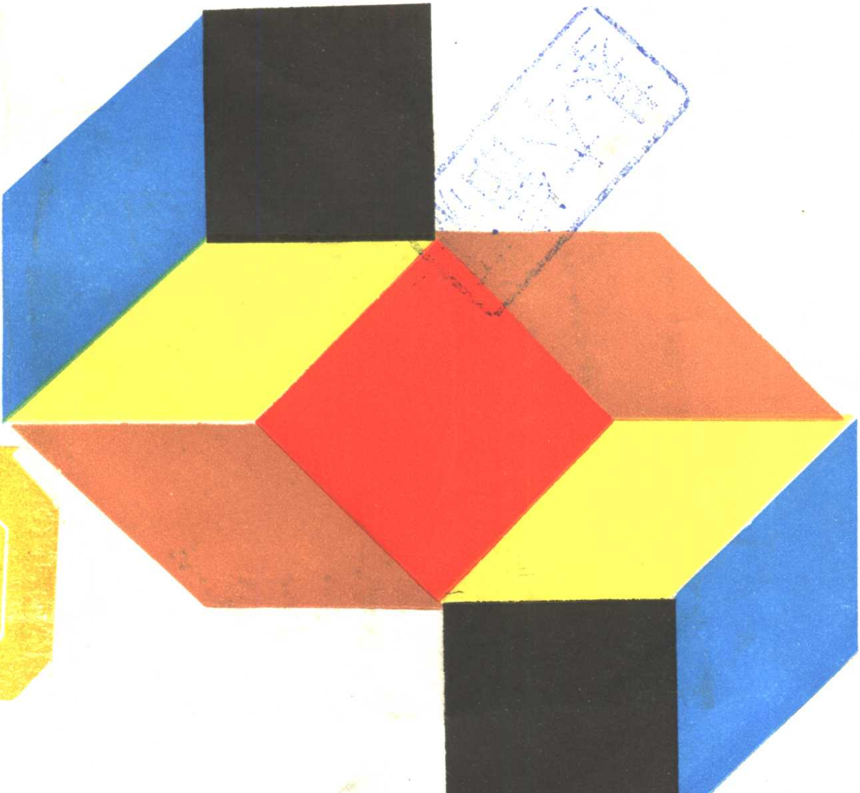
数学小丛书
智慧之花

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙 主编



北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

(1)

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙 主编

北京大学出版社

内 容 提 要

在一个三角形内，周长相同的图形中哪一个面积最大？n 对夫妇围圆桌而坐，男女相间夫妇不相邻，有多少种坐法？熟知的筹码游戏的获胜策略是怎样想出来的？$1^{-2}+2^{-2}+3^{-2}+4^{-2}+\cdots=$？复数项的条件收敛级数重排后能收敛到任意一个复数吗？如何才能使数学易懂？……19 篇译文对这些并不陌生的问题提出了巧妙、新颖、富有思想、与众不同的回答. 你可能很想知道奥赛优胜者在赛场上是如何解题及他们参赛的心情，那么就请看我国参加第二十九届奥赛的两位选手所写的文章.

数学小丛书——智慧之花

(1)

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙 主编

责任编辑：刘 勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 6.625印张 130千字

1990年2月第一版 1990年2月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN 7-301-01002-8/O·171

定价：2.85 元

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的.也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么.

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去.这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法.简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等.

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法.我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师(主要是中学的老师)和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物.

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容.我们更不想给学生增加习题量以

应付考试.恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害.通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练.在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案.总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法.

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验.读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判.我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作.

丁石孙

一九八九年二月

出 版 说 明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间.

——N. M. Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的“理论”分支.在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准.

——J. von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标.

——F. Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式.

——L. Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标.

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者.所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年 2—3 册.

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作.

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

一九八九年二月

目　录

平面等周问题的简单解法①

Richard F. Demar

引言 等周问题,顾名思义,就是要在周长给定并满足某些条件的所有区域中,找出面积最大的区域.解这类问题,通常是先证明如果解存在,则它必定具有某种形状,然后再去证明解必定存在.在探讨等周问题的较早一些的著述中,都认为解的存在性是不言而喻的,并没有意识到这是一个必须加以考虑的问题.因此,在默认了解必定存在之后,剩下的问题仅仅是讨论解所必须具有的形状.试图用初等方法来研究这一问题,大致也只能如此.本文就是报告一种初等方法,但它比过去使用过的大多数方法看来具有更广泛的用途.如前所述,我们将始终假定解是存在的,而只是讨论解所必须具有的形状.

从古时候起,人们就考虑等周问题.相传 Dido 女皇(凭直觉)解决过一个等周问题,并由此导致了迦太基城的建立([5],第882页).根据Coolidge的考证,古希腊数学家Zenodorus 在公元前二世纪就研究过这类问题,他的研究成果在5 个世纪之后由 Pappus 详述并加以推广. 18 世纪时,Lagrange 创立了变分法,这对处理等周问题提供了最强有力的工具,尤

① A simple approach to isoperimetric problems in the plane, *Math. Magazine*, 48 (1975), 1—12.

其适用于这个问题的更一般性的提法. 但是,几何方法不仅在平面中,而且在别的某些场合也都能成功地使用,这一事实是由 19 世纪时的大几何学家 Jacob Steiner 证明的[6].

等周问题的一个直接的简化是下面的定理:

(*) **在具有周长 p 的所有区域中,如果 R 的面积最大,则 R 一定是凸的.**

集合 S 被称为是凸的,如果对于 S 中的任意两点 A 和 B,直线段 AB 一定整个地被包含在 S 中. (*)的证明见[4]. 它的证明思路是很简单的,即,如果 R 不是凸的,则存在一个区域,其面积更大但周长比 R 的短(见图 1). 这条定理不断地被用于去简化遇到的各种问题,但是没有一种方法能自始至终

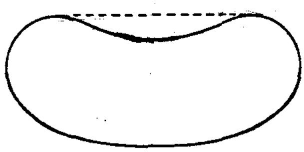


图 1

地被用于去解决这各种问题. 对于我们现有的大多数问题,几何方法是有奇效的. 本文的目的是说明,定理(*)不仅能用于简化问题,而且能用于解决许多问题. 一个非常简单的处理手法,但其威力远远超过人们的预料,这便是一例.

我们是这样将定理(*)用于解题的. 如果我们希望证明,满足某些给定条件且具有最大面积的区域具备某些性质,那末就去考虑那些满足这些给定条件但不具备这些性质的区域 R. 如果我们能构造出一个区域 R',它不是凸的但和 R 有相同

的面积和周长并满足那些给定条件，则 R 就不可能具有最大的面积，否则 R' 将是一个非凸的解①. 这一方法曾被 Adler（参见[1]）在很狭窄的形式中用于处理一个很特殊的问题，但并没有意识到它有着广泛的应用.

现在用一个非常简单的例子来解释这一方法，我们用它去证明在周长为 p 的所有平面区域中，具有最大面积的区域不是正方形. 如果 R 是周长为 p 的正方形 $ABCD$，则它的边长是 $p/4$. 选取 AB 上的点 E 及 BC 上的点 F，使 EF 的长度小于 $p/4$. 构造 $\triangle E'F'B' \cong \triangle EFB$，其中的 F' 和 E' 是边 DC 上的内点. 则多边形 $AEFCE'B'F'D$ 不是凸的，但它的面积和周长与 R 相同，因而在周长为 p 的所有区域中 R 不可能有最大的面积（图 2).

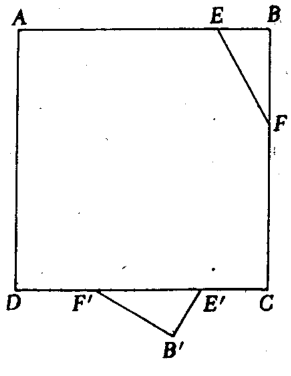


图 2

① 这实际上是一种特殊形式的反证法. ——译者注

为了证明这一方法的有用性，我们将用它及它的一些稍加变化的形式去解下面的 3 个问题：设 p 是给定的正数.

1. 设 n 是给定的正整数. 在周长等于 p 的所有 n 边形中，求出具有最大面积的一个.

2. 在具有周长 p 的所有平面区域中，求出具有最大面积的区域.

3. 给定一个周长大于 p 的三角形，在被包含在此三角形中的周长为 p 的所有区域中，求面积最大者.

这 3 个问题中的前 2 个是经典的，它们的解很早就知晓，第一个问题的解是正 n 边形，第 2 个问题的解是圆. 但我们这里给出的证明是新的. Alfred Garvin 教授提出了第 3 个问题，并猜测了这一问题的正确解，这是他根据物理实验得到的，作者在此表示感谢. Garvin 教授和我都曾认为这一问题是新的. 但是，当这一工作做完并且写完这篇文章之后，作者发现 Steiner 在 1842 年已经发表了这一问题及其解([6], p. 149). 在研究初等问题时有许多这种"撞车"现象. 但这儿给出的证明与 Steiner 的不一样，而且我们相信它是新的.

迄今为止，我们一直在用区域这个词，但并没有定义它. 所谓**区域**，我们指的是有界连通开集的闭包，它的边界是一条简单的闭可求长曲线[①]. 本文中用 $l(AB)$ 表示线段 AB 的长度，用 $m(\angle ABC)$ 表示角 ABC 的角度.

文中要用到一些大家熟知的凸集边界的性质. 设 R 是一个凸集，其边界为 γ，γ 是一条简单的闭连续曲线. 设 A 是 γ 上

---

① 这里及下文中，不熟悉这些数学术语的读者可以按自己原有的直观认识去理解文中的概念及结论，这对于理解本文不会产生影响. ——译者注

的一个点. 设想自己站在 A 点上且面向集合 R. 则从 A 出发绕 γ 行走有一个右手方向也有一个左手方向. 所谓在 A 点的右手方向切线，是指在 A 点与 γ 按右手方向相切的射线，类似地定义左手方向切线. 凸集边界的性质之一就是在它的每一点上，既有右手方向切线，也有左手方向切线[3]. 这两条射线的夹角，按包含在 R 中的那部分度量，称为 A 点的内角. 因为 R 是凸的，所以每一点上的内角最多是 $180°$. 设 S 是任意一块区域，它的边界在每一点上既有右手方向切线又有左手方向切线. 如果其边界上有一点的内角大于 $180°$，则 S 一定不是凸的. 如果边界上每一点的内角都等于 $180°$，则称 γ 有切线. 凸集边界的另一条性质是，它包含一个稠密点集，其中的每一点上都有切线. γ 的子集 β 称为是**稠密**的，如果 γ 的任意两点之间有无数个 β 的点.

第 1 个问题的解 在周长等于 p 的所有 n 边形中，正 n 边形的面积最大.

证明 我们先证明解必定是等边的，然后证明它必定是等角的. 设 $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等边的 n 边形. 则 P_n 至少有两条相邻边的长度不相等. 不失一般性，假定 $l(A_1A_2) > l(A_2A_3)$（见图 3）. 在 A_1A_2 上选取点 C 使 $l(A_2A_3) < l(A_2C) < l(A_2A_1)$，连接 A_3C. 则 $m(\angle A_2A_3C) > m(\angle A_2CA_3)$. 依 A_3C 的垂直平分线反射 $\triangle A_2A_3C$. 并设 A_2' 是 A_2 在此反射下的像，从而 $\triangle A_2'A_3C$ 是 $\triangle A_2CA_3$ 的像. 因为

$$m(\angle A_2'CA_3) = m(\angle A_2A_3C) > m(\angle A_2CA_3)$$

及

$$m(\angle A_2CA_3) + m(\angle A_1CA_3) = 180°,$$

所以

$$m(\angle A_2'CA_3) + m(\angle A_1CA_3) > 180°.$$

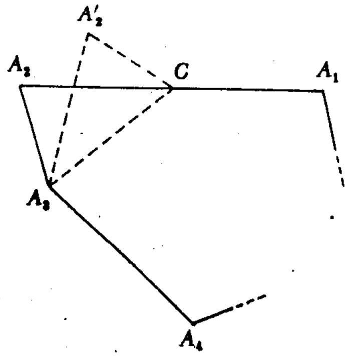


图 3

因此，多边形 $P' = A_1CA_2'A_3\cdots A_n$ 不是凸的. 又因为 $\triangle A_2A_3C \cong \triangle A_2'CA_3$，所以多边形 P' 与 P 有相同的周长和面积. 然而 P' 有 $n+1$ 条边. 为了证明 P_n 不可能是问题的解，我们连接 A_1A_2'. 所得多边形 $A_1A_2'A_3\cdots A_n$ 是 n 边形，其周长小于 P' 的周长从而也小于 P_n 的周长，但它的面积却大于 P'，从而也大于 P_n 的面积. 因此 P_n 不可能是问题的解. 解必定是等边多边形.

具有最大面积的多边形必定是等角的结论也可以类似地推得. 设 $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等角的 n 边形；比如说 $m(\angle A_nA_1A_2) > m(\angle A_2)$ (见图 4). 则存在数 α 使 $0 < \alpha < \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)]$. 在 A_2A_3 上选取点 D 使 $m(\angle A_2A_1D) = \alpha$. 则有

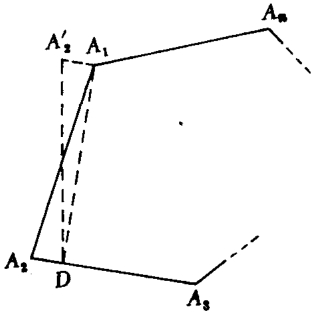


图 4

$$
\begin{aligned}
m(\angle A_3DA_1) &= m(\angle A_2) + m(\angle A_2A_1D) \\
&= m(\angle A_2) + \alpha < m(\angle A_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)] \\
&= \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) + m(\angle A_2)] \\
&= m(\angle A_nA_1A_2) - \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)] \\
&< m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2A_1D) \\
&= m(\angle A_nA_1D).
\end{aligned}
$$

依 A_1D 的垂直平分线反射 $\triangle A_2A_1D$. 设 A_2' 是 A_2 的像. 则 $m(\angle A_2'A_1D) = m(\angle A_2DA_1)$；于是

$$
\begin{aligned}
& m(\angle A_nA_1D) + m(\angle A_2'A_1D) \\
&= m(\angle A_nA_1D) + m(\angle A_2DA_1) \\
&> m(\angle A_3DA_1) + m(\angle A_2DA_1) \\
&= 180°.
\end{aligned}
$$

因此多边形 $P' = A_1A_2'DA_3\cdots A_n$ 不是凸的. 但是由于 $\triangle A_2A_1D \cong$