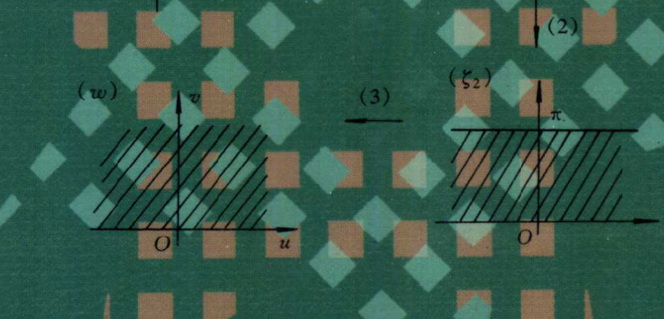
21世纪大学课程辅导丛书

复变函数典型题

龚冬保



西安交通大学出版社

21世纪大学课程辅导丛书

复变函数典型题

龚冬保

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书精选了600多道典型的复变函数题。书中对复变函数课程的每部分内容都给出了客观题和非客观题,对每题的解题思路、解题方法以及解法旁注,都简明清晰、一题多解,并大多有独特的解法。

本书适合学习"复变函数"或"数学物理方法"课程的各专业师生。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数典型题/龚冬保编.—西安:西安交通大学出版社,2002.9

(21世纪大学课程辅导丛书)

ISBN 7-5605-1550-9

Ⅰ.复... Ⅱ.龚... Ⅲ.复变函数-高等学校-解题 Ⅳ.O174.5-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第075668号

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市兴庆南路25号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:12 字数:287千字

2002年9月第1版 2002年9月第1次印刷

印数:0 001~5 000 定价:14.50元

发行科电话:(029)2668357,2667874

龚冬保 西安交通大学数学教授，全国优秀教师，多次获得国家、省、校级优秀教学成果奖，国家级工科高等数学、线性代数和概率统计试题库题库组骨干专家，多次参加考研及各类数学竞赛命题工作，长期担任考研辅导、数学竞赛教练工作，是经验丰富的教学、命题专家。

前　言

本书与《高等数学典型题》、《线性代数与空间解析几何典型题》及《概率论与数理统计典型题》在写作风格上基本是一样的。本书精选了600多道典型的复变函数题，对解题思路、方法与旁注，都力求简明、清晰。希望读者在阅读时能将这些例题当成习题，自己先动手做这些题，实在不会时再参考解答，做完题后再看看旁注。每当做了一定量的题后做个小结，并能用书中介绍的一些方法和技巧去解答更多的题，最好能进一步想一些不同的解题的方法。

本书可供大学开设"复变函数"或"数学物理方法"的各专业的师生作为教学参考书。1991年至1993年，我与张自力、刘耀武、李田等老师策划，准备开发"复变函数习题库"。其中一部分题已由朱旭老师输入计算机中，并在各人的教学中使用过。后因种种原因，此题库未能完成。在编写本书时，编者参考并采用了一部分其中的题，尤其是第1、2、4、5章的选择题，大多数采用了刘耀武副教授编的题，编者在此向以上诸位老师表示衷心的谢意。

由于编写此书时，仍感到有些仓促，加以水平有限，书中难免有疏漏和不足，恳请读者批评指正。

龚冬保

2002年9月于西安交大

目　录

第6章 保角映射

附 录 模拟试卷

第1章 复数与复变函数

1.1 单项选择题

1-1 复数$\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$

(C) $1-\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

解1 分子分母同乘$-1-\mathrm{i}$得

$$\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i} \qquad \text{选(C).}$$

解2 本题用复数的指数表示式算更简单:$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,$\mathrm{i}-1=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$,故 原式$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=1-\mathrm{i}$.

本题虽很简单,但有了解2也使人觉得一题多解有许多优点.

1-2 若$z^2=\bar{z}^2$,则必有(　).

(A) $z=0$ (B) $\mathrm{Re}(z)=0$

(C) $\mathrm{Im}(z)=0$ (D) $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=0$

解 设$z=x+\mathrm{i}y$,则$z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$.

$z^2=\bar{z}^2=\overline{z^2}$,意味着$\mathrm{Im}(z^2)=0$,即$2xy=0$. 选(D).

本题要求基本运算熟悉,特别是共轭复数的运算与性质.

1-3 设$z=x+\mathrm{i}y$是虚数(即$y\neq0$),则$\frac{z}{1+z^2}$为实数的条件是(　).

(A) $xy=1$ (B) $x^2-y^2=1$

(C) $x^2+y^2=1$ (D) $y^2-x^2=1$

解 由条件知

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}.$$

即

$$z+|z|^2\bar{z}=\bar{z}+|z|^2z.$$

$(\bar{z}-z)(|z|^2-1)=0$由$y\neq0$得$|z|^2=1$. 选(C).

要学会充分运用共轭复数的概念及性质.

1-4 设$z=x+\mathrm{i}y$,$|x|\neq|y|$,z^4为实数,则(　).

(A) $xy=0$ (B) $x+y=0$

复数z为实数的充要条件是$z=$

(C) $x-y=0$　　　　(D) $x^2-y^2=0$

解　z^4 为实数,故 $z^4=\bar{z}^4$,即

$$(z-\bar{z})(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)=0.$$

或　$$8xy(x^2-y^2)=0.\text{而 } x^2-y^2\neq 0.$$　选(A).

$\bar{z}$.

1-5　$\mathrm{Im}[(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7]=(\quad)$.

(A) 0　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $-2\sqrt{2}$　(D) $-\sqrt{2}$

解　由 $(1+\mathrm{i})^7=(\overline{1-\mathrm{i}})^7=\overline{(1-\mathrm{i})^7}$

故　$$(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7\text{是实数}.$$　选(A).

1-6　$(1+\mathrm{i})^5/(1-\mathrm{i})^4=(\quad)$.

(A) $\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})$　　(B) $-\frac{1}{4}(1+\mathrm{i})$

(C) $1+\mathrm{i}$　　(D) $-1-\mathrm{i}$

解 1　分子分母同乘 $(1+\mathrm{i})^4$,得

$$\text{原式}=\frac{(1+\mathrm{i})^8(1+\mathrm{i})}{2^4}=1+\mathrm{i}.$$　选(C).

解 2　(用指数表示) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, 1-\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,

故　$$\text{原式}=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4(1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}.$$

本题用复数的指数形式做更简便.

$(1+\mathrm{i})^4=-2^2$

1-7　$\frac{(1-\mathrm{i})^5-1}{(1+\mathrm{i})^5+1}=(\quad)$.

(A) $\frac{31-32\mathrm{i}}{25}$　　(B) $\frac{-1-32\mathrm{i}}{25}$

(C) $\frac{-1+8\mathrm{i}}{25}$　　(D) $\frac{31-8\mathrm{i}}{25}$

解　由上题知 $(1+\mathrm{i})^4=4e^{\mathrm{i}\pi}=-4$.

$$(1-\mathrm{i})^4=4e^{-\mathrm{i}\pi}=-4.$$

$$\text{原式}=\frac{-5+4\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}=\frac{5-4\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{25}=\frac{-1-32\mathrm{i}}{25}.$$

选(B).

要熟悉复数的指数形式及其运算.

1-8　$\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=(\quad)$.

(A) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(B) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(C) $\frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$　　(D) $-\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$

解 1　由 $(1-\mathrm{i})^8=[(1-\mathrm{i})^2]^4=(-2\mathrm{i})^4=2^4$.

及　$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4=4(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2=-8(1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

故 $$原式 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$ 选(B).

解 2 $\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$

故 $$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4 = 2^4\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}},\ (1-\mathrm{i})^8 = 2^4$$

故 $$原式 = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$ 选(B).

1-9 若$\frac{-3-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则( ).

(A) $r = 5, \theta = \arctan 3 - \pi$ (B) $r = \frac{\sqrt{10}}{2}, \theta = \arctan 3 - \pi$

(C) $r = \frac{\sqrt{10}}{2}, \theta = \pi - \arctan 3$ (D) $r = 5, \theta = \pi - \arctan 3$

解 由$(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$得:原式左边 $= \frac{1}{2}(3\mathrm{i}-1)$.

故 $r = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\tan\theta = -3$,故 $\theta = \pi - \arctan 3$. 选(C).

注意辐角θ在第二象限.

1-10 若$\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1+\frac{\mathrm{i}}{3}\sqrt{2}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则( ).

(A) $r = \frac{1}{3}, \theta = \arctan\frac{6}{7}\sqrt{2} - \pi$

(B) $r = 3, \theta = \pi - \arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}$

(C) $r = \frac{1}{3}, \theta = \pi - \arctan\frac{6}{7}\sqrt{2}$

(D) $r = 3, \theta = \arctan\frac{6}{7}\sqrt{2} - \pi$

解 原式 $= -3\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3-\mathrm{i}\sqrt{2}}$,故 $r = 3$.

而原式 $= \frac{3}{\sqrt{1}}(-7-6\sqrt{2}\mathrm{i})$,$\theta$是第三象限的角,故 $\theta = \arctan\frac{6}{7}\sqrt{2} - \pi$.

选(D).

θ是第三象限的角.

1-11 若 $|z| = 1$, $w = z^n + \frac{1}{z^n}$(n是正整数),则( ).

(A) $\mathrm{Re}(w) = 0$ (B) $\mathrm{Im}(w) = 0$

(C) $\arg(w) = 0$ (D) $\arg(w) = \pi$

解 由 $|z| = 1$ 知$\frac{1}{z} = \bar{z}$,因此

$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + \overline{z^n}$ 为实数,故 $\mathrm{Im}(w) = 0$. 选(B).

$|z| = 1$ 时 $\overline{z^n} = \bar{z}^n = 1/z^n$.

1-12 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n}=(\quad)$.

(A) $(-1)^n 2$ (B) $(-1)^{n-1}2$

(C) 2 (D) -2

解 由$\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$及$\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi}$知,等式中两项皆为1.

选(C).

1-13 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\dfrac{1+z}{1-z}=(\quad)$.

(A) $\cot\dfrac{\theta}{2}$ (B) $\mathrm{i}\cot\dfrac{\theta}{2}$

(C) $\tan\dfrac{\theta}{2}$ (D) $\mathrm{i}\tan\dfrac{\theta}{2}$

解 $\dfrac{1+z}{1-z}=\dfrac{1-|z|^2+(z-\bar{z})}{1+|z|^2-(z+\bar{z})}=\dfrac{y}{1-x}\mathrm{i}$.

而
$$\frac{y}{1-x}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}.$$
选(B).

本题也可这样做:

原式
$$=\frac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\mathrm{i}$$
$$=\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}.$$

1-14 $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^{10}}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\mathrm{i}}{4}$ (D) $-\dfrac{\mathrm{i}}{4}$

解 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=8\mathrm{i}$.
$$(1+\mathrm{i})^{10}=2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{2}\pi}=2^5\mathrm{i}.$$

故
$$\text{原式}=\frac{1}{4}.$$
选(A).

用复数的指数表示形式.

1-15 $|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n|=(\quad)$.

(A) $2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}$ (B) $2^n\sin^n\dfrac{\theta}{2}$

(C) $2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$ (D) $2^{\frac{n}{2}}(1+\sin\theta)^{n/2}$

解 $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2(1+\cos\theta)$

故
$$|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n|=2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}.$$
选(C).

本题容易错选(A)项,因为$2(1+\cos\theta)=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$得$|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=2\cos\dfrac{\theta}{2}$. 错在$\cos\dfrac{\theta}{2}$应加上绝对值.

1-16 $\left|\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}\right|=(\quad)$.

(A) 1 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 4

解 原式 $=\dfrac{|1+\mathrm{i}|^n}{|1-\mathrm{i}|^n}\cdot|1-\mathrm{i}|^2=2$.

选(B).

注意$|(1+\mathrm{i})^n|=|(1-\mathrm{i})^n|$.

1-17 $|\sqrt{8+6\mathrm{i}}| = (\quad)$.

(A) $\sqrt[4]{10}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt[4]{14}$

解 $|8+6\mathrm{i}| = 10$. 选(B).

注意 $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$.

1-18 $\max\{|z^4+\mathrm{i}z^2| \mid |z| \leqslant 1\} = (\quad)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\sqrt{\dfrac{11}{4}}$ (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (D) 2

解 由 $|z^4+\mathrm{i}z^2| \leqslant |z|^4+|z|^2 \leqslant 2$,而当 $z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 时,$z^4 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$,$\mathrm{i}z^2 = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -1$,$|z^4+\mathrm{i}z^2| = 2$,故最大值为 2. 选(D).

用不等式确定最大值是常用方法.

1-19 $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{-3} = (\quad)$.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $-\dfrac{\pi}{2}$ (C) $-\dfrac{5}{2}\pi$ (D) $\dfrac{5}{2}\pi$

解 $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$,因此

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{-3} = -\frac{\pi}{2}.$$

选(B).

注意求辐角的方法.

1-20 关于复数辐角的运算,下述等式中正确的是( ).

(A) $\mathrm{Arg}z^2 = 2\mathrm{Arg}z$

(B) $\arg z^2 = 2\arg z$

(C) $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

(D) $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$

解 应选(D),这是由辐角多值性确定的.(D) 中式子应理解为等式左边的任一值,右边必有一个与之相等,并且反过来也一样成立.(B)、(C) 不一定相等是明显的,如(C) 中若 $\arg z_1 + \arg z_2 > \pi$(或小于 $-\pi$),等式便不成立,但如 $-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leqslant \pi$,此式是成立的.至于选项(A),我们先说它的正确写法:记 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$,$z^2 = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$.

则
$$\varphi = 2\theta + 2k\pi$$
或
$$\mathrm{Arg}z^2 = 2\arg z + 2k\pi \tag{1}$$
如记 $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2m\pi$,那么
$$2\mathrm{Arg}z = 2\arg z + 4m\pi \tag{2}$$
比较(1)与(2),便知在(2) $4m\pi \neq 2k\pi$,(当 k 取奇数时),即 $\{\mathrm{Arg}z^2\}$ 与 $\{2\mathrm{Arg}z\}$ 两个取值的集合不一样,故(A) 是不对的.

注意辐角 $\mathrm{Arg}z$ 与 $\arg z$ 的不同含义.

作为考试题,选出正确选项就行了,作为练习题应像本题,知道其余 3 个选项为什么不对.

1-21 $\arg\left(\dfrac{6+\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^{30}$ 所在的区间为( ).

(A) $(0,\frac{\pi}{2})$ (B) $(\frac{\pi}{2},\pi)$ (C) $(-\frac{\pi}{2},0)$ (D) $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$

当 $|\theta|$ 值较小时,$|\theta| < \tan|\theta|$,$|30\theta| < 30\tan|\theta|$,于是

解 本题主要要看$\left(\frac{6+\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^{30}$的辐角在哪个象限，先看

$$\frac{6+\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}=\frac{31-\mathrm{i}}{26}$$

$x=\frac{31}{26}, y=\frac{-1}{26}$，在第 4 象限，且$\tan\theta=-\frac{1}{31}$绝对值很小，因此$30\theta$在第 4 象限中.

选(C).

$$30\theta>\frac{-30}{31}>-\frac{\pi}{2}.$$

1-22 $\mathrm{Arg}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=(\quad)$.

(A) $\frac{5}{2}\pi$　　(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$　　(D) $3(\frac{5}{6}\pi+2m\pi)$

解 如上题所述，由$\arg(-\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{5}{6}\pi$

故 $$\mathrm{Arg}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=\frac{5}{2}\pi+2n\pi=\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi$$

记$n+1=k$，故选(C).(A)、(B)都只是其辐角中的一个，(D)之错与 1-20 题中(A)选项之不对是一样的.

注意辐角的多值性.

1-23 $\arg(5+\mathrm{i})^5$所在区间是(　).

(A) $(0,\frac{\pi}{2})$　　(B) $(\frac{\pi}{2},\pi)$

(C) $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$　　(D) $(-\frac{\pi}{2},0)$

解 1 由$\arg(5+\mathrm{i})$的正切为$\tan\theta=\frac{1}{5}<\tan\frac{\pi}{12}$，故$0<5\theta<\frac{5}{12}\pi<\frac{\pi}{2}$，知应选(A).

解 2 直接计算，$(5+\mathrm{i})^2=24+10\mathrm{i}=2(12+5\mathrm{i})$.而$(12+5\mathrm{i})^2=119+120\mathrm{i}$，$(119+120\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$其实部、虚部皆为正数，故选(A).

直接计算的办法可以验证解 1 的正确性.

用二项式定理展开$(5+\mathrm{i})^5$也可.一题多解可熟悉基本运算.

1-24 设z_1、z_2是方程$z^2+\alpha z+\beta=0$的两个根，则(　).

(A) $\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)=0$　　(B) $\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)=0$

(C) $\arg z_1+\arg z_2=\arg\beta$　　(D) $\arg(z_1+z_2)=-\arg\alpha$

解 由$z_1+z_2=-\alpha$，知应选(D).

本题用到韦达定理.

1-25 $\sqrt{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}=(\quad)$.

(A) $\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}}{6}\pi}$　　(B) $-\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}}{6}\pi}$

(C) $\pm\sqrt{2}e^{\frac{\mathrm{i}}{6}\pi}$　　(D) $\sqrt{2}e^{\pm\frac{\mathrm{i}}{6}\pi}$

解 $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$，由此得

注意：复数没有算术根的概念.本题是求$x^2=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$的根.

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{2})\mathrm{i}}(k=0,1)$$

故当 $k=0$ 时,原式 $=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$,$k=1$ 时,

$$原式=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+\pi\mathrm{i}}=-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

选(C).

1-26 复平面上三点 z_1,z_2,z_3 在一直线上的充要条件是( ).

(A) $z_1-z_3=\alpha(z_2-z_3)$ (α 是实数)

(B) $z_1-z_3=\mathrm{i}\alpha(z_2-z_3)$ (α 是实数)

(C) $\arg\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=0$

(D) $\alpha(z_1-z_3)=\beta(z_2-z_3)$ (α、β 是实数)

解 选项(A)当 z_2 与 z_3 重合而不与 z_1 重合时不成立.(B)表示 z_1-z_3 与 z_2-z_3 两向量垂直,(C)仅当 z_1,z_2 在 z_3 同一侧是对的.(D)是两向量 z_1-z_3 和 z_2-z_3 共线的充要条件(包括其中有零向量的情况). 选(D).

本题中(A)、(C)、(D)是 z_1,z_2,z_3 三点共线的充分而非必要条件.

当 $\alpha\neq0$ 时,(B)表示 $z_1-z_3\perp z_2-z_3$.(D)才是充要条件.

1-27 $\mathrm{Im}(z^2+z)>1$ 表示( ).

(A) 开集、非区域　　(B) 单连通区域

(C) 多连通区域　　(D) 闭区域

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $z^2+z=x^2-y^2+x+\mathrm{i}(2xy+y)$. 故 $\mathrm{Im}(z^2+z)>1$,即 $2xy+y>1$,表示如图1.1的双曲线外的两侧,不含边界,故它是开集但不连通,故不是区域. 选(A).

点集不连通,故不成区域.

复变函数中区域是指单连通开集.

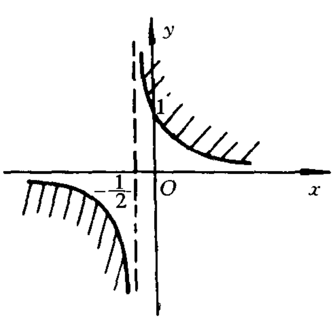


图1.1

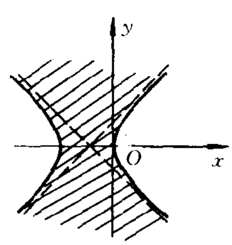


图1.2

1-28 $\mathrm{Re}(z^2+z)<0$ 表示( ).

(A) 开集、非区域　　(B) 单连通区域

(C) 多连通区域　　(D) 闭区域

解 如上题,这是图1.2所示双曲线 $x^2-y^2+x=0$ 的内部,故是单连通的区域. 选(B).

这是双曲线两支之间的集合.

1-29 $\operatorname{Im}(\frac{2z+1}{z-1})<1$,表示(　).

(A) 开集、非区域　　(B) 单连通区域

(C) 多连通区域　　(D) 闭区域

解　记 $z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\frac{2z+1}{z-1}=\frac{[(2x+1)+2\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}{(x-1)^2+y^2}$$

故

$$\operatorname{Im}(\frac{2z+1}{z-1})=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}<1$$

即 $(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2>\left(\frac{3}{2}\right)^2$,表示圆外部分,是多连通区域.

选(C).

圆的外部区域是多连通域.

1-30 $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|\leqslant 2$ 表示(　).

(A) 闭区域　　(B) 闭集、非闭区域

(C) 区域　　(D) 开集、非区域

解　由于点 z 到 i 点与点 z 到 $-\mathrm{i}$ 点距离之和,小于或等于 i 和 $-\mathrm{i}$ 两点的距离(距离为 2),故它表示以此二点为端点的线段,是闭集而不构成区域.

选(B).

若 $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|<a,a>2$,则 z 的集合是椭圆内部,为单连通区域.

1-31 $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4},2<\operatorname{Re}(z)\leqslant 3$ 表示(　).

(A) 开集、非区域

(B) 开区域

(C) 闭区域

(D) 半开、半域区域

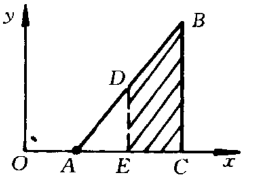


图 1.3

解　如图 1.3,梯形 $BCED$ 是给定的区域,其中 BC 属于此集合而其余三边均不属于此集合,因此这是半开、半闭的区域.　选(D).

1-32 $0<|z+1+2\mathrm{i}|<2$ 表示(　).

(A) 开集、非区域　　(B) 单连通区域

(C) 多连通区域　　(D) 闭区域

解　由不等式表示的是不含圆心 $-1-2\mathrm{i}$ 这点的开圆,因此是多连通区域.

选(C).

$|z+1+2\mathrm{i}|=2$ 表示以 $-1-2\mathrm{i}$ 为圆心,半径为 2 的圆.

1-33 $\left|\frac{z-1}{z+2}\right|<2$ 表示(　).

(A) 开集、非区域　　(B) 闭区域

(C) 单连通区域　　(D) 多连通区域

通过这些题练习复数的几何意义.

解　所给不等式等价于不等式.

$$(x-1)^2+y^2<4[(x+2)^2+y^2],(\text{其中 } z=x+\mathrm{i}y)$$

即　$(x+3)^2+y^2>\frac{10}{3}$,是圆外部区域,因此是多连通区域. 选(D).

1-34　$0<\arg z^2<\frac{\pi}{4}$ 表示(　).

(A) 单连通区域　(B) 多连通区域

(C) 开集、非区域　(D) 闭区域

解　设 $z^2=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,则 $\arg z=\frac{\pi}{8}$ 或 $\pi+\frac{\pi}{8}$,故 $0<\arg z^2<\frac{\pi}{4}$ 等价于:$0<\arg z<\frac{\pi}{8}$ 或 $\pi<\arg z<\pi+\frac{\pi}{8}$,是两个角域(如图 1.4)是不连通的开集.　选(C).

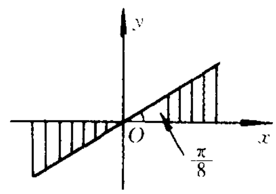


图 1.4

1-35　$\mathrm{Re}(z^2)<a$(a 是不为 0 的实数)表示(　).

(A) 开集、非区域　(B) 单连通区域

(C) 多连通区域　(D) 是否区域与 a 取值有关

注意 $a>0$ 与 $a<0$ 两双曲线的差异.

请读者自行总结有关区域等概念.

解　令 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\mathrm{Re}(z)=x^2-y^2$,当 $a>0$,表示以 x 轴为实轴的双曲线内部,是单连通区域,当 $a<0$,则有 $y^2-x^2>-a$,表示的 y 轴为实轴的双曲线的外部,这时为开集但不连通,故选(D). 图 1.5 中平行于 y 轴线条的阴影部分表示$a>0$时的区域;平行于 x 轴线条的阴影部分表示 $a<0$ 时的开集,但不是区域.

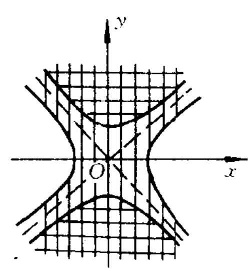


图 1.5

1-36　若 $f(\frac{1}{z-\mathrm{i}})=z$,则 $f(1+\mathrm{i})=$(　).

(A) 1　(B) $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$　(C) $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$　(D) $1-\mathrm{i}$

解　令$\frac{1}{z-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$,则 $z=\mathrm{i}+\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$.　选(B).

注意复变函数与实函数一样,对应关系和定义域是两要素.

1-37　若 $f(\frac{1}{z+\mathrm{i}})=\mathrm{Arg}z$,则 $f(1)=$(　).

(A) $\frac{3\pi}{2}$　(B) $-\frac{\pi}{2}$　(C) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$　(D) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$(k 为整数)

解　令$\frac{1}{z+\mathrm{i}}=1$,则 $z=-\mathrm{i}$,$\mathrm{Arg}z=2k\pi-\frac{\pi}{2}$.　选(D).

令$\frac{1}{z+\mathrm{i}}=1$,可得 $f(1)$.

1-38　若 $f(z^2+1)=|z|$,则 $f(0)=$(　).

令 $z=\mathrm{i}$ 可得

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) 0

解　令 $z^2+1=0, z=\pm i, |z|=1$.　选(A).

$f(0)=|i|=1$.

1-39　若 $f(\frac{1}{z+i})=\bar{z}$,则　$\lim\limits_{z\to i}f(z)=(\quad)$.

(A) i　(B) 2i　(C) -i　(D) -2i

解1　令 $\frac{1}{z+i}=w$,则 $\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}+i$.

即　$f(z)=\frac{1}{\bar{z}}+i$,故 $\lim\limits_{z\to i}f(z)=\frac{-1}{i}+i=2i$.　选(B).

解2　由复合函数的连续性知 $\lim\limits_{z\to i}f(z)=f(i)$

令　$\frac{1}{z+i}=i$ 得 $z=-2i, \bar{z}=2i$.　选(B).

求复函数的极限应注意:从复数域看,它与实函数极限的定义是一样的.

1-40　$\lim\limits_{z\to(1+i)}\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=(\quad)$.

(A) $\frac{3-i}{4}$　(B) $\frac{3+i}{4}$　(C) $\frac{1-3i}{4}$　(D) $\frac{1+3i}{4}$

解　由 $2i=(1+i)^2$ 得

$$\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=\frac{(z+1)(z-1-i)}{(z+1+i)(z-1-i)}$$

故　$$\lim_{z\to(1+i)}\frac{z^2-iz-1-i}{z^2-2i}=\lim_{z\to(1+i)}\frac{z+1}{z+1+i}=\frac{3-i}{4}.$$　选(A).

本题也可用洛必达法则求极限.

1-41　设 $f(z)=\begin{cases}\frac{\mathrm{Im}^2(z)}{z^2}, & z\neq 0\\ \alpha, & z=0\end{cases}$,则(　).

(A) $\alpha=0$ 时,$f(z)$ 连续.

(B) $\alpha=\frac{1}{(1+i)^2}$ 时,$f(z)$ 连续.

(C) $\alpha=1$ 时,$f(z)$ 连续.

(D) 不论 α 为何值,$f(z)$ 在 $z=0$ 处均不连续.

解　记 $z=x+iy$,则 $z^2=x^2-y^2+2ixy$. $\mathrm{Im}^2(z)=y^2$,故当 $z\neq 0$ 时,

$$f(z)=\frac{y^2(x^2-y^2)-2xy^3i}{(x^2+y^2)^2}$$

考虑 $u(x,y)=\frac{y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$,令 $y=kx$,得

$$u(x,kx)=\frac{k^2(1-k^2)}{(1+k^2)^2},\quad x\to 0 \text{ 时极限不同}$$

故 $z\to 0$ 时,$u(x,y)$ 极限不存在.因此,不论 α 取何值,$f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.

选(D).

复函数的极限从实数域的角度看,它与多元函数极限一样,比实函数的一元函数极限更复杂.视复数 z 为复数域中的向量,形成一维线性空间;将复数视为实数域上的向量,便组成二维线性空间.