HZ BOOKS

A Wavelet Tour of Signal Processing Second Edition

电子工程丛书

(原书第2版)

信号处理的小波导引

A Wavelet Tour of Signal Processing

(Second Edition)

(法) Stéphane Mallat 著

杨力华 戴道清 黄文良 湛秋辉 译

机械工业出版社
China Machine Press

Harcourt

电子工程丛书

信号处理的小波导引

（原书第2版）

（法） Stéphane Mallat 著

杨力华 戴道清 黄文良 谌秋辉 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书以十分直观和近乎谈话的方式，以信号处理的问题为背景，叙述了小波的理论和应用，使读者可以透过复杂的数学公式来窥探小波的精髓，而又不致陷入小波纯数学理论的迷宫。

本书是按研究生教材的要求编写的，既可以让应用数学系的学生了解数学公式的工程意义，也可以让计算机及电子工程系的学生了解工程问题的数学描述。对于小波理论与应用的研究人员，本书更是一本极具价值的参考书。

本书版权登记号：图字：01－2001－2212

图书在版编目（CIP）数据

信号处理的小波导引（原书第2版）/（法）马拉特（Mallat, S.）著；杨力华等译. －北京：机械工业出版社，2002.9

（电子工程丛书）

书名原文：A Wavelet Tour of Signal Processing, Second Edition

ISBN 7-111-10159-6

Ⅰ. 信… Ⅱ. ①马… ②杨… Ⅲ. 小波分析－应用－信号处理 Ⅳ. TP911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 029329 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037）

责任编辑：姚 蕾

北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002年9月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 · 31 印张

印数：0 001-4 000 册

定价：55.00 元

译 者 序

本书的翻译历时近一年。翻译的动机很简单：目前国内关于小波的书籍太数学化，这妨碍从事工程应用的学者从复杂的数学公式中窥探小波的精髓；同时，数学研究者们因为没有直观的工程背景而容易将小波带入纯数学的迷宫。所以，当译者在香港第一次读到此书时，便动心要将它介绍给国内的同行们。

本书的特色正是我们的翻译动机。只要花上几分钟读一下本书的第 1 版前言，便会发现它引人入胜、非同一般。作者以十分直观和近乎谈话的方式叙述着小波的问题和方法。我们相信，本书会让研究小波的数学家了解数学公式的工程意义，而让小波应用的工程技术专家了解工程问题的数学描述。

本书按英文版第 2 版翻译。具体分工是：前言部分以及第 1 ~ 4 章由黄文良和谌秋辉承担，第 5、8、10、11 章由戴道清承担，第 6、7、9 章及附录、参考文献、记号、索引由杨力华承担。全书的插图以及统稿由杨力华负责。此外，谌秋辉是翻译的后期加入的，所以在 S. Mallat 所写的中文版前言中没有提及，这里说明一下。

我们首先要感谢本书的作者 S. Mallat 博士，原出版社 Academic Press（USA），以及中国机械工业出版社对我们的翻译工作的支持。

其次，我们要感谢我们的研究生刘亦书、陈芳芳、李科贤、姚斌、孙倩、岑晋宇、郭剑雄同学，他们分别承担了部分手稿的校对和插图工作。

打字员祝猋小姐承担了全书公式以及第 5 ~ 11 章的文字输入，林宛萱、潘淑枝小姐承担了第 1 ~ 4 章的文字输入，对她们同样表示感谢。

鉴于我们的水平有限，时间仓促，翻译错误是难免的，希望读者包涵，并指正。

本翻译工作得到国家自然科学基金（19871095，10071096，60175031）资助。

2002 年 5 月于广州中山大学

中文版前言

我第一次接触中国是在 1984 年，那时我以学生的身份到中国旅游。此后，作为一名略为成熟的科学家，我有幸在武汉、上海以及香港与中国的优秀数学家和工程师进行了合作。我希望本书能够在中国科学家中继续这一历程，并使他们自己找到通往小波殿堂之路。所以，我非常感谢杨力华教授、戴道清教授和黄文良教授认真地翻译了这本书，使我的这一愿望得以实现。

Stéphane Mallat
2001 年 5 月 10 日于法国巴黎

Preface to the Chinese Edition

My first encounter with China was in 1984, by traveling as a student. Then as a slightly more mature scientist, I had the opportunity to work with remarkable Chinese mathematicians and engineers, in Wuhan, Shanghai and Hong Kong. Hopefully this book will continue this journey by reaching Chinese scientists and letting them find their own path across the world of wavelets. I am thus very grateful to Professor Lihua Yang, Professeur Daoqing Dai, and Professor Wen Liang Hwang, who made it possible through their careful translation.

Stéphane Mallat
Paris, May 10th 2001

第 1 版前言

面对小波在自然科学中不同寻常的流行，有一个问题开始困扰着我：小波会不会仅是一时的时髦，随着时间的推移，这种流行势头会逐渐消失。经历过多年的小波研究与教学，以及写书的艰苦体验，你也许已料到，我的这种困惑已经平静下来。也许这是一种自欺欺人的感觉，它影响着每一位研究者对其所关注的小天地的探索，但也可能有更多其他的因素。

小波并不是来自于某个令人眼前一亮的新奇想法，而是来源于众多不同领域中以不同形式表现的一些概念。小波理论的形成是数学家、物理学家和工程师们多学科共同努力的结果，他们认识到他们一直在不同的领域内发展着相同的思想。在信号处理中，这种联系汇聚成思想的河流，它不仅带来了新的基和变换，而且还在向前奔腾。

个人体会　从一定意义上而言，你不可避免地要提到某个人做了什么事情。对于小波来讲，这是一个特别敏感的话题，它会冒险引起某些已被遗忘的科学群体的过激反应：他们争辩这样那样的研究结果最初是属于他们的。正如我说的那样，小波理论的确是科学家们在一起交谈出来的产物。我个人认为，在众多的对小波作出过重大贡献的研究者中，Yves Meyer 是我非提不可的人，他深奥的科学思想是催化小波出现的主要成分。具有讽刺意义的是，一位法国的纯理论数学家，出身于视应用为平凡物的 Bourbakist 文化中，却在架起连接不同学科的工程师与科学家的小波之桥的过程中发挥了关键性的作用。

回想起我初到美国攻读博士学位时，充斥在我头脑中的唯一的课题就是旅游，而决不是做一个研究者，当然更不是教书。我想我注定要回到法国，会很快在某个大公司里求发展。十年过去了，我还在美国，一边在大学教学，一边沉醉于一些尚未解决的科学问题。是什么导致了这么大的反差，也许是我接触到了许多像 Yves Meyer 这样的科学家，他们的人格魅力和创造力使我对教学和研究产生了完全不同的看法。我试着想和大家交流这种感受，这就是我写作本书的初衷。如果我的叙述总是过多地在人迹罕至的“科学中立王国”前停下来，那么我要请求您的原谅。

一些思想　除了数学与算法外，这本书还涉及到一些我要强调的重要思想。

- *时间频率的联姻*　信号的重要信息常常在对其作出时域性质和频域性质的联立分析时出现，这导致了信号的基于有良好时频局部化的基本原子分解。因而，必须弄清楚测不准原理是如何限制着时频变换的灵活性的。
- *尺度变焦*　小波是可以度量信号变化的尺度化波形。通过改变尺度参数，变焦过程可以对信号结构（例如奇异性）提供强有力的刻画。
- *更多的基*　许多规范正交基和快速数值算法被设计出来，滤波器组和小波基的发现为基的获取开辟了新的天地。现在，正交基家族每天都有新成员诞生。不过，如果没有

应用的刺激，这种游戏就会变得枯燥乏味。

- *稀疏表示* 如果信号在规范正交基下的表示，使得用很少的一些非零系数就可较好地逼近原始信号，那么这组基是很有用的。它在噪声信号估计、图像压缩中的应用与逼近论有密切的联系。
- *非线性尝试与对角化* 线性方法因其明显的简单性而一直占据统治地位。我们已习惯于标榜它们，这常常掩盖了包括 Wiener 滤波、Karhunen-Loève 基展开在内的“最优”线性过程的局限性。事实上，在稀疏表示下，简单的非线性对角化算子可以大大优于“最优”线性过程，而且有快速算法。

WAVELAB 与 LASTWAVE 工具箱 要充分理解本书的算法及理论，数值实验是必不可少的。为了避免陷入编程的痛苦，几乎所有的小波与时频算法都包含在 WaveLab 软件包中，它们是用 Matlab 编写的。Wavelab 是免费软件，可以通过互联网获取。本书中的算法与 WaveLab 子程序间的对应关系将在附录 B 中进行解释，书中所有的图例也可以用 WaveLab 演示生成。LastWave 是小波信号和图像处理环境，面向 X11/Unix 和 Macintosh 计算机用 C 语言编写而成。这套免费软件是独立的，不需要任何其他的商业附加软件。相关的介绍见附录 B。

教学 我是按研究生教材的要求编写这本书的，它取材于我在 MIT、Tel Aviv 两所大学电子工程系及 Courant 研究所和法国 École 理工大学应用数学系讲授“小波信号处理”课程时的讲义。

对于电子工程系的学生来说，他们最初往往被一些简单的线性代数中的向量空间的运用吓唬住了。线性时不变系统的优越性使他们认为像卷积、傅里叶变换之类的数学足以应付所有的应用。可悲的是，情况并非如此。本书中所涉及的数学方法并非源于它们在理论上的美妙，而是应付瞬时信号处理的复杂性所必须的。发现高深一点的数学的应用恰好是这门课程在教学方面的一个重要的“副作用”。书中大多数定理都附带有数值算法和图例。利用 WaveLab 可以非常方便地在课外作数值模拟，课堂上的练习及深一点的习题列在每章的结束部分。

对于应用数学系的学生来说，这门课既是小波也是信号处理的入门课程。信号处理是正宗的应用数学舞台上的新成员。它引人入胜地阐明了应用数学的各个环节：从问题建模到解的高效计算以及定理的证明。图像与声音使人对定理获得感观体验，这会弄醒大多数昏昏欲睡的学生。为方便教学，可以到以下网址下载具有规范页眉的放大图像的幻灯片：

`http://www.cmap.polytechnique.fr/~mallat/Wavetour_fig/.`

Francois Chaplais 在以下网址也提供了基本概念的网上导游：

`http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/.`

本书中并不是对于所有的定理都详细地证明，但一些重要的技巧都涵盖在书中。本书详细关注的一些例子，也许缺乏数学的严密性，望读者谅解。本书很少有冗长的证明过程，我尽量将它们集中叙述，以免将数学冲淡成太多的中间结果而使课本难以理解。

课程设计 1.5.2 节描述的水平数能够帮助教师设计课程的难度，是介绍性的课程或是

更高层次的课程。开始阶段对傅里叶分析的回顾是不可缺少的。尽管大多数应用数学系的学生接触过傅里叶变换，但他们很少有时间去真正地理解它。这样做能够强调包括采样定理在内的应用方面。对电子工程系的学生而言，重温一些基本的数学结果也是必要的。第 2 章、第 3 章是关于时不变信号处理的一个侧重数学的回顾，为学生们提供了机会去复习线性算子、投影及向量空间的基本性质。这些内容列在附录 A 中。作为一个学期的课程，基于不同的主题，有几种可能的讲授方法。以下是一些可供选择的途径。

你可以以前面列出的几条重要思想为线索组织教学。第 4 章特别重要，它介绍了局部时频分解的概念，4.4 节关于瞬时频率的讨论指出了时频分解的局限性。第 6 章通过建立信号的局部正则性和其小波系数关于尺度的衰减性的联系，给出了小波变换的一种不同的理解。这对于强调小波的消失矩的重要性是有用的。接着，可以切入第 7 章关于小波基的理论，特别要把重点放在 7.1 节至 7.3 节关于一维正交基、多分辨率逼近及滤波器组算法方面。小波基的线性与非线性逼近放在第 9 章讲解。根据学生的知识背景与兴趣，你可以在第 10 章中讲授完小波阈值在信号估计中的应用后结束课程，或者在第 11 章中讲授完基于小波基的图像变换编码后结束课程。

也可以以新的正交基的构造与应用为主线讲授这门课。开始介绍小波基及第 7 章滤波器组，接着通过讲述第 8 章的小波包、局部余弦基，以介绍不同的时频平面的不同的正交铺叠(tiling)。这就给出了时频分解的主要思想。第 9 章关于线性与非线性逼近，对于理解如何度量基的逼近效率、如何研究最佳基搜索过程，是非常重要的。为了阐述线性与非线性过程的差异，可以比较一下第 10 章的线性与非线性阈值估计。

再一个方案就是以构造规范正交基下的稀疏表示为重点，研究在这种基下的非线性对角算子的应用。这可以从第 10 章，通过对用于估计含白噪声的分片正则信号的线性与非线性算子作比较而开始。临时偏离一下主题，介绍第 9 章的线性和非线性逼近，以解释什么是稀疏表示。然后学习第 7 章的规范正交小波基，特别强调它们对于分片正则信号的非线性逼近性质。可以较详细地讨论非线性对角算子对图像压缩或阈值估计的应用，以说明现代数学对理解这些问题的作用。

强调非线性自适应性信号处理可以设计更高层次的课程。第 5 章关于框架的理论介绍一些灵活的工具，用于分析诸如非正则采样变换等非线性表示。二进极大表示通过其对多尺度边缘检测的应用，阐述了框架理论。为了研究规范正交小波基的自适应表示的应用，我们可以从第 9 章介绍的非线性和自适应逼近入手。最佳基、基追踪或匹配追踪算法是自适应变换的例子，它们构造了复杂信号的稀疏表示。一个重要的问题是根据信号的性质，弄清楚自适应性在何种程度上可以改进应用效果，如去噪或信号压缩。

致谢 写作本书原本是以一年为期限的课题，可最终却变成了总完成不了的恶梦般的工程。Ruzena Bajcsy 引导我踏出科研第一步时没有鼓励我选择其他的职业，对此她要负主要责任。她凭精深的科研直觉将我带到计算机视觉领域，并远远超出该领域。当然，那些做得更好的合作者向我揭示了这样一个事实，即科学是一个自私的世界，在那儿只有竞争。小波传说始于像 Alex Grossman 这样的著名科学家，他们的谦逊营造了一种温馨的合作氛围，在那里，奇

思怪想与足智多谋都被视作创造力的基本成分而备受欢迎。

我也要感谢那些一直愿意与我共事的人。他们中有些人因为要完成学位贡献少一点，但其他的人都自愿参加而且贡献很大。对此，我要感谢 Amir Averbuch、Emmanuel Bacry、Francois Bergeaud、Geoff David、Davi Geiger、Frédéric Falzon、Wen Liang Hwang、Hamid Krim、George Papanicolaou、Jean-Jacques Slotine、Alan Willsky、Zifeng Zhang 和 Sifen Zhong。他们的耐心在未来的生活中理所当然地会获得好的回报。

虽然本书不至于太误人子弟，但我还是愿意独自承担责任。经过 4 年反反复复地写作修改每一章，在 Fondation des Treilles 休假期间，我终于看到了写作这本书的隧道的尽头。在那里，我获得了特殊的环境进行思考、写作并在 Provence 吃住。David Donoho 提供了我 WaveLab 程序，没有他，我的下半生就要遭受编写小波算法程序之苦了。Maureen Clerc 和 Jérôme Kalifa 绘制了书中的所有图表，并指正了大量的错误。亲爱的读者，你们应该感谢 Barbara Burke Hubbard，她纠正了我的法式英语（书中还有的错误应归咎于我），并迫使我修正了许多记号和注释，我特别感谢她的机智和幽默的方式。我的编辑 Chuck Glaser 一直耐心地等着这部作品，但我更多地要感谢他的是，他用他的智慧让我相信我能在一年之内完成本书。

我要对 Branka 表示诚挚的谢意，尽管她不会读这本书，对她而言，生活与小波无关。

Stéphane Mallat

第2版前言

在我完成这本书之前，我简单地认为应该好好地听取读者的意见并采纳他们的建议。可当我实施时，几乎乱了套，最终有200页又得重写。下面我列出第1版中没有的主要内容。

- *贝叶斯理论与极小化极大理论* 经典的信号处理几乎整个建立在贝叶斯理论框架上，即信号被看做是随机向量的实现。最近20年，研究者们一直尝试用随机向量建立图像的数学模型，但结果总是无功而返。现在该是反思这种方法是不是最佳的时候了。极小化极大理论给出了一个方便的途径去评估估计算法和压缩算法的性能。它使用确定性模型，这种模型即使针对复杂的图像信号也能构造。重写了第10章，并加以扩充，以便重点解释、比较贝叶斯理论和极小化极大理论的观点。
- *有界变差信号* 小波变换提供了分段光滑信号的稀疏表示。为了刻画信号和图像的分段光滑性，全变差范数方法对此提供了直观、精确的数学框架。在第2版，我们使用全变差计算逼近误差，评估由去噪引起的风险并分析图像变换编码的失真率。
- *规范化尺度* 当信号分辨率 N 增加时，可以用连续的数学计算给出一些渐近的结果。在这个框架下，我们将信号支集固定为 $[0, 1]$，相应地采样间隔 N^{-1} 逐渐减小。相反，在数字信号处理算法中，我们将采样间隔规范为1，这意味着其支集 $[0, N]$ 随 N 而增加。新版解释了这两种观点，但图表中显示的信号支集被规范为 $[0, 1]$，以便与定理一致。
- *视频压缩* 为了在因特网或电话线这样的窄带信道中实时传输信号，对视频序列进行压缩是最重要的。在第11章的结尾，我们介绍了运动补偿算法。

符　号

$\langle f,\ g\rangle$	内积（见式（A-6））。
$\Vert f\Vert$	范数（见式（A-3））。
$f[n]=O(g[n])$	$f[n]$以 $g[n]$为阶,即存在 K 使得$\lvert f[n]\rvert\leqslant Kg[n]$。
$f[n]=o(g[n])$	高阶:$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{f[n]}{g[n]}=0$。
$f[n]\sim g[n]$	同阶:$f[n]=O(g[n])$且 $g[n]=O(f[n])$。
$A<+\infty$	A 为有限数。
$A\gg B$	A 远大于 B。
z^*	$z\in\mathbb{C}$ 的复共轭。
$\lfloor x\rfloor$	满足 $n\leqslant x$ 的最大整数 n。
$\lceil x\rceil$	满足 $n\geqslant x$ 的最小整数 n。
$n \bmod N$	n 模 N 整除的余数。
集合	
$\mathbb{N}$	非负的整数集。
$\mathbb{Z}$	整数集。
$\mathbb{R}$	实数集。
$\mathbb{R}^+$	正实数集。
$\mathbb{C}$	复数集。
信号	
$f(t)$	连续的时间信号。
$f[n]$	离散信号。
$\delta(t)$	Dirac 广义函数(见式(A-30))。
$\delta[n]$	离散 Dirac 广义函数(见式(3-16))。
$\mathbf{1}_{[a,b]}$	$[a,b]$的特征函数,即在$[a,b]$内为 1,其他处为 0。
空间	
$\mathbf{C}_0$	一致连续函数空间(见式(7-240))。
$\mathbf{C}^p$	p 次连续可微函数空间。
$\mathbf{C}^\infty$	无穷次可微函数空间。
$\boldsymbol{W}^s(\mathbb{R})$	Sobolev 意义下的 s 阶可微函数空间(见式(9-5))。
$\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$	满足$\int\lvert f(t)\rvert^2\mathrm{d}t<+\infty$ 有限能量函数空间。
$\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R})$	满足$\int\lvert f(t)\rvert^p\mathrm{d}t<+\infty$ 的函数空间。

$\mathbf{l}^2(\mathbb{Z})$	有限能量的离散信号的集合，即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid f[n] \mid^2 < +\infty$。
$\mathbf{l}^p(\mathbb{Z})$	满足 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid f[n] \mid^p < +\infty$ 的离散信号的集合。
$\mathbb{C}^N$	长度为 N 的复信号。
$\mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$	两个向量空间的直和。
$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$	两个向量空间的张量积(见式(A-19))。
算子	
Id	恒等算子。
$f'(t)$	导数 $\frac{df(t)}{dt}$。
$f^{(p)}(t)$	p 阶导数 $\frac{d^p f(t)}{dt^p}$。
$\vec{\nabla} f(x,y)$	梯度向量(见式 6-55))。
$f * g(t)$	连续时间卷积(见式(2-2))。
$f * g[n]$	离散卷积(见式(3-17))。
$f \circledast g[n]$	循环卷积(见式(3-57))。
变换	
$\hat{f}(\omega)$	傅里叶变换(见式(2-6)和式(3-23))。
$\hat{f}[k]$	离散傅里叶变换(见式(3-33))。
$Sf(u,s)$	短时窗口傅里叶变换(见式(4-11))。
$P_S f(u,\xi)$	谱图(见式(4-12))。
$Wf(u,s)$	小波变换(见式(4-31))。
$P_W f(u,\xi)$	量图(见式(4-55))。
$P_V f(u,\xi)$	Wigner-Ville 分布(见式(4-108))。
$Af(u,\xi)$	模糊函数(见式(4-24))。
概率	
X	随机变量。
$\mathrm{E}\{X\}$	期望值。
$H(X)$	熵(见式(11-4))。
$H_d(X)$	微分熵(见式(11-20))。
$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$	协方差(见式(A-22))。
$F[n]$	随机向量。
$R_F[k]$	平稳过程的自协方差(见式(A-26))。

目　录

第1章　瞬变世界介绍

我们应该都有过这样的经历，在餐厅与朋友聊天时，开始觉得很吵，一会儿后觉得听不到周围其他人的说话声音便不觉得吵。然而倘若我们突然停止谈话，我们很快就会在意周围人们的交谈。很明显，我们的注意力被突然的环境改变所吸引。我们周围每天都有很多信息在交流，而我们只将注意力集中在周围环境的突然改变上，这很可能是我们的感知系统从一堆信号中选择重要信息的一种方法。然而传统的信号处理一直特别关注时域不变算子和空间域不变算子的设计，这些算子改进了平稳信号的性质，这使得傅里叶变换在该领域处于无可争辩的霸主地位，但也搁置了许多信息处理方面的应用问题。

瞬变信号范围比平稳信号大得多，也更加复杂，因而寻找类似傅里叶变换的基来简化信号处理问题是毫无希望的。可喜的是，不同的变换和基一直不断地涌现出来，如小波就是很好的例证。本书针对小波的数学和算法结果作了引导性的介绍，旨在提供一个直观的向导。本章会列出主要的思想方法。1.5.2 节是本书的阅读指南，我们介绍了基于 WaveLab 和 LastWave 的可重复的实验方法，并讨论了如何使用难度数——帮助读者记住本书主要阅读路径的路标。

1.1　傅里叶王国

傅里叶变换一直统治着线性时不变信号处理，最主要的原因是傅里叶基所用的正弦波 $e^{i\omega t}$ 是所有线性时不变算子的特征向量。若我们用 L 来表示一个线性时不变算子，则该算子完全由其特征值 $\hat{h}(\omega)$ 刻画：

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, L e^{i\omega t} = \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}. \tag{1-1}$$

设 f 是系统的输入，要计算输出 Lf，首先将 f 分解成正弦波 $\{e^{i\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ 之和：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{1-2}$$

若 f 是能量有限信号，则由第 2 章将要介绍的傅里叶积分理论可证明每个正弦波 $e^{i\omega t}$ 的振幅 $\hat{f}(\omega)$ 是 f 的傅里叶变换：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{1-3}$$

若我们将 L 作用于式（1-2）中的 f，并利用式（1-1）可得：

$$Lf(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{1-4}$$

算子 L 将 f 的正弦波分量 $e^{i\omega t}$ 放大或缩小 $\hat{h}(\omega)$ 倍，这一过程看作是 f 的频率滤波。

假如我们只是研究线性时不变算子，那么傅里叶变换便足以处理大多数问题。然而对瞬变信号而言，傅里叶变换便不会那么有效。它的丰富特性适用于广阔的应用系统，如像信号。

在式（1-3）中，我们计算信号 f 与正弦波 $e^{i\omega t}$ 的内积而得到傅里叶系数。由于 $e^{i\omega t}$ 的支集