数学自学丛书

高中代数双基训练

第二版

主编　翟连林
编者　段云鑫　马国璋
徐一帆

中国农业机械出版社

前　　言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；

2. 《平面几何双基训练》；

3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；

2. 《立体几何双基训练》；

3. 《平面三角双基训练》；

4. 《平面解析几何双基训练》；

5. 《高中数学总结辅导》。

三、大专部分

1. 《一元微积分双基训练》；

2. 《多元微积分双基训练》；

3. 《线性代数双基训练》；

4. 《概率统计双基训练》；

5. 《复变函数双基训练》；

6. 《逻辑代数与BASIC语言双基训练》。

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统

地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1984年12月

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平，只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》(第一版)问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面：

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都由基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺了。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员、中国数学学会副理事长、北京大学数学研究所所长。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章 集 合

一、基础知识提要

1. 集合与元素

具有某种属性的事物的全体，形成一个集合，简称“集”．组成集合的每个事物叫做这个集合的元素．

例如：

（1）全体中国共青团团员；

（2）小于 5 的自然数；

（3）含有 30° 锐角的直角三角形；

（4）方程 $x^2-3x-4=0$ 的解；

（5）抛物线 $y=x^2$ 上的点；

等等，都可以形成一个集合．

这些集合中的元素是：

（1）人——任何一个中国共青团团员；

（2）数——1、2、3、4；

（3）图形——任何一个含 30° 锐角的直角三角形；

（4）数——-1 和 4；

（5）点——坐标满足方程 $y=x^2$ 的点．

集合常用大写字母 A、B、C、…表示，元素常用小写字母 a、b、c、…表示．元素 a 属于集合 A，可用符号“$a\in A$”表示，读作“a 属于 A”．如果 a 不是集合 A 中的元素，可用符号“$a\notin A$”表示，读作“a 不属于 A”．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2. 集合的基本性质

（1）元素的确定性　根据集合的概念，对于一个给定的集合，它的元素都应具有某种属性，因此集合中的元素都是确定的。如上述集合（3）含有30°锐角的直角三角形的集合，只有完全具备三角形：有一内角是直角、有一个锐角是30°这些属性的图形，才是这个集合的元素．其他如正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形等等，都不是这个集合的元素．

一般地说，“老教师”不能形成一个集合．因为所谓“老教师”没有明确的属性．如果说“年龄在50岁以上的教师”、“教龄在30年以上的教师”或“年龄在50岁以上，而且教龄在30年以上的教师”等，就可以形成一个集合．

总之，对于元素a和集合A来说，$a \in A$，或$a \notin A$，二者必能而且只能有一个成立．

（2）元素的互异性　一个集合里的元素都是彼此不相同的．元素不重复出现．例如用作不等边三角形的边的线段的集合中，有3个元素；用作矩形的边的线段的集合中，有2个元素；用作正五边形的边的线段的集合中，有1个元素．又如方程$x^2-3x-4=0$的实数解的集合中，有4和-1两个元素；而方程$x^2-4x+4=0$的实数解的集合中，只有2这么一个元素．

（3）元素的无序性　集合中的元素通常不考虑它们之间的顺序．因此对于不便排列顺序的元素仍然可以形成一个集合．如方程$x^4-1=0$的复数解可形成一个集合，它的元素是1、-1、i、$-i$．在实际应用中，如果把元素按一定顺序排列，有利于列举和计算，不致于重复或遗漏．对于有关数列的集合，因数列本身有顺序性，所以元素一般也要排列顺序．如数列$a_n=i^{n+3}$中前4项的集合，元素为1、i、-1、

$-i$，等等．

3．集合的分类

（1）以元素的个数划分

有限集　由有限个元素组成的集合．如-5和-2之间的整数集．

无限集　由无限多个元素组成的集合．如-5和-2之间的实数集．

空集　不含任何元素的集合，记作"ϕ"．如-5和-2之间的自然数集．

（2）以元素的基本属性划分

数集　以数为元素的集合．如：小于5的自然数集、介于10和20之间的有理数集、大于$\sqrt{3}$的实数集，等等．

经常用下列字母表示相应的数集：

N——自然数集；Z——整数集；Q——有理数集；$\bar{Q}$——无理数集；R——实数集；C——复数集．

为了方便，还可用Z^+表示正整数集、Q^+表示正有理数集、R^+表示正实数集．用Z^-、Q^-、R^-分别表示负整数集、负有理数集、负实数集等等．

图形集　以几何图形为元素的集合．如由四边形、梯形、平行四边形、矩形、菱形、正方形等组成的四边形集，由斜四棱柱、直四棱柱、正四棱柱、长方体、正方体等组成的平行六面体集等等．

点集　以点为元素的集合．点集一般为具有某种条件的图形．如到一个已知点的距离为定长的点集是以已知点为圆心、以定长为半径的圆．

方程（组）或不等式（组）的解集　以方程或方程组、不等式或不等式组的解为元素的集合，如方程$x^2-3x-4=0$

的解集，它的元素是 -1 和 4，方程组$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}$的解集，它的元素是$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$和$\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$，不等式$x^2-3x+2<0$的解集，它的元素是在 $1<x<2$ 范围内的一切实数等等.

有序数对集　以一对有序数为元素的集合，经常用于表示平面上点的坐标和二元方程的解．如抛物线$y=x^2$上的点集中，有元素（0，0）、（1，1）、（2，4）、（3，9）、…等．方程组$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}$的解可表示为$(x, y)$，它的解集中，有元素（3，4）和（4，3）。

4．集合的表示法

（1）列举法　把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法．列举法只适用于有限集．如果集合的元素较少，用列举法直观性强，如果集合的元素较多，用列举法比较麻烦．如

小于10的质数集，可表示为$\{2, 3, 5, 7\}$；

方程 $x^2-3x-4=0$ 的解集，可表示为$\{-1, 4\}$；

方程组$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}$的解集，可表示为$\left\{\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}\right\}$或表示为$\{(3, 4), (4, 3)\}$；

在圆 $x^2+y^2=4$ 上，横坐标为零的点集，可表示为$\{(0, 2), (0, -2)\}$等等.

显然 10000 以内的正奇数集，因元素个数很多不便用列

举法表示，而在圆 $x^2+y^2=4$ 上的点集，因元素有无限多个，不能用列举法表示。

（2）描述法　把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法。这种方法可以表示无限集，也可以表示有限集。元素的共同属性可以用语言描述，也可以用式子描述。用式子描述元素的共同属性，是在大括号内，先把元素的一般形式写上，然后在右侧画一竖线，再写上表示共同属性的式子。比如：

小于 100 的自然数集，可表示成{小于 100 的自然数}，或$\{x \mid x<100,\ x\in N\}$；

方程 $x^2-3x-4=0$ 的解集，可表示成{方程$x^2-3x-4=0$的解}，或$\{x \mid x^2-3x-4=0\}$；

方程组$\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}$的解集，可表示成$\left\{\text{方程组}\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}\text{的解}\right\}$，或$\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2+y^2=25\\x+y=7\end{cases}\right\}$；

抛物线 $y=x^2$ 上的点集，可表示成{抛物线 $y=x^2$ 上的点}，或$\{(x,y)\mid y=x^2\}$等等㊀。

5. 子集、真子集、集的相等

（1）子集　对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作

$$A\subseteq B\ （或 B\supseteq A），$$

读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"）。

㊀ 也可以用冒号或分号代替竖线。如$\{x \mid x<100,\ x\in N\}$，可写成$\{x : x<100,\ x\in N\}$或$\{x ;\ x<100,\ x\in N\}$。

子集是两个集合之间关系的概念，如数集中，$N\subseteq Z$，说明凡是自然数都是整数．又如{正方形}$\subseteq${矩形}，说明凡是正方形都是矩形．

根据子集的定义，显然有

$$A\subseteq A.$$

就是说，任何一个集合是它本身的子集．

另外规定，对于任何集合 A，

$$\phi\subseteq A,$$

就是说，空集是任何集合的子集．

（2）真子集　如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作

$$A\subset B\text{、（或}B\supset A\text{），}$$

读作"A 真包含于 B"（或"B 真包含 A"）．

注意子集和真子集的区别．如 $N\subseteq Z^+$，而 $N\subset\overline{Z^-}$ 或 $N\subset Z$．就是说，自然数集是正整数集的子集，但不是真子集．而自然数集是非负整数集（0 是它的一个元素）的真子集，也是整数集的真子集．

如果 A 是非空集合，显然有

$$\phi\subset A.$$

不难证明，对于集合 A、B、C，有

1）如果 $A\subseteq B$、$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$；

2）如果 $A\subset B$、$B\subset C$，那么 $A\subset C$．

（3）集的相等　对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么这两个集合叫做相等的集合，记作

$$A=B,$$

读作"集合 A 等于集合 B"．

如　$Z^+\subseteq N$，且 $N\subseteq Z^+$，因此 $Z^+=N$．

6. 交集、并集

（1）交集　由所有属于集合 A，且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集（简称"交"），记作

$$A \cap B,$$

读作"A 与 B 的交"．

换句话说，交集是两个集合的公共元素所组成的集合．A 与 B 的交集可用图 1-1 中的阴影部分表示．

如果两个集合没有公共元素，我们说它们的交集是空集，记作

$$A \cap B = \phi.$$

如图 1-2 所示．

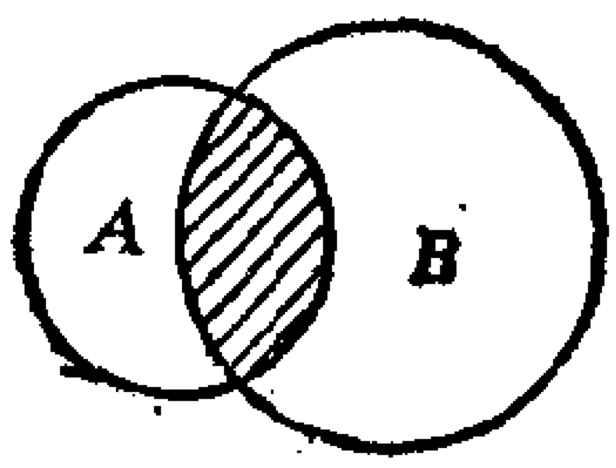

图　1-1

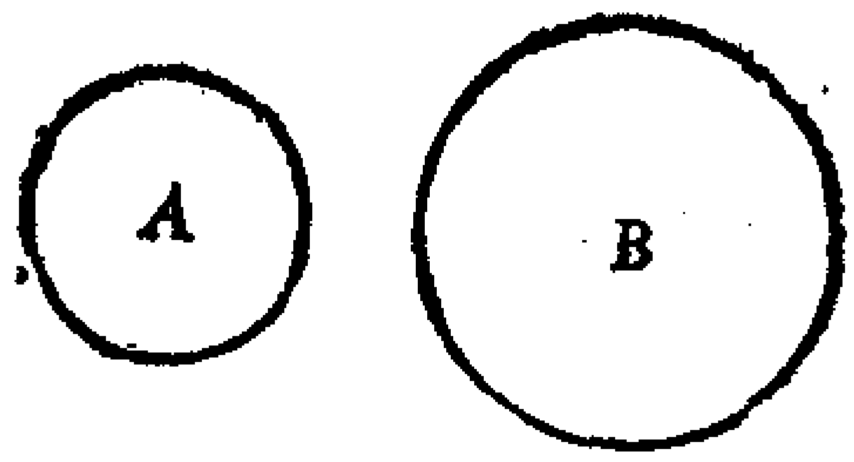

图　1-2

显然，任何集合与空集的交集是空集．即

$$A \cap \phi = \phi.$$

（2）并集　由所有属于集合 A，或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集（简称"并"）．记作

$$A \cup B,$$

读作"A 与 B 的并"．

换句话说，并集是把两个集合所有的元素合并在一起所组成的集合．A 与 B 的并集可用图 1-3 与图 1-4 表示．

显然　$A \cup \phi = A$．

7. 全集、补集

（1）全集　与所要研究的问题有关的全部元素所组成

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com