面向21世纪《高等数学》改革教材

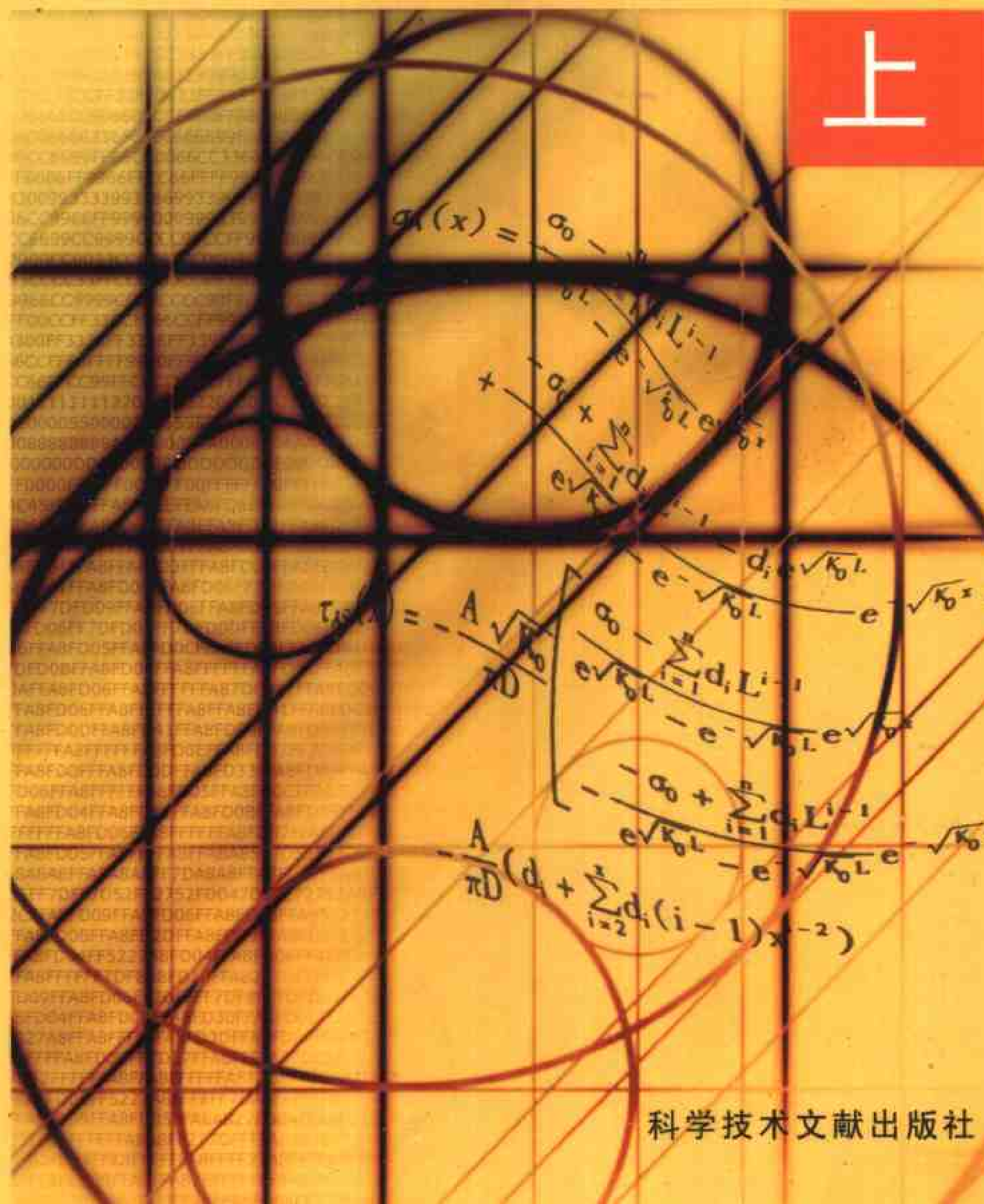
GAODENGSUXUE

JIAOCHENG

主编/阎大桂 但琦

高等数学教程

上



科学技术文献出版社

面向21世纪《高等数学》改革教材

高等数学教程

（上 册）

主编 阎大桂 但 琦
编委 （以姓氏笔画为序）
付诗禄 但 琦 余文革
林 琼 顾又川 阎大桂
蒋继宏
主审 严尚安

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
·北 京·

序　言

高等学校工科高等数学课程的改革是目前一个尖锐的问题，因此引起了广泛的注意。近年来，高等学校招生规模日益扩大。据了解，在经合组织中，各国人士对中国经济持续地快速发展感到吃惊，同时也对中国的高等教育发展之快感到不可思议。实际上，我国高校的发展已达到大众化的前夕（有一种说法，认为毛入学率——即同龄青年中大学生的百分比达到15%以上时，即算是大众化了；50%以上就是普及了），这对高等学校是一个严重的、但是令人鼓舞的挑战。新中国成立以来，我国高等教育事业的发展是史无前例的。虽曾有过严重的错误影响了它，但是教学质量比较高，一直是公认的。在已经到来的高速发展时期，能否继续保持高质量？在入学者成倍增加的情况下，保持原来的水平是一件十分困难的事。我们的任务是达到新的发展时期所要求的高水平，不但应保持原有的好传统，而且要有所创新，有所前进。出路在于改革。

参加学习者人数大为增加，必然带来的问题是：学习的目的千差万别，而学生的起点不应该设定得过高。对于多数学生来说，学习高等数学的目的就是"用"，而由于专业不同，用多用少也必然不同。但是由于计划经济的痕迹将日渐消除，目前需要较少数学知识的学生将来可能还要继续学习。所以现在学习内容应该是一个平台，上面应该尽可能有一些预留的接口。我们认为，这本《高等数学教程》保留了其基础；科学技术文献出版社出版的《高等数学》简明扼要，通俗易懂，体系科学，内涵丰富，便于教师"教"和学生"学"，是很必要的。由于学时比较少，对内容下了不少提炼工夫；并且把数学知识的训练与学生素质的培养密切结合起来。凡此种种都体现了作者在改革中作了努力尝试。作者们考虑到将来一部分学生会需要较多的数学知识，把一些现代数学的思想、观点、方法和语言融入微积分中，我们认为这就是为了体现以上所说的平台与接口的关系。其实，从根本上说，微积分本身也就是一个大平台，在其上面可以连续如此众多的接口——微分方程、复分析和实分析

等等，在整个数学中恐怕找不到任何一个可以与之比较的平台了。从教育心理学的观点来看，十八、九岁的青年正是思想十分敏感，易于接受新事物的时期，在这段时间学过的东西，哪怕暂时用不着，将来一旦有需要再学习时，必会产生似曾相识之感而事半功倍。不论是我们自己学习或者教学的经验，都证明了这一点。作者们在"融入"二字上下了些功夫，还希望有更多的同志再进一步努力探索和实践。

还要提到，近年来计算机的发展对数学教育的影响是不容忽视的。本书适应于此有不少可取之处。我们想着重提出，近年来出现的一些数学软件如 Mathematica、Matlab 必然会促使高等数学教学面貌有较大的改观。例如不定积分计算、曲线图形、曲面的三维图形的绘制等等都会变得非常简便。与我们开始学微积分时比较，那时一个学生总要做上一两千个不定积分才谈得上过关。现在把培养专业数学家的任务放在一边，对一般以实际应用为主要目的学生来说，不定积分的计算可适当"淡化"是很明显的事。当然，实际做起来还会遇到许多问题，如何使这些数学软件"融入"基础理论的教学还是一个新的课题。与此相似，数学建模、数学实验的处理也还有待实践经验的积累。但总的说来，本书既然认真的进行了这一方面的探索和努力，自然是十分难能可贵的。相信会得到成绩，更希望在今后的数学实践中本书会取得更大的成功。

齐民友

程少兰　　2001年5月1日

前　言

本书依据原国家教育委员会高教司关于高等工程专科《高等数学课程基本要求》及近年来我国高等工程数学教改的新形势和新精神，在科学技术文献出版社1993年出版的由后勤工程学院数学教研室编写《高等数学》(第二版)的基础上，结合我们多年的教学改革实践，组织教学经验丰富的专家、教授重新编写了这本面向二十一世纪的改革教材，它是工科大专及本科少学时各专业和本科函授的实用教材。本书编写的主要指导思想是简要且通俗易懂地介绍微积分的基本思想和基本方法，为后续数学课程与各专业课程打下良好的高等数学基础，培养学生的现代数学素质和能力。本书注意将现代数学的观点和语言融入微积分的素材中；注意对微积分发展简史及其基本思想的介绍；用统一的观点处理各种类型的积分，引入第一、二型积分的新概念，突出定积分的思想和微元法，淡化不定积分的计算，增加了以微机应用为特色的数学实验的内容；用向量场的理论处理曲线积分和曲面积分，加强了高等数学与物理、力学、工程技术的对接和实用性；加入了工程技术、生态数学、经济数学及数学建模等方面的各种实例等。在教材内容的编排和结构上，除了基本内容外，还写进了部分超纲和微积分历史方面的材料，供学生选学、自学和课外阅读。每章末尾进行全章内容小结，力求使本书成为面向新世纪的、具有较高水平和鲜明特色的新型教材。

全书共十三章，分成上、下两册。本书由阎大桂教授、但琦副教授主编，主要编写工作由阎大桂、但琦、林琮(副教授)、付诗禄(副教授)、顾又川、蒋继宏、余文革等担任，本书主审为严尚安教授。统稿和修定由阎大桂、但琦负责。后勤工程学院副教授赵静、杨秀文、余建民、蒋银华等同志参加了本书的论证和部分内容的编写工作。

本书的编写受到了著名数学家、教育家(原武汉大学校长)齐民友教授的热情指导和帮助，并为本书作序，特表衷心谢意！

本书得到了后勤工程学院基础部、教务处、教保处的大力支持，在此表示感谢！

编　者 2001.8

目　录

第一章 绪 论

第一节 数学发展简史及数学基本思想

一、数学发展简史

数学同其它各门科学一样,在其发展的进程中,形成一整套行之有效的思想方法,而且还在不断地产生新的思想方法.数学思想方法是数学的灵魂.那么究竟什么是数学思想方法呢?狭义的理解认为:数学思想方法主要指数学本身的论证、运算以及应用的手段;广义的理解认为,数学思想方法除上述内容外,还应包括关于数学概念、理论、方法以及形态的产生与发展规律的认识.历史表明,数学的发展,不仅表现为量的积累,而且还表现为质的飞跃.数学思想方法有四次重大转折:从算术到代数,从常量数学到变量数学,从必然数学到或然数学,从明晰数学到模糊数学.

数学的发展始终受着自然科学的影响.特别是,自然科学通过向数学提出各种重大的问题,在一定程度上推动着数学的发展.十七世纪,随着欧洲封建社会开始解体和资本主义工场手工业向机器大生产的过渡,自然科学从神学的桎梏下解放出来,开始大踏步地前进.这时,生产和自然科学部门,向数学提出一系列必须从运动变化和发展观点来研究事物的新问题.这些新问题,大体可以分为五类:

第一 描述非匀速运动物体的轨迹.开普勒在总结大量观测资料的基础上,发现行星围绕太阳运动的轨迹是椭圆;伽利略明确提出,各种抛射物体诸如炮弹和石头的运动轨迹是抛物线.

第二 求变速运动物体的速度或路程.

第三 求曲线在任一点的切线.这个问题主要来源于光学和力学的需要.

第四 求变量的极值,即求变量在某种条件下所能达到的最大值或最小值.

第五 计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心、变密度物体的重量以及物体间的引力等.

变量数学产生于十七世纪,它大体上经历了两个具有决定性的重大步骤.第一个步骤是解析几何的产生.1637 年,法国数学家笛卡儿发表《方法论》一书,其中一篇附录叫做《几何学》,他首次明确提出了点的坐标和变数的思想,并借助坐标系用含有变数的代数方程来表示和研究曲线.这篇附录的问世,是解析几何产生的重要标志.和笛卡儿同时代的法国业余数学家费尔马,对解析几何的创立也作出了突出的贡献,在数学史上和笛卡儿一起分享着解析几何创立者

的荣誉.但他关于这方面的文章直到1679年,即他去世两年之后才发表出来.

变量数学产生的第二个决定性步骤是微积分的创立.十七世纪许多著名数学家、天文学家和物理家都参与了这项重大发明的研究工作.其中贡献最大的要属牛顿(Newton,1642—1727)和莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)两个人.牛顿主要是从运动学来研究和建立积分学的.他的微积分思想最早出现在1665年5月20日的一页文件中.这一天可作为微积分诞生的日子.他写了《曲线求积论》(1704年出版)和《流数术方法和无穷级数》(1736年出版)两部专论微积分的著作.这两部著作集中体现了他在微积分方面的研究成果.他称连续变量为"流动量",用符号 v \ x \ y \ z 等表示;把它们的导数称为"流数",并用加小点的字母 x表示.

莱布尼兹是一个多才多艺的学者,一生中突出的贡献之一是创立地完成微积分学的创立工作.他创立微积分主要是从几何学的角度出发.他的微积分思想最初体现在1675年的手稿之中.

变量数学产生的两个主要步骤都是在十七世纪完成的,因此,十七世纪也就成了常量数学向变量数学转变的时期.变量数学的产生,有着极其重要的意义,其具体体现可概括为以下三个方面.

首先,变量数学的产生,使数学自身在思想方法上发生了重大的变革,常量数学的许多分支学科,诸如代数、几何、三角和数论等,由于变量数学的渗透而在内容上得到了极大的丰富,在思想方法上发生了深刻的变化.例如可把解方程理解为求函数的零点,借助分析的方法给出了代数基本定理的严格证明等等.通过这次变革,新的数学分支学科如雨后春笋般地涌现出来,诸如解析数论、微分几何、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论、级数论、差分学、实变函数论和复变函数论等.总之,从变量数学产生后,变量数学的思想方法很快就在整个数学中占据了主导地位,长时期内规定和影响着数学发展的方向.

其次,变量数学的产生,使自然科学描述现实物质世界的运动和变化过程成为可能.自然科学的对象是运动变化着的物质世界,变量数学的产生为自然科学定量地描述和研究物质世界的运动、变化规律提供了强有力的工具.恩格斯十分重视微积分在自然科学中的作用,他指出:"只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程:运动."

第三,变量数学的产生具有重大的哲学意义.变量数学的基本概念变量、函数、极限、导数和微分,以及微分法和积分法,从本质上看,不外是辨证法在数学上的运用.恩格斯曾明确指出:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辨证法进入了数学."可以说变量数学的产生,是辨证法在数学中取得的一次根本性胜利.正像恩格斯所指出的:"在一切理论成就中,未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了."随着变量数学的思想与方法在数学中的全面的渗透,数学日益成为"辨证法的辅助工具和表现方式",这不仅为后来数学的发展提供了正确的思维方法,而且又为辨证法的普适性从数学上提供了生动的例证.

二、数学思维与数学方法

数学教育的主要任务是培养学生具有创造性的数学能力和解决实际问题的能力,而创造性能力的体现是创造性思维.因此,要培养学生的创造性能力必须加强数学思维和数学方法的培养和训练.

从数学科学的内容也可以看出加强数学思维和数学方法培养的重要性.众所周知,数学科学的内容,始终反映着两条线,即数学基础知识和数学思想方法,每一章节乃至每一道题,都体现着这两条的有机结合.这是因为没有游离于数学知识之外的数学方法,同样也没有不包含数学方法的数学知识.

从哲学角度讲,任何内容都必须以某种形式为载体,任何形式必然容纳有一定的内涵,而方法和内容是相辅相成互相促进的.例如,在大量几何事实的基础上,提出了几何的公理化方法,而公理化方法的引进又大大地提高了几何的科学性并深刻地影响了整个数学的发展.又如坐标方法的引进,把点与数联系了起来,从而把曲线与方程联系了起来,使得可以用代数方法研究几何问题,同时也可以用几何的观点处理某些代数问题.这也就为微积分的发展奠定了基础,使解析数学蓬勃发展起来.

在数学教学中突出数学思维与数学方法的重要意义还表现在数学对其他学科领域的作用上.一百年前,恩格斯根据当时的实际情况形容过数学的作用:"在固体力学中是绝对的;在气体力学中是近似的,在液体力学中已经比较困难了;在物理学中多半是尝试的和相对的;在化学中是最简单的一次方程式;在生物学中 = 0."然而,时到如今,数学方法不仅在整个自然科学、工程技术领域得到了广泛的应用,而且已向社会科学的各个领域渗透.目前这些领域中的深刻研究都需要数学的方法和技能技巧.由此可见,数学知识和数学方法是整个人类知识结构中的两个重要组成部分.但知识一般并不能直接转化为能力,这种转化必须以思维为中介才能实现.

1.数学方法

数学方法寓于数学知识之中,所以应该把数学方法的培养与数学知识的教学融为一体.首先,从思想上提高对数学方法培养的认识,掌握数学知识与掌握数学方法是同样重要的.数学知识,如概念、定理、公式,都明显地写在书上,不会被人忽视,而数学方法如同有机体中的生命现象、化学元素的性质等,是无形的东西,人们看见的是躯体,而灵魂常被忽略.因此,教学中要留意从知识中发掘、提炼出数学方法,阐述方法的作用.第二,运用对比手法显示方法的优越性,对比最具有说服力,能明显地显示出一种巧妙方法的优越性.第三,互相关联、前后照应,注意同一方法在不同教材中的作用.有些数学方法,如换元法、配方法、待定系数法等不只是适用于某个特定的教学对象,而是适用许多不同性质的问题.在不同性质问题的解决中,遇到了相同的方法,就可以加深对这种方法作用的认识,提高运用方法的技巧.第四,对不同类型的数学方法应有不同的教学要求,采取不同的教学方法.对宏观性的数学方法,应着重理解其思想实质,认识到它们的重大作用;对逻辑性的数学方法,应着重讲清其逻辑结构,要求正确使用逻辑推理形式.类比是有助于发现的一种逻辑方法,注意应用类比法推广已有的性质、发现新的数学事实;对技巧性的数学方法,则应着重培养运用方法的技巧,注意扩大应用方法的范围.最后,注意各类数学方法的综合运用.

2.数学思维

数学知识是数学思维活动升华的结果,整个数学教学过程就是数学思维活动的过程.如何加强数学思维能力的培养?首先,应对数学思维本身的内容有明确的认识.长期以来,在数学教学中过分地强调逻辑思维,特别是演绎逻辑,从而导致了数学教育仅赋予以"再现性的思维"、"总结性思维"的严重弊端.因此,为了发展创造性思维,必须冲破传统数学教学中把数学思维单纯地理解成逻辑思维的旧观念,把直觉、想象、顿悟等非逻辑思维也作为数学

思维的组成部分.只有这样,数学教育才能不仅赋予以"再现性的思维",更重要的是赋予"创造性思维".第二,通过概念教学培养数学思维.认识概念引入的必要性,创设思维情境及对感性材料进行分析、抽象、概括,结合有关数学史谈其必要性,是培养创造性思维的大好时机.比如,为什么要将实数域扩充到复数域,扩充的办法为什么是这样,这样做的合理性在什么地方,又是如何想出来的等等.也就是说,不仅要解决"是什么"的问题,更重要的是解决"是怎样想到的"问题.其次,对概念了解过程是一个复杂的数学思维活动过程.理解概念是更高层次的认识,是对新知识的加工,也是旧的思维系统的应用,同时又是使新的思维系统建立和调整的过程.要从概念的形成中,既培养学生创造性的思维能力,又使他们学到科学的研究方法.第三,在数学定理的证明过程中培养数学思维.数学定理的证明过程就是寻求、发现和作出证明的思维过程.它几乎动用了思维系统中的各个成分,是一个错综复杂的思维过程.数学定理、公式反映了数学对象的属性之间的关系.关于这些关系的认识,要尽量创造条件,从感性认识和已有知识入手,调动学习积极性.另一方面,在观察的基础上,通过分析、比较、归纳、类比、想象、概括成抽象的命题.这是一个思考、估计、猜想的思维过程.

(1)类比思维:类比是一种创造性思维的形式.著名数学家康德指出,每当理智缺乏可靠论证的思路时,类比这个方法往往能指引前进.类比推理是创造性地表达思维、传授知识的重要手段.

(2)归纳思维:归纳是人类赖以发现真理的基本的、重要的思维方法.归纳是在通过多种手段对许多个别事物的经验认识的基础上,发现其规律,总结出原理或定理.归纳思维,就是要从众多的事物和现象中找出共性和本质的东西.

(3)发散思维:发散特性的思维是指信息处理的途径灵活多变,求结果的丰富多样.它是一种开放性的立体思维,即围绕某一问题,沿着不同方向去思考探索,重组眼前的信息和记忆中的信息,产生新的信息并获得解决问题的多种方案.因此,发散思维也称为求异思维,是一种重要的创造性思维.

(4)逆向思维(又称反向思维):它是相对于习惯性思维的另一种思维形式.它的基本特点是从已有的思路的反方向去思考问题.它对解放思想、开阔思路、解决某些难题、开创新的方向,往往能起到积极的作用.

(5)数学与猜想:科学巨匠牛顿指出:"没有大胆的猜想,就做不出伟大的发现."数学猜想是指已知事实和数学知识对未知量及关系所作出的一种似真的推断,它是数学研究的一种常用的科学方法.

恩格斯指出:"一个民族要想站在科学的最高峰,就一刻也不能没有理论思维."

高等数学(其中主要部分是微积分)是所有理工科大学一门重要基础课,它对培养学生的素质是其它学科难以替代的.美国国家科学院院士、沃尔夫数学奖得主P.拉克斯(Lax)指出:"目前数学在非常广泛领域里的研究蓬蓬勃勃;而且成就辉煌,但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其它科学和学科的相互关系.这种不平衡对于数学及对于它的使用者都是有害的.纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始就做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程.在微积分里,可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉."因此,微积分是人类智慧最伟大的成就之一.

第二节　集合与映射

一、集合的概念

自从康托(Cantor)在19世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为数学的基础和语言.所谓**集合**(简称**集**)是指具有某种特定属性的具体或抽象的事物所构成的一个整体,而其中的每个事物称为该集合的**元素**(简称**元**).

我们常用大写字母 A,B,X,Y 等表示集,小写字母 a,b,c,d 等表示元.设 A 是一个集,若某一事物 a 是 A 的元,则说 a 属于 A,记为 $a\in A$;若 a 不是 A 的元,则说 a 不属于 A,记为 $a\notin A$.

例如,所有英文字母构成字母集,所有自然数的全体构成数集,平面上第一象限里所有点的全体构成点集,等等.再如平面解析几何中的直线、曲线等几何图形也是由平面上满足一定条件的点所构成的点集.

集合通常有两种表示方法.一是列举法,列举出集合中的全部元素,例如 $A=\{2,4,6,8\}$;另一种描述法,给出该集中元素所具有的性质,例如 $B=\{x\mid x^2-1\geq 0\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

设集 A,B 若 $\forall a\in A\Rightarrow a\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或记为 $B\supset A$(读作 B 包含 A),这时 A 的所有元素都是 B 的元.

子集具有下列性质:

(1)$A\subset A$;

(2)$A\subset B,B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

为研究问题的需要,引入一个不含任何元素的集,称为空集,记为$\varnothing$,并规定$\varnothing$是任何集之子集,即 $\forall A,\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$,这时 A 与 B 含有完全相同的元,实际上是同一集,例如

$$A=\{x\mid x^2-1=0\},$$
$$B=\{-1,1\},$$

有 $A=B$.

若 $A\subset B$ 但 $A\neq B$,则说 A 是 B 的真子集.

全体自然数,整数,有理数,实数和复数分别构成的集依次记为 N,Z,Q,R,C,显然有

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C.$$

设 $a,b\in R$ 且 $a<b$,数集

$$\{x\mid a<x<b,x\in R\}$$

称为开区间,记为(a,b);数集

$$\{x\mid a\leq x\leq b,x\in R\}$$

称为闭区间,记为$[a,b]$;类似地记

$$[a,b)=\{x\mid a\leq x<b,x\in R\};$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leq b,x\in R\};$$

实数集 R 亦可记为区间 $(-\infty,+\infty)$，而

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in R\};$$

$$(-\infty,a]=\{x\mid x\leq a,x\in R\}$$

等.

在今后的研究中，我们常常要考虑一个点附近的情况.例如研究函数不仅仅是讨论它在一点的取值，更主要地是要研究它在这一点附近的变化.一个点的附近就是“邻域”的概念.

设 $x_0\in R$，对 $\delta\in(0,+\infty)$ 数集

$$\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in R\}$$

称为点 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.显然 $U(x_0,\delta)$ 便是以 x_0 为中心的对称区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.若只考虑 x_0 附近但不包括点 x_0 自身，称之为点 x_0 的**去心邻域**，记为 $\hat{U}(x_0,\delta)$.

另外，$\{x\mid x_0-\delta<x\leq x_0,x\in R\}$ 称为 x_0 的左邻域，记为 $U(x_0^-,\delta)$；$\{x\mid x_0\leq x<x_0+\delta,x\in R\}$ 称为 x_0 的右邻域，记为 $U(x_0^+,\delta)$.常将左、右邻域简记为 $U(x_0^-)$ 和 $U(x_0^+)$.

二、集合的运算

1.并集

给定集合 A,B，称集合

$$\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$.显然有

$$A\cup\varnothing=A;A\cup A=A;$$

$$A\cup B=B\cup A;(A\cup B)\cup C=A(B\cup C).$$

2.交集

给定集合 A,B，称集合

$$\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$.显然有

$$A\cap\varnothing=\varnothing;A\cap A=A;$$

$$A\cap B=B\cap A;(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

$$A\subset B\Rightarrow A\cap B=A.$$

设 $A_1,A_2\cdots A_n$ 是一组集，可以定义这组集的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

和这组集的交集

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

3.差集

给定集合 A,B，称集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

为 A 与 B 的**差集**,记为 $A-B$.显然

$$A-A=\varnothing;A-\varnothing=A$$

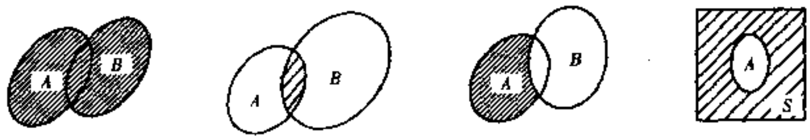
$$\varnothing-A=\varnothing;A-B=A-(A\cap B);$$

$$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C).$$

在具体问题中,往往把讨论限制在某一固定的集 X 的范围内,讨论的内容只涉及到它的元素或子集等,这时常常称 X 为全集.全集是一个相对的概念,所研究的问题不同,全集也不同.例如讨论自然数的加法运算,自然数集 N 可以被认为是全集,但当讨论自然数的加减乘除运算时,就要以有理数集 Q 为全集,而 N 只是 Q 的子集.

相对于全集 X,若 $A\subset X$,则称 $X-A$ 为 A 的余集或补集,记为 A^C.

用文(Venn)图能够较直观地理解并集、交集、差集和余集的概念.(见图 1-1)



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$　　A^C

图 1-1

三、映射的概念

下面介绍集与集之间的一种"对应"关系.

定义 1　设 A,B 是两个非空集,若存在一个确定的规则 f,使 $\forall x\in A$,按照 f,存在唯一的 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是 A 到 B 中的**映射**,记为 $f:A\to B$,并称 y 为 x 在映射 f 下的**像**,而称 x 为 y 在 f 下的**原像**.映射 f 也可以记为 $f:x\mapsto y$ 或 $f(x)=y$.

由定义,像是唯一的,但其原像不一定唯一.集 A 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$,而 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$,显然 $R(f)\subset B$.

例 1　设 A 为我校现有在校学生的集合,B 为学生所有生日日期的集合,定义 f 为每个学生与他(她)的生日日期的对应,则 f 是 A 到 B 的一个映射.

例 2　设 $A=B=R$,定义 $f:x\mapsto x^2$,则 f 是 R 到自身的一个映射.

例 3　设 $A=\{C(x,y)\mid C(x,y)$ 为平面上以 (x,y) 为圆心的圆$\}$,$B=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$,令 $f:C(x,y)\mapsto(x,y)$,则圆与圆心的对应 f 是 A 到 B 的一个映射.

例 4　设 $A=N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,$B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 定义

$$f:n\mapsto 2n,n\in N$$

则 f 是 N 到 B 的一个映射.

例 5　设在集 A 上定义

$$I_A:\alpha\mapsto\alpha,\forall\alpha\in A$$

则 I_A 是 A 到自身的一个映射,通常称为 A 上的恒等映射(或单位映射).

对于 A 到 B 的映射 f,若 $f(A)=B$,则称 f 是 A 到 B 上的映射(或称满射);若 $\forall x_1,x_2\in A$,有 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是 A 到 B 的单射.

上面的例子中,例3是满射但不是单射,例4和例5既是单射也是满射,而例2既非单射亦非满射.

定义2 若映射 $f: A \to B$ 既是单射又是满射,则称 f 是 A 到 B 上的双射,双射常被称为一一对应.

一一对应包含了"单"和"满"两个含义.

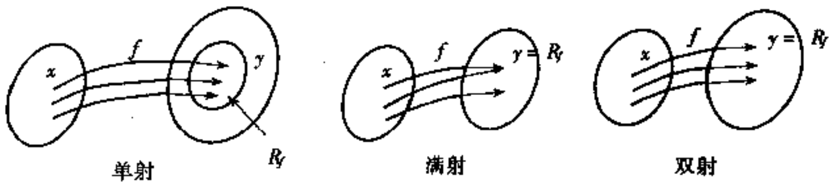


图1-2

例6 设 $A=R, B=\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$,则映射

$$f: x \mapsto y=\sin x$$

就不是 A 到 B 的一一对应,这是因为 f 不是单射.而若取 $A_1=\left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$,则称 f 是 A_1 到 B 上的一一映射.

此例说明,映射不仅仅是"对应"的规则,若集合不同,它的特性可能完全不同.因此映射是"集合与建立在集合上的对应规则的两者的统一".

换一个角度,将 $f: A \to B$ 看成是由其原像和像所构成的有序对的集合,即

$$f=\{(x, y) \mid x \in A, y \in f(A)\}$$

则映射 f 是 $A \times B$ 的子集.

四、映射的运算

定义3 设有映射 f, g,其定义域分别为 A, B,若 $A=B$,且 $\forall x \in A$,有 $f(x)=g(x)$,则称 f 与 g 相等,记为 $f=g$.

例7 设 $A=R$,令

$$f: x \mapsto y=\sin^2 x+\cos^2 x, \forall x \in R$$

$$g: x \mapsto y=1, \forall x \in R$$

则 $f=g$.

定义4 设 $g: x \mapsto u$ 为 A 到 B 中的映射,又 $f: u \mapsto y$ 为 C 到 D 中的映射,若当 $A_1 \subset A$, $A_1 \neq \varnothing$,且 $g(A_1) \subset C$ 时,则 A_1 到 D 中的映射

$$f \circ g: x \mapsto y, x \in A_1$$

称为 f 与 g 的复合,其像为

$$y=(f \circ g)(x)=f(g(x)), x \in A_1$$

例8 设 $f: u \mapsto y=\sqrt{u}$,

$$D(f)=\{u \mid 0 \leq u \leq +\infty\}$$

则 $$R(f)=\{y \mid 0 \leq y \leq +\infty\}$$

又设 $$g: x \mapsto u=1+x^2$$

$$D(g)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\},$$

则　　　$R(g)=\{u\mid 1\leq u\leq +\infty\}$

因为 $R(g)\subset D(f)$,故有

$$f\circ g:x\mapsto y=\sqrt{1+x^2},x\in A_1$$

其中 $A_1=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

例 9　设 $f:u\mapsto y=\lg u$

$$D(f)=\{u\mid u>0\}$$

则　　　$R(f)=R$

又设　　$g:x\mapsto u=x^2$

$$D(g)=\{x\mid x\in R\},$$

则　　　$R(g)=\{u\mid u\geq 0\}$

当 $x\neq 0$ 时 $g(x)>0$,这时 $R(g)=D(f)$,故有

$$f\circ g:x\mapsto y=\lg(x^2)=2\lg|x|,x\in A_1$$

其中 $A_1=\{x\mid x\in R,x\neq 0\}$.

定义 5　设有映射 $f:A\to B$,若存在一个映射 $g:B\to A$,使

$$g\circ f=I_A,f\circ g=I_B$$

则称 f 是可逆映射,并且称 g 是 f 的可逆映射,简称逆射,记为 $g=f^{-1}$.

习　题 1-2　集合　映射

1. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$C=\{a_1,a_2,a_4,a_5,a_6\}$,写出 $A\cup B$,$B\cup C$,$A\cap B$,$A-B$.
2. 设 $A=N$,B 为负整数集合,$C=\{0\}$ $D=\{2n\mid n\in z\}$ 试写出(1)$A\cup B\cup C$,(2)$A\cap B$,(3)$(B\cap D)\cup C$,(4)$D\cap C$.
3. 下列集合中哪些是空集(设全集 $S=R$)?

(1)$A=\{x\mid x^2=9$ 且 $2x=4\}$　　(2)$B=\{x\mid x^2\neq x\}$

(3)$C=\{x\mid x+8=8\}$　　(4)$D=\{x\mid x^2<0\}$

第三节　函数及其特性

一、函数的概念

定义 1　若 f 是非空实数集 $A\subset R$ 到 R 的映射:

$$f:A\to R$$

则称其为定义在 A 上的一元(实)数值函数(简称函数),A 称为 f 的**定义域**,通常记为 $D(f)$. $\forall x\in D(f)$,其像 $y=f(x)$ 称为 x 的函数值,而

$$f(A)=\{y\mid y\in f(x),x\in A\}$$

称为 f 的**值域**,也记为 $R(f)$.

定义中的函数是指映射 f,而 $f(x)$ 是 x 在 f 下的像,严格地讲两者是不同的概念.但今后为方便计,也常常称 $y=f(x)$ 是 x 的函数,

函数 $y=f(x)$在实际问题中是描述两个相依数量的变化过程，因此习惯上称 x 为自变量，y 为因变量.

当自变量 x 取某一值x_0时，与之对应的函数 y 的值称为函数$y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作

$$f(x_0)\text{或}y\big|_{x=x_0}$$

例 1 设函数 $y=f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(1)$，$f(a)$，$f(a+1)$，$f(a+h)$.

解 求函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的值，只要用 x_0 取代 x，也就是把 $x=x_0$ 代入函数式中去运算.

$$f(1)=1^2-2\cdot1+3=2;$$
$$f(a)=a^2-2a+3;$$
$$f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+3=a^2+2;$$
$$f(a+h)=(a+h)^2-2(a+h)+3=a^2+2a(h-1)+(h^2-2h+3).$$

用数学的运算式来表示函数是函数的最常见的一种表示方法，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$. 根据函数定义，给定一个函数同时要指明函数的定义域. 当表达一个函数而没有写出它的定义域时，我们约定其定义域是自明的，即定义域为自变量所能取的使算式有意义的一切实数值的集合，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$. 如果是实际问题，则函数的定义域还要受到实际意义的约束，例如半径为 x 的圆的面积$y=\pi x^2$，其定义域为$[0,+\infty)$.

我们也可以用几何的方法来表示函数. 在平面直角坐标系中，以 x 为横坐标、y 为纵坐标，就确定平面上一点(x,y). 当 x 遍历定义域$D(f)$，则点(x,y)的集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$$

就可以表示函数 $y=f(x)$. 称之为 $y=f(x)$的图形.

二、反函数与复合函数

定义 2 若函数 f 是 A 到$f(A)$的双射，则称 f 的逆射f^{-1}为 f 的**反函数**.

设 $y=f(x)$，$x\in A$，则其反函数表为

$$x=f^{-1}(y),y\in f(A)$$

由于习惯上 x 表自变量，y 表因变量，于是我们约定

$$y=f^{-1}(x),x\in f(A)$$

也是 $y=f(x)$的反函数.

例如，函数 $y=2x+1$，$x\in R$，有反函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，$x\in R$；函数 $y=10^x$，$x\in R$，有反函数 $y=\lg x$，$x\in(0,+\infty)$.

再如，函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$，有反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,0]$，有反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；而函数 $y=x^2$，$x\in R$，却不存在反函数.

将 $y=f(x)$和其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上，这两个图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

定义 3 设函数 $g:A\to R$，$f:B_1\to R$，. 若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则有**复合函数**

$$f\circ g:A\to R$$