热弹性力学的基本理论和应用，同时讨论了热弹性问题的变分定理和有限元基本方程。全书共分十章，内容包括基础知识，热传导的分析计算方法，热应变和热应力的有关理论和分析计算方法。

本书可作为有关专业本科生和研究生教材，亦可供有关工程技术人员参考。

热弹性力学概论
王洪纲
☆
清华大学出版社出版
北京　清华园
昆明工学院印刷厂排版
清华大学印刷厂印装
新华书店北京发行所发行
☆
开本：850×1168 1/32 印张：14 字数：378千字
1989年8月第一版　1989年8月第一次印刷
印数：0001～4000
ISBN 7-302-00467-6/O·80
定价：4.90元

序　　言

本书的目的在于介绍热弹性力学的基本理论和应用，同时也讨论了热弹性问题的变分定理和有限元基本方程，为热弹性问题的数值计算提供一定的基础。希望这本书对于有关的工程技术人员和力学专业的研究生能起到一些参考作用。

本书主要内容包含三个部分：第一部分是基础知识（第一、二章），第二部分介绍了热传导的分析计算方法（第三、四、五章），第三部分讨论了热应变和热应力的有关理论和分析计算方法（第六、七、八、九、十章）。至于一些专门性的热弹性问题，如热粘弹性、热弹性断裂、板壳热应力等问题，书中未涉及。

作者谨向支持本书出版的清华大学出版社、核对部分书稿和进行抄写工作的宁琼功同志等表示感谢。

由于作者水平所限，书中将会存在不少欠妥之处，请读者给予批评和指正。

王洪纲

1988 年 3 月

目　录

第一章　热弹性力学理论基础

§1-1　热弹性力学发展概述

固体的温度发生变化时，一般来讲，体内任一点（微小单元体）的热变形（膨胀或收缩）受到周围相邻各单元体的限制而不能自由地产生。同时，如果固体的边界受到其它物体的约束，也会使体内任一点的热变形不能自由地产生。

固体的这种内部和外部的约束作用，在于对体内任一点造成一定的应力，使该点与温度变化对应的热变形，部分或全部地不能产生。这个应力称为“热应力”。固体内任一点实际的热变形（或热应变）是指受到限制后的热变形，它与热应力不是直接对应的关系。

热弹性力学研究弹性体内温度的变化与热应力和热应变的关系；以及与此相关的理论、分析方法、计算、实验和应用。热弹性力学的理论以连续体力学为基础，并涉及热力学场论、热传导学和弹性力学的内容。

帕尔库斯（Heinz Parkus）认为，热弹性力学阐述弹性体在非均匀温度场影响下的性能，它是弹性力学的推广或广义化[1]。

热弹性力学的应用，在工程上有重要的意义。热应力和它所引起的强度、刚度问题，在航空、航天和核能反应堆工程的设备和构件上的重要性是不言而喻的。在一般的工程问题中，例如动力机械中许多零件在热应力下的强度问题，热冲击对强度的影响，热疲劳对零件寿命的影响；金属零件在热处理过程中出现的热应力，残余热变形和残余热应力问题；精密切削加工时，工件和机床的热变形及其对加工精度的影响；冶金设备在温度荷载和机械荷载联合作用下的强度和刚度的计算以及与之对应的合理设计问题；热冲压加工机械中零件的热疲劳问题；化工反应装置在温度变化时的强度和热

翘曲问题等等。这些亟待解决的重要课题都需要应用热弹性力学的理论和方法。同时，也正是由于工程上的需要，推动人们深入研究热弹性力学。

在热弹性力学的研究中，为了更好地解决实际问题，研究的范围扩大到热弹塑性和热粘弹性的理论和计算，以及由于温度引起的物理性能变化的分析等等。

热弹性力学研究的内容，在理论方面包括：热传导方程和热弹性运动方程的建立，边界条件（特别是热力学边界条件）表达式的确定；热传导与热弹性的耦合理论的分析研究；热弹性和热弹塑性本构理论的研究和本构方程的建立；热冲击与热弹性波传播的研究；热粘弹性本构理论的研究和本构方程的建立，热蠕变的分析；热疲劳过程力学模型的建立，热疲劳与高温疲劳关系的研究；热残余应力问题的研究；热弹性、热弹塑性、热粘弹性问题的数学分析方法，数值计算方法及其理论基础　变分定理的研究等。

在应用的研究上，涉及各种构件的热应力计算和它们的强度分析；板壳的热应力和热应变，相应的翘曲和稳定问题；热弹性振动问题；构件热残余应力的计算；温度变化下断裂问题的分析计算；热应力下构件的合理设计问题等等。

此外，对于不同温度下各种物性系数的实验测定，热变形和热应力的实验研究也属于热弹性力学的研究内容。近三十年来，热弹性力学的发展是迅速的。在五、六十年代，结合具体构件的热应力的计算研究较多，一些著作比较系统地讨论了这方面的问题。例如梅兰和帕尔库斯的《由于定常温度场而产生的热应力》[2]和帕尔库斯单独写的《非定常热应力》[3]，反映了五十年代热应力的研究成果。七十年代以来，热应力研究的一个重要方面是向理论方面发展。开始从连续体力学的理论出发，即从质量守恒，能量守恒、熵不等式、自由能和构造理论基本定律和理论出发建立热传导方程、热弹性材料的本构方程、热弹性运动方程和其它基本方程，并进行分析研究。I.N.Sneddon，J.L.Nowinski，H.Parkus 等分别所

写的关于热弹性力学的专著[6, 8, 1]，综合了这个阶段的研究工作。他们和其他学者的工作，使热应力的计算研究发展成为一门新的交叉学科 热弹性力学。它涉及热力学、热传导学、弹性力学和塑性力学等学科的内容，而又有自己的理论体系和分析方法。日本的竹内洋一郎，平修二等则侧重于热应力计算的系统化和应用方面的研究[5, 7]。

近几年，热弹性力学的理论研究继续向完善和深入方面发展，这方面的工作很多。例如 G.Lebon 将"热流"作为一个独立变量引入热弹性力学中，并且在质量守恒、动量守恒和能量守恒等各基本定律之外，补充了一个"热流率方程"。然后导出热弹性问题控制方程[9]。M.A.Biot 将"热容量"作为一个新的状态变量引入虚耗散的热力学原理中，由此导出的场方程将具有积分-微分形式，且避免了因考虑热源而需引入的另一变量"熵"[62]。涉及材料自身非线性性质的本构关系，是理论研究的重要内容之一。K.N.Rysinko 和 E. I. Blinov, Tatsuo Inoue 和 Shigeru Nagaki, T. J. Chung 和 J.L.Prater, R.Hill 以及 Y.M.Kolyano 和 E.I.Shter 等分别地进行了热塑性，热粘弹塑性，各向异性，非均质物体的本构关系的研究[11, 12, 13, 10, 63]，引起了人们的注意。这方面的论文反映了热弹性理论与实际材料性能更紧密联系的趋势，但它们的结论尚待实践验证。

理论研究的一个引人注意的内容是热弹性耦合理论。由热力学基本定律、材料的本构理论和 Helmholtz 自由能表达式导出的热弹性材料的热传导方程中，除了待定的温度场函数 $\theta(\mathbf{x}, t)$外，还含有应变率 $\dot{e}(\mathbf{x}, t)$。它表明，物体上的温度场 $\theta(\mathbf{x}, t)$不仅取决于热源，以及各有关的热力学物性系数和换热边界条件，而且还受到弹性变形应变率的影响。或者说，弹性变形的体积应变率将在一定程度上改变物体上热量的传递。热传导方程中含 $\dot{e}(\mathbf{x}, t)$ 的项称为耦合项。这是由于 $\dot{e}(\mathbf{x}, t)$ 也是待定的，它需要由热弹性运动方程及力学边界条件来确定，而热弹性运动方程中又含有 θ (x,

t) 项。因此，热传导方程和热弹性运动方程必须耦合求解。J.L.Nowinski 指出[8, p.138]，耦合项的作用是将施加给物体的机械能转化为热流，而后耗散掉。因此耦合项造成的能量耗散是不可逆的。B.A.Boley 等认为[4]，耦合效应的物理实质是对热弹性波的阻尼。在热传导方程中耦合项的出现，加深了人们对能量转换的认识。同时，也增加了求解热弹性问题的困难。于是，人们研究耦合效应对问题的解将会产生多大程度的影响。在什么条件下可以略去耦合项。

为了对耦合效应作出估价，B.A.Boley，Y.Takeuti，J.L.Nowinski 等从不同的角度引入"耦合系数"[4, 5, 8]。耦合系数是综合了材料的部分物性系数而构成的一个无量纲参数，它介于零和一之间。如果它远小于一，则可略去不计，热传导方程就退化成为非耦合的。否则将对热弹性问题的解产生显著的影响。在室温（初始温度）下，钢料的耦合系数按 Nowinski 给出的表达式进行计算为 0.011[8, p.139]。因此热传导方程中可以考虑略去耦合项。对于塑性材料，耦合系数等于0.43[8, p.139]。这种情况下是否可略去耦合项，就需要慎重考虑了。另一方面，应变率 $\dot{e}$（$\mathbf{x}$, t）自身的数值大小也是耦合项能否略去的一个重要因素。一般来讲，动态问题中应变率较大。特别是在热冲击问题中，变形率在一段时间内有较大的数值。因此，分析热冲击下热弹性波的传播时应充分考虑耦合项的影响。范绪箕指出[14]，耦合作用使应变（应力，温度等等）在波前的突变迅速衰减，这是耦合项的重要特性之一。一些关于耦合问题的研究，侧重于具体的热弹性耦合问题的计算。除了常用的 Laplace 变换外，Y.Takeuti 等人用热弹性位势和 Love 位移函数求解了轴对称有限圆柱的耦合热应力问题[15]，给出一些有意义的结果。由于精确地求解耦合问题在数学上存在不少困难，近年来采用了许多近似方法。摄动法是一种值得注意的方法。同时，也使用了有限元法来计算热弹性耦合问题。J.T.Oden 用有限元法计算了各种物性系数下半空间的耦合问题[21, p.377~386]，并与精确解相比较。

至于热弹性耦合问题变分原理的研究，已经有了很大进展，见[16-20]等等。

最近，耦合的概念不断扩大。开始考虑温度场，应变场和电磁场的耦合；力学边界条件和换热边界条件的耦合等。总之，热弹性耦合问题的研究正在继续深入。

热冲击问题也是吸引人们注意的内容之一。急剧地加热或冷却，使物体产生剧烈的温度变化，并相应地产生很大的非定常热应力。这种现象称为"热冲击"。这时的热应力是在短促的时间内产生的，带有冲击的特征，因而需要研究它的惯性效果和热弹性波。50年代，苏联 В.И.Даниловская 研究了半无限体的热冲击问题，指出了惯性效果的重要性。60年代，B.A.Boley，Y.Takeuti 等研究了热冲击问题后指出，由于热冲击产生的高速变形，出现了较大的应变率，影响温度场的分布。所以在热冲击问题中同时需考虑耦合项的影响。最近，Y.Takeuti 和 T.Furukawa 分析了厚板的热冲击问题后认为[25]，对于热应力的影响，耦合效应比惯性效应更为显著。当然，这个观点是针对厚板的。E.M.Shipitsina 研究了球体在热冲击和机械冲击联合作用下的动力效应[26]。J.C.Mirsa 和 S.C.Samanta 等研究了粘弹性半空间体的热冲击问题。他们不仅考虑了耦合效应，同时也考虑了在冲击传播时，热松弛的影响[64]。在这些研究中，对于在物体上突然加热所引起的物性系数的变化，均未加考虑。对于热冲击作用的边界条件的表达多采用理想化的模型。因此，热冲击的研究尚待深入。

具体构件的定常和非定常热应力的计算分析（包括相应的温度场和热变形的计算）方面的工作，则是大量的。其中，板和壳体热应力的计算占了重要地位。我国学者从六十年代开始，即发表了不少研究成果。刘先志对有内含物的固体的热应力和热变形进行了深入的研究。何广乾、薛大为、胡海昌、钟万勰等分别对扁壳的热应力进行了研究。关于各种构件在不同的换热边界条件下的非定常热应力的计算研究也日渐增多[27-30]。随着计算机的发展和广泛使

用，热应力的计算可以用数值方法，特别是用有限元法在计算机上进行。应用有限元法时，需将构件离散化成为许多单元，从而使复杂形状和非均质的构件的热应力、温度场、热变形等的计算成为可能。所以近年来有许多关于具体构件的热应力有限元分析的论文发表[31-34]。有限元计算的结果虽然有一定程度的近似性，但由于构件的形状和物性系数的分布不受限制，因而更能满足工程应用的需要。

各向异性体、非均质体和复合材料的热应力计算都是难度较大的问题。它们的计算方法和结论得到人们密切注意。B.M.Lisitsyn 和 K.B.Bulyga 在有限元法基础上近似地求解了非均质体的热弹性问题[35]。V.M.Levin 研究了各向同性均质介质中含有其它成份椭球状颗粒复合材料的热应力问题[36]，Y.Mengi 等研究了两种层状材料交错构成的复合材料的热弹性动力行为的理论[37]，等等。复合材料在构成方式和材料物性上的多样性，导致了问题的研究方法不同。很难要求用统一的方法来求解这类问题。

在热应力计算方法不断完善，计算范围不断扩大的同时，一般工程问题中也将热应力强度和刚度纳入工程设计所考虑的范围。A.V.Vainshtein 研究了圆形固体和环形板在热力学效应下的最小体积的优化设计问题。N.V.Novikov 等提出了用降温的措施来提高强度，并以此为基础计算允许应力[38]。但是，这方面的研究工作尚未展开，发表的著作不多。

热弹性力学进一步发展的方向之一，是热弹塑性和热粘弹性理论以及相应的热蠕变、热残余应力和热疲劳等问题的研究。这也是当前很活跃的研究领域之一。

热弹塑性和热粘弹性的本构关系的研究，涉及材料物性的非线性性质、材料结构变化对力学性质和热力学性质的影响，还需考虑时间因素及变形历史。这类问题在工程实际中是重要的。但是由于问题的难度较大，教学模型也较复杂，所以无论理论研究或实验研究以及计算方法的研究都不够完善，尚有许多工作要做。

K.N.Rysinko 和 E.I.Blinov 由连续体力学理论出发对热弹塑性本构关系进行了较深入的分析[39]，给出了以增量形式表达的本构方程和热弹塑性的热传导方程，其中的耦合项不仅包含弹性应变率，还包含塑性应变率。H.Ishikawa 研究了温度的历史对应力分布的影响[40]。H.Matthies 用泛函分析对热弹塑性理论中的存在定理和近似性作了探讨[41]。热弹塑性问题中物性系数的变化和相变的影响已引起国内外研究者的注意。热粘弹性的本构关系是热粘弹性理论的基础，它涉及内变量的热力学性质、材料的蠕变和松弛特性等等。R.M.christensen 等在这个问题上进行了研究，J.Verhás 等应用 Onsager 理论导出了增量形式的本构方程[43]。V.L.Kolpashchi-kov 对粘弹性材料热力学性质和本构关系也进行了分析[44]。当然这方面的问题需要继续深入探讨。

热残余应力对构件的强度和寿命有着重要的影响。在热弹塑性和热粘弹性理论的基础上进行热残余应力的分析和计算是许多研究者深感兴趣的问题。五、六十年代人们就应用近似的理论（如理想塑性）来计算残余应力，以了解它在构件内的分布规律。H.G.Landau 等曾近似地计算了热处理后的板和淬火的圆柱体的热残余应力。类似的问题在[3]中也有所论述。但由于当时理论研究尚不够完善及计算方法和测试技术的限制，进展似乎不快。七十年代，田中道夫和 S.Nair 等用有限元法计算热残余应力[45, 46]。他们将物性系数随温度的变化、相变过程的影响、应变硬化蠕变准则等均引入到有限元的分析之中，使热残余应力的计算过程和结果更接近于工程实际情况。

近年来，一些学者考虑如何利用热残余应力来提高零件的强度和构件的寿命，并进行了理论和实验方面的探讨[47~49]。T.R.Hsu 使用激光束对带有圆孔的薄板进行环形的脉冲的热冲击，在圆孔周围的环形带上产生热塑性应变，人为地制造了残余应力。热弹塑性的计算表明，这个热残余应力可以提高薄板受拉伸的强度。T.R.Hsu 等的研究工作引起了国内外的广泛注意。

热疲劳方面的研究和它在机械设计上的应用，也处于发展阶段。许多问题尚需进一步研究。日本平修二等的著作《热应力与热疲劳》[7]反映了日本学者在高温强度方面的综合研究成果。他的另一著作《金属材料的高温强度》[50]则是六十年代研究成果的概括。这两本著作侧重于从材料学的角度来研究热应力和热疲劳，在力学理论的论述上则较为简略。但是，它为力学理论的深入研究提供了材料学方面的依据。如热疲劳强度与高温下低循环机械疲劳强度的关系，热疲劳的力学模型 热应力棘轮的概念等等。

热应力作用下断裂问题的研究，近年来相当活跃，H.M.Zien用有限元法计算了热弹塑性理论基础上的断裂力学J积分[51]。D.T.Barr 和 M.P.Cleary 较系统地讨论了用奇异影响函数求解热弹性断裂问题[52]。P.R.Skelton 讨论了热冲击下金属材料内裂纹的扩展问题。V.V.Panasyuk 等阐述了温度荷载和疲劳作用下裂纹的扩展问题。D.K.Ram 等分析了弹性半平面上的热应力如何用 Griffith 裂纹来减弱[53]。而 V.D.Belen' kii 研究了平面上施加温度场后使裂纹闭合的问题[54]。此外，有不少的论文讨论了有裂纹的构件上热应力的计算。

在热弹性力学的理论研究（包括热弹塑性和热粘弹性理论）不断取得进展的同时，用数值计算方法，特别是用有限元法来求解问题也得到迅速发展。其主要原因是这种方法可以处理各种非线性问题、材料局部物性变化和各种复杂边界问题。但是，有限元法的理论除了计算精度、收敛性、单元形态、计算格式等问题之外，一个重要的方面是以上所提出的各种热弹性问题的控制方程是否有相应的泛函存在以及如何建立相应的变分定理。这是热弹性问题可否使用有限元法的条件和理论基础。因此，许多学者进行了这方面的研究工作。如 M. A. Boit，M. Ben－Amoz[18]，R. E. Nickell 和 J.L.Sackman[19]，我国的富宝连[65]等都曾发表了有关的研究成果。钱伟长教授将线性热弹性力学的变分原理做出了概括[17]。J.T.Oden 应用非线性泛函分析从数学的角度对力学中的变分定理

进行了概括[16]。目前变分定理的研究仍随同热弹性理论的深入而继续发展。对于物性系数随温度变化的非线性情况（热传导，热弹塑性、热粘弹性等问题），著者进行了探讨[55~58]，并给出了有关的结论。其中有意义的是非线性热弹性问题在非定常状态下泛函存在条件的分析，指出了非定常状态下时间差分的理论依据。

必须指出，热弹性力学的实验研究是非常重要并亟待发展的一个重要方面。由于高温电测技术的成熟，热变形和热应力的测试有了一定基础，X 射线测定构件表面应力（包括热应力）的研究也已开始，近十几年来由于 Moiré 云纹法的发展[60]，用它来测试热应力的研究工作也是可行的[59, 61]。但总的看来，实验研究较之理论和计算研究是薄弱的。这就使得热弹性力学的研究不够完整。

本书在理论基础方面介绍了有关连续体力学的内容。其中某些部分结合了热弹性材料。对于热弹力学问题，除了介绍经典的数学分析方法外，还着重讨论了有限元法。当然也阐述了相应的变分定理。此外，还介绍了国外的一些研究工作。

由于篇幅所限，本书未涉及板壳的一些热应力问题。

§ 1-2　两种坐标系・运动和变形

为了描述物体（连续体）的运动和变形，我们选取两种坐标系。一种是固结在物体上的坐标系，它随同物体一起运动和变形，称为**物质坐标系**或 Lagrange **坐标系**。该坐标系中不同的坐标 X 代表了不同的质点。X 的分量以 X^i（$i=1, 2, 3$）表示。另一种坐标系是在空间建立的一个固定的参考坐标系，称为**空间坐标系**或 Euler **坐标系**。此坐标系中不同的坐标 x 表示空间中不同的几何点。x 的分量以 x_i($i=1, 2, 3$)表示。

质点 X 和它的空间位置 x 的对应关系可写为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}) \tag{1.1}$$

当质点运动时，则写成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}\ (\mathbf{X},\ t) \tag{1.2a}$$

或写成

$$x_i = x_i(X^1,\ X^2,\ X^3,\ t), \qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{1.2b}$$

式中 t 表示时间。

以上各函数都是单值连续的。

任意时刻 $t>0$，物体上所有质点在空间占有的位置的全体，称为物体的**构形**。显然，构形是变化的。由于物体的运动和变形都是相对的。因此，在描述运动和变形时必须选取物体的一个已知的构形作为比较的基准，这个构形就称为**参考构形**。一般取 $t=0$ 时的构形为参考构形。

为了简单，我们取参考构形上的物质坐标系，也就是 $t=0$ 时的物质坐标系，与空间坐标系重合。于是，质点的位移 $\mathbf{u}(\mathbf{X},\ t)$的表达式可写成

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},\ t)=\mathbf{x}(\mathbf{X},\ t)-\mathbf{X} \tag{1.3}$$

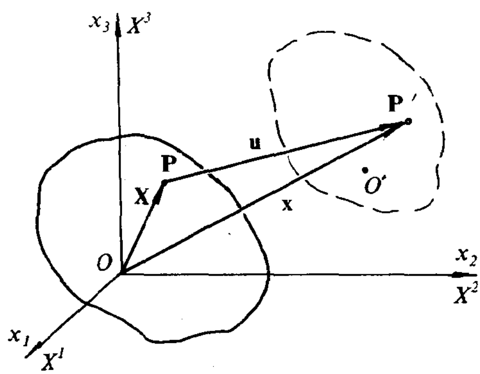

图 1-1