

920972

送

河流泥沙级配规律研究

熊治平



武汉水利电力学院
河流泥沙研究室

一九九一年十一月

000972

TV152
2231

TV152
2231

河流泥沙级配规律研究*

熊治平

武汉水利电力学院

河流泥沙研究室

一九九一年十一月

* 武汉水利电力学院自选科研课题及青年科学基金资助项目。

内 容 提 要

本文首先在介绍前人用来描述河流泥沙级配曲线的正态分布和S形分布以及侯晖昌分布和张红武分布的基础上,采取数学模拟方法,提出一种新型的数学表达式即双曲正切函数表达式,并从理论上将其与正态分布和S形分布进行了对比比较,从实际上用大量天然实测资料检验了它的精确度和实用性;其次,专题讨论了对数正态型泥沙级配及有关问题,从数学上证明并指出目前有些河流动力学教科书中习为援引的诸如 d_{10} 、 d_{50} 、 ϕ_{10} 、 σ 、 σ_{10} 、 σ_{50} 等几个特征值表达式的正误,导出泥沙粒径 d 的对数正态分布式并给出相应的数字特征表达式,指出天然沙的平均粒径 d_{10} 常大于中值粒径 d_{50} 的普遍性及其原因,此外,还给出合理的确定全沙代表粒径 d_s 的条件和计算床沙质、冲泻质以及任意粒径组泥沙的平均粒径、中值粒径的定量计算式;再次,在系统评述现有划分床沙质与冲泻质各种方法的基础上,认为拐点法的物理解释比较合理,进而认识到所谓拐点法的拐点实际上就是数学上函数的最大曲率点,于是提出所谓最大曲率点法,并分别根据床沙服从正态分布和双曲正切分布的假设推导得到相应的界限粒径 d_s 的计算公式,且以天然实测资料进行了验算;复次,在天然实测资料分析产生悬沙级配沿垂线分布概念基础上,根据悬移质含沙量沿垂线分布公式,导出悬移质泥沙级配 P_i 沿垂线分布公式,且给出 P_i/P_{10} 、 P_i/P_{50} 和 P_i/P_{100} 三种相对表达形式,此外,还讨论了 P_i 的绝对分布及有效悬浮指标 δ_i 问题;最后,按滞流区、紊流区两种特殊情况,根据沙样组成服从对数正态分布假设分别导出沉速 ω 的概率分布式及其相应的均值、方差计算式,另外,还讨论了混合沙代表沉速的确定方法以及平均沉速、中值沉速和众值沉速及其相互间的大小关系问题。

目 录

内容提要

绪 论	1
第一章 河流泥沙级配规律的数学描述	7
第一节 正态分布	9
第二节 S形分布	16
第三节 候晖昌分布	20
第四节 张红武分布	26
第五节 双曲正切分布	29
第二章 对数正态型泥沙级配及有关问题商榷	47
第一节 不同对数系统的统一及相互关系	47
第二节 常见几种特征粒径的定义及意义	51
第三节 粒径对数值 D 的概率分布及数字特征	57
第四节 粒径 d 的概率分布及数字特征	60
第五节 混合沙代表粒径	64
第六节 关于天然沙 $d_{pj} > d_{50}$ 的实际 资料检验	75
第七节 几个有关问题的商榷	97
第三章 床沙质与冲泻质级配界限的确定	113
第一节 常见划分方法	115
第二节 最大曲率点法(一)	123
第三节 最大曲率点法(二)	129
第四节 计算结果验算	135

第五节 天然河流 P_{dk} 的取值问题	135
第四章 悬沙级配沿垂线分布规律	139
第一节 概 述	139
第二节 河流实测悬沙级配沿垂线分布特性	141
第三节 悬沙级配沿垂线相对分布	145
第四节 悬沙级配沿垂线绝对分布	167
第五节 关于有效悬浮指标 δ_i	176
第五章 关于混合沙的沉降速度问题	183
第一节 概 述	183
第二节 滞流区混合沙的沉速分布	187
第三节 紊流区混合沙的沉速分布	195
第四节 混合沙的代表沉速	198
参考文献	203
Abstract	209

绪 论

天然河流中，无论是随水流浮游前进的悬移质泥沙，还是沿河床表面滚动、滑移、跃移的推移质泥沙，或是静止于河床的床沙，都是由大小不等、形态各异的颗粒相互混杂且以某种级配规律随机聚合而成的非均匀混合沙。通常所说的河流泥沙，并非系指单个的泥沙颗粒，而是指这样的泥沙混合物。许多有关河流泥沙的性质及运动规律，都是通过沙粒集体的形式表现出来。河流泥沙动力学的研究对象，主要地也是指这样的混合泥沙。表征混合泥沙组成特性的基本方法是，通过沙样颗粒分析，绘制其颗粒级配曲线。

泥沙级配，是河流泥沙动力学中一个重要的因素。许多理论和实际问题的分析研究都要涉及到它。缺乏泥沙级配资料，河流实际泥沙问题的分析研究就会因为失去依据而无法进行，或若实测的泥沙级配资料精度较差，则将直接影响到计算成果的精确度和可靠性。

长期以来，获得泥沙级配资料最基本最主要的途径是生产实测。而从生产实测途径获得泥沙级配资料其工序之复杂和工作量之大是众所周知的。大批水文队伍为了及时捕获江河水沙的量和质的信息，长年据守江河两岸，所耗费的时间和劳动代价是巨大而可观的。在泥沙级配问题的理论阵地上，虽有科学工作者做过这样那样的尝试并取得某些单项研究成果，但不是理论研究工作缺乏系统性，就是研究成果在生产实际中的应用成效存在问题。由此看来，目前在努力坚持生产实测这个必不可少的途径的情况下，有必要开展和加强泥沙级配问题系统的理论探索，寻求泥沙级配的理论规律和实际可行的预报计算办法。

然而，现阶段看来，在河流泥沙领域，相对其它方面的研究内容如

泥沙的起动规律、沉降规律、含沙量分布规律等说来，有关泥沙级配规律性的专项研究成果甚为少见。应该说，在这方面的研究课题不仅是广泛的，而且是有意义的。例如，天然泥沙级配曲线图形的函数性质及数学表达式，河流泥沙级配的形成机理及其与水力泥沙因素的关系，不同河流泥沙级配特性的差异及影响因素，不同性质泥沙（悬沙、床沙、推移质等）级配的相互调整和相互转化关系等等，都是基本的值得研究的问题。

关于天然河流千姿百态的泥沙级配曲线图形，试图通过把握最常见最基本的形态特征而用一个简单数学表达式去模拟其形态规律的工作，应当承认，奥托（G. H. Otto）〔1〕的尝试是开创性的。他首先发现河流泥沙粒径的对数值可用正态分布（或粒径的对数正态分布）描述，并将天然泥沙级配绘在对数概率纸上使其近于直线，再根据几何关系定出沙样级配的有关特征值。除此以外，Rosin—Rammler曾提出过负指数规律的泥沙级配数学模型^{〔注〕}；1983年，谢葆玲提出过S形分布表达式〔2〕，以描述常见的反S形泥沙级配曲线图形。还有，候晖昌和张红武曾分别运用力学和统计学知识〔3〕〔4〕，导得悬沙级配和床沙级配的概率表达式，试图根据河流水沙因素去算出相应的悬沙级配或床沙级配，如此等等。在河流泥沙级配这样复杂的自然现象面前，象这样努力地把泥沙级配由纯经验实测引向数学计算，其理论意义是应予肯定的。此点在目前电脑风行的形势下更显得重要。有了泥沙级配的数学模型即数学表达式，只要事先编好程序，再送入有关参数，利用计算机计算并作图是极为方便的。从上述几家数学模型看来，奥托正态分布式无论在理论意义方面还是在符合实际的程度方面都明显占优，因而自问世以来受到愈来愈多的人的重视和援用；其他几家，有的是公式结构本身存在某种缺陷，有的是公式在建立过程中因所考虑的理论图式过

于简化、理想，而使得所得公式实际上仅存理论意义而无直接的应用价值。因此看来，进一步认识泥沙级配曲线图形的函数性质，增添泥沙级配新的数学表达式，寻求既简便易行且精度不低的计算办法，是理论研究和生产实际两方面的需要。

自对数正态型泥沙级配数学表达式诞生以来，经奥托本人和后来人检验表明，用该式描述天然泥沙的级配规律的确在许多情况下能获得令人满意的实际效果。正因如此，不少泥沙工作者和河流动力学教科书都乐于引述。但长期以来，对与该式密切有关的常用于反映沙样组成特性的几个特征值如平均粒径 d_{pj} 、几何平均粒径 d_g 、均方差 σ 或 σ_d 、几何均方差 σ_g 等，竟然存在公式表达上的错误之处，而人们却未加留意、不曾发觉，且相互抄引，习以为常。是事虽小，但不可任其流传未来，有必要给出严格的数学证明，同时指出某些河流动力学教科书中的正确与错误之所在。此外，当泥沙粒径对数值 D ($D = \lg d$ 或 $D = \ln d$) 服从正态分布时，粒径 d 的概率分布为何，相应的数字特征怎样？更进一步地，沉速 ω 的概率分布和数字特征又如何？这本属概率论的基本知识范畴，但在泥沙著作中至今却未见明确论及。

对于天然混合沙，平均粒径 d_{pj} 和中值粒径 d_{50} 是两个经常认为可互为代用的特征粒径。然而，在常遇实际情形中，两者的数值究竟应何者为大、原因何在？至今在泥沙界可以说是一件在理论上未得到澄清，在实践上未被明确认识的“谜”。然而，只要我们翻开水文泥沙刊印本，展现在我们面前的结论是，沙样的平均粒径几乎无一例外地大于其中值粒径。事出有因，绝非偶然。对此一方面有必要从理论上给出证明和解释，另一方面，需针对具体河流具体河段的实测资料进行抽样统计，认真查明其正常情况的出现原因和反常情况的出现机率。

粒径和沉速是泥沙的重要特性。实际工作中，在确定天然沙的平均

粒径或平均流速时，通常是采取分组加权的办法求其加权平均值。这样作从方法上讲当然不能认为有错，但将本来呈连续分布的沙样粒配人为地离散化（这里系指对天然沙样进行人为分级），造成加权平均的计算结果存在着因不同的分组方法或不同的分组数目而不唯一的缺点。那么，从数学上讲，更好的计算平均粒径或平均流速的方法和公式是什么呢？

泥沙的代表粒径，在不少理论和实际问题的分析研究中都会用到。例如，在计算混合泥沙的起动流速或沉降速度时，人们常常从简便考虑，借用均匀沙的起动流速公式或沉降速度公式，以某个特征粒径作代表粒径代入公式去算，把算得的结果视为全体混合沙平均情况的起动流速和沉降速度。显然，代表粒径的数值对其计算结果的影响将十分重要。关于混合沙的代表粒径，实践中常用的有 d_{35} ， d_{50} ， d_{65} ， d_{90} ，……等等。不同的人在不同的场合有不同的用法，大都出自不同的考虑和研究目的。至于何种情况究竟应取何值合理，认识上各有己见，多凭经验认为，并非有确定准则可依。由此看来，探讨合理的确定代表粒径的方法和准则，也是有理论和实际意义的。

床沙质与冲泻质，共同构成水流携挟的悬移质。研究河床演变问题时，时常需将悬移质中的床沙质与冲泻质划分开来并把前者视为重点分析对象。然而，合理地确定床沙质与冲泻质的界限粒径 d_k ，便成为这个问题的关键。目前，尽管划分方法为数不少，但实践中则以经验作法为多。各种方法各有优缺点。至于实际应用时究竟应用何种方法则因人所喜。各种方法的结果往往难以统一，差别较大，有时甚至根本无法实现相互比较。基于这种情况，对现行各种方法给出综合评述，并在此基础上，寻求一个在理论上能自圆其说、有一定道理，在实用上简单易行，能定量计算的 d_k 计算式，实有必要。

冲积河流悬沙与床沙的级配关系，是研究河流挟沙机理和输沙能力

常常涉及的理论问题。60年代初，侯晖昌〔5〕在分析实测资料基础上，以含沙量分布规律为媒介，探讨过冲积河流悬沙级配与床沙级配的相互依存关系，只要已知河流的床沙级配和水沙条件，就可算得相应的悬沙级配数值；韩其为〔6〕在研究稳定非均匀水流稳定不平衡输沙的基本规律时，探讨过河床在淤积和冲刷时悬沙级配的分选和变化规律，得到悬沙级配与床沙级配的相互关系；李义天〔7〕根据输沙平衡的考虑，先建立河底点悬沙（床沙质）级配与床沙级配的关系，再通过含沙量分布规律起作用，导得悬沙（床沙质）垂线平均级配与床沙级配的换算关系；如此等等。所有这些工作和成果，都有助于人们进一步深化认识挟沙河流中悬沙、床沙和水流条件三者的关系和相互调整规律；从探索问题的思路和方法讲，亦可对未来的类似研究起到良好的启迪作用。

在挟沙水流问题中，悬移质含沙量沿垂线分布规律研究得较早较成熟。然而，对于悬移质泥沙级配沿垂线分布的规律问题，到目前为止却不曾有人专门探求过。是否可以说，人们至今对这方面的理论认识尚未开始，或者说，知之不多、知之不深。初步分析发现，天然实测悬沙资料展现在我们面前的情况是，不仅含沙浓度沿垂线上小下大，各点不同，粒径沿垂线上细下粗、各点有别，而且各点的级配值（各级泥沙占全沙百分数）沿垂线也不相等，具有某种梯度规律。这就表明悬沙级配沿垂线存在着某种分布规律性尚未认识。对此有必要在对众多实测资料细致分析的基础上，再从理论上去寻找答案和解释。预期获取的这方面研究成果，可望从理论上加深对悬沙群体的组成特性以及悬沙内部各级泥沙相互制约关系和相互调整转化规律的深化理解，还有可能用于指导现行泥沙测验方法的改进和测验误差的估计与修正。总之，初步看来，沿着这个方向去探讨、去索取，获得新的成果和认识是可能的。

本文主要探讨上述有关问题。全文共分五章。第一章在介绍正态分

布、S形分布以及候晖昌分布和张红武分布基础上，提出一种描述泥沙级配曲线的新型表达式即双曲正切函数表达式；第二章专题讨论对数正态型泥沙级配的有关问题，证明并指出目前有些河流动力学中习为援用的与正态分布有关的几个特征值表达式的正误；第三章首先系统综述床沙质与冲泻质现有各种划分方法，在此基础上提出一种新的划分方法即所谓最大曲率点法；第四章从理论上探求总沙级配沿垂线分布规律及有关问题；第五章讨论非均匀混合沙沉速的概率分布及代表沉速的确定方法。

由于河流泥沙级配方面的问题多而复杂，深感目前此项工作无论是在理论研究的深度和广度上，还是在研究内容的系统性和成熟性上，都未能达到这方面课题的理论目标和要求。在这方面，更多更细更艰苦的工作自然有待于今后去做。此外，限于笔者水平，文中错误和欠妥之处亦所难免，读者的批评指正理当受到欢迎。

【注】：Rosin-Rammler 泥沙级配数学模型由费祥俊教授提供，其形式如下：

$$q = 100 e^{-\left(\frac{d}{d_t}\right)^n} \quad (\%)$$

式中：d为粒径； d_t 特征粒径，可取为平均粒径 d_{pj} ；n为均匀性指数，级配愈均匀，n愈大；q为大于某粒径d的百分数；若令 $p = 100 - q$ ，去掉%，则得小于某粒径d的级配值为

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{d}{d_t}\right)^n}$$

第一章 河流泥沙级配规律的数学描述

通常所说的河流泥沙，是指由大小不等的颗粒相互混杂随机组合而成的混合沙群体。为了表示群体混合沙的组成规律，所采取的办法是绘制其沙样级配曲线，即先通过沙样颗粒分析，算出群沙中各级粒径泥沙所占重量或小于某粒径泥沙的累积重量，然后据以绘制沙样的级配曲线。为了避免作图时因天然沙粒径范围广所占图幅大，这种级配曲线通常画在半对数坐标纸上，横坐标为对数坐标，表示泥沙粒径的对数值 D ($D = \lg d$)，纵坐标为自然坐标，表示某粒径泥沙在全沙中所占的重量百分数（频率） p ，或表示小于某粒径泥沙之沙重百分数（累积频率） P 。生产上较为普遍采用的是，将沙样级配按累积频率绘制。

不难想象，影响天然沙级配规律的因素错综复杂。从空间上讲，不同地区的河流，同一河流不同河段，同一河段不同部位，所采取的沙样不尽相同，从时间上讲，因受河道水文现象的不稳定性和河床所处的冲河动态过程的影响，同一地点不同时间的采样不同；其次，还与沙样类别（悬移质、推移质或河床质）以及淤积原因（回流淤积、缓流淤积、异重流淤积或静水沉积等）有关。此外，泥沙颗粒分析方法、筛分仪器精度以及操作的人为误差等都在一定程度上对最终得到的级配成果有着影响。总而言之，在天然河流中采取沙样，本身就是一个复杂的随机事件，具有强烈的时空性和随机性，这就决定着在任意两种情况下所测得的级配成果难能完全相同。试图从大量实测沙样中去觅寻两组恰为相同的级配成果是十分困难的。从这点言，正能说明上述现象的复杂性之所

在。

然而，不管上述影响因素如何错综复杂，也不管实际河流泥沙级配如何千差万别，天然沙的级配组成仍然有着一定的规律可循。生产实践中的无数次实测资料表明，绝大多数的泥沙级配曲线具有普遍的形态共性，即在半对数级配曲线纸上其图形呈上下大致反对称的连续分布形式或称为反S形。我们不妨称这种形式的分布为正常分布。其它非正常分布的泥沙级配如双峰形（频率曲线）或靠背倚形（累积频率曲线）等，在某些非冲积性河段或某些特殊环境下的床面也常有出现，对此应另当别论。对于广大的冲积性河流，以及山区、半山区河流的某些沙质河段，经常实测到的泥沙级配几乎都具有正常分布或接近正常分布的形态特征。因而相对说来，这种情况的普遍性和代表性更具广泛意义。

关于天然河流泥沙级配形态规律的数学描述，亦即试图用一个数学表达式描述天然泥沙级配曲线图形的工作，是一件很有理论和实际意义的事情。在这方面，奥托（G. H. Otto）〔1〕和谢葆玲〔2〕曾针对正常分布情形分别提出过正态分布和S形分布表达式。此外，候晖昌〔3〕和张红武〔4〕为了根据河流水沙因素分别算其相应的总沙级配和床沙级配，均从力学和统计学知识考虑，各自得到总沙级配和床沙级配的概率表达式。

本章在简要介绍正态分布、S形分布以及候晖昌分布和张红武分布的基础上，采用数学模拟方法，提出适用于正常分布的另一种形式的数学表达式即双曲正切表达式〔8〕，并用众多实测资料检验其实用性和精确度。

第一节 正态分布

不少泥沙文献都援引正态分布或对数正态分布来描述河流泥沙的级配组成。所谓正态分布，是指泥沙粒径的对数值 D ($D = \lg d$) 服从正态规律，或指绘在半对数级配曲线纸上的级配图形近于正态曲线，这从实质上讲是指泥沙粒径 d 的对数正态分布。

1939年，奥托^[1]在对众多实际泥沙级配分析基础上，意识到天然沙的级配可用数学方法去表达其组成规律和有关特征值。他首先将沙样级配点绘在对数概率坐标纸上，发现其规律近于直线，并可采取图解方法确定其沙样的 d_g 、 σ_g 等有关特征参数。这种方法被许多教科书沿用介绍，这里不多赘述。进一步地，奥托选用 Gram-Charlier 级数的前两项并用 \varnothing 值 ($\varnothing = -\log_2 d$) 表达泥沙级配的频率分布，其函数式为：

$$f(\varnothing) = \frac{100}{\sigma_\varnothing \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(\varnothing - M_\varnothing)}{\sigma_\varnothing} \right\}^2} \cdot \left[1 - \frac{K_\varnothing}{2} \left\{ \frac{\varnothing - M_\varnothing}{\sigma_\varnothing} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varnothing - M_\varnothing}{\sigma_\varnothing} \right)^3 \right\} \right] \quad (1-1)$$

其中： M_\varnothing —— 为 \varnothing 值的算术平均值，

σ_\varnothing —— 为 \varnothing 值的均方差；

K_\varnothing —— 为 \varnothing 值的峰度系数（等于 Krumbein 的 α_3 ，或取他的

$$2SK_{\phi}) ;$$

ϕ —— ϕ 值粒径, $\phi = -\log_2 d$, d 为粒径 (mm); 其图形如图 1-1 所示。

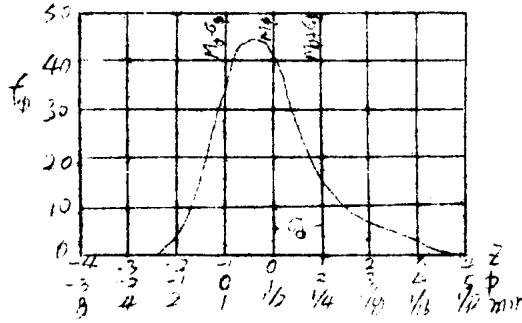


图 1-1 $f(\phi)$ 分布图

$$(M_{\phi} = 1, \sigma_{\phi} = 1, K_{\phi} = 1)$$

从 M_{ϕ} 到 ϕ 积分上式, 得累积频率函数:

$$F(\phi) = \int_{M_{\phi}}^{\phi} \frac{100}{\sigma_{\phi} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\phi - M_{\phi}}{\sigma_{\phi}} \right)^2} d\phi$$

$$\left[1 - \frac{K_{\phi}}{2} \left(\frac{\phi - M_{\phi}}{\sigma_{\phi}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\phi - M_{\phi}}{\sigma_{\phi}} \right)^3 \right) \right] d\phi$$

(1-2)

若注意到频率和概率密度两者的概念关系, 并去掉式中的 100, 则上两式实质上分别表示的是沙样级配的概率密度和分布函数。特别地, 对于无偏即 $K_{\phi} = 0$ 情况, 式中第二项为 0, 得到关于 ϕ 的正态分布, 即

$$f(\varnothing) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\varnothing}} e^{-\frac{(\varnothing - M_{\varnothing})^2}{2\sigma_{\varnothing}^2}} \quad (1-3)$$

$$F(\varnothing) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\varnothing}} \int_{M_{\varnothing}}^{\varnothing} e^{-\frac{(\varnothing - M_{\varnothing})^2}{2\sigma_{\varnothing}^2}} d\varnothing \quad (1-4)$$

在四十年代，柯尔莫哥洛夫研究过岩石风化过程的数学模型，认为当岩石无限可分时，所形成的颗粒级配在半对数纸上也遵循正态分布〔9〕。

下面我们令 $D = \lg d$ ，讨论关于 D 的正态分布，其概率密度和分布函数分别用 p 和 P 表示如下：

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(D - \bar{D})^2}{2\sigma^2}} \quad (1-5)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^D e^{-\frac{(t - \bar{D})^2}{2\sigma^2}} dt \quad (1-6)$$

式中 \bar{D} 和 σ 分别为 $\lg d$ 的均值和均方差，因正态分布图形对称，其均值等于中值，即 $\bar{D} = D_{50}$ 或 $\lg \bar{d} = \lg d_{50}$ 。

若 将式 (1-6) 被积函数展开积分, 即

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^D e^{-\frac{(t-\bar{D})^2}{2\sigma^2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-\left(\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} d\left(\frac{t-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{1}{113} \left(\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^3 + \frac{1}{215} \left(\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^5 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{317} \left(\frac{D-\bar{D}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^7 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

再将 $\bar{D} = \lg d_{50}$, $D = \lg d$, $\sigma = \frac{1}{2} \lg \frac{d_{84}}{d_{16}}$ 代入, 则得到 P 的一级近

似计算式:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \lg \left(\frac{d}{d_{50}} \right) \quad (1-7)$$