

全 国 名 牌 大 学 附 中

优秀生 考前训练要诀



数学

张士民 孙旭东
张跃红 耿昌余 编著

本书助你得高分

○ 考试要点难点全搜索

○ 训练秘诀高招全揭示

○ 基础题拓展题全无敌



北京大学附中
东北师大附中
辽宁师大附中
中国科大附中
北京师大附中
福建师大附中
复旦大学附中
华东师大二附中

湖北大学附中
南京师大附中
山西大学附中
湖南师大附中
江西师大附中
交通大学附中
山西师大实验中学

东方出版中心

12.00

全国名牌大学附中优秀生 考前训练要诀

· 高考数学 ·

张士民 孙旭东 编著
张跃红 耿昌余

东方出版中心

内 容 提 要

全国名牌大学附中优秀生考前训练要诀丛书是由全国名校资深教师编写的应考训练读物,介绍名校考前训练的独到的、行之有效的要诀、方法、程序、习题等,让学生通过自我训练,以良好的应试能力,应对升学或毕业考试。本高考数学是其中之一,分上、下两编:上编为“技能训练”,下编为“创新训练”,共62个“训练要点”。每一个“训练要点”均依据最新的课程标准、考纲、教材编写,由“训练要诀”、“训练示范”、“训练题目”三部分组成。书末附有全部“训练题目”的参考答案与解题提示。本书体现了名校名师的教学经验和卓有成效的训练、复习方法,特别适宜于全国应届高中毕业生升学应考之用,也可供有关教师和家长参考。

全国名牌大学附中优秀生
考前训练要诀编委会
(以姓氏笔画为序)

马洪邦	叶佩玉	刘	芸	孙福生	
张	林	吴华宝	时	云	时利民
林新民	周望城	晋	军	徐传胜	
徐昭武	郭杰森	曹	军		

目 录

上编 技能训练	1
一、集合	1
二、函数的解析式与定义域	2
三、反函数	4
四、函数的值域	5
五、函数的奇偶性与周期性	7
六、函数的单调性	9
七、函数的图象及其变换	11
八、二次函数	13
九、指数函数、对数函数	16
十、等差、等比数列基本量的计算	18
十一、等差、等比数列的应用	21
十二、数列的通项与求和	23
十三、数列的极限	25
十四、任意角的三角函数	27
十五、求值	28
十六、三角函数的图象与单调性	30
十七、三角函数的值域、最值与周期	32
十八、解斜三角形	34
十九、不等式的证明——比较法、综合法、分析法等	36
二十、有理、无理不等式的解法	39
二十一、指数、对数、绝对值不等式的解法	40
二十二、不等式的应用	42
二十三、直线方程的基本形式与基本量	45
二十四、直线间的位置关系	46
二十五、简单的线性规划	48
二十六、圆的方程	50
二十七、直线与圆的位置关系	52
二十八、椭圆	54
二十九、双曲线	56
三十、抛物线	57
三十一、坐标平移	59
三十二、直线与圆锥曲线的位置关系	61

三十三、曲线方程与点的轨迹	63
三十四、空间两直线的位置关系	65
三十五、线面、面面的平行与垂直	68
三十六、空间的角与距离的计算	70
三十七、简单几何体	72
三十八、排列组合应用题	73
三十九、二项式定理	76
四十、概率与统计	78
四十一、复数的概念与性质	81
四十二、复数的运算	82
四十三、复数运算的几何意义	84
四十四、模与辐角	86
四十五、复数的应用	88
下编 创新训练	91
四十六、函数综合	91
四十七、数列综合	93
四十八、三角综合	96
四十九、不等式综合	98
五十、圆锥曲线综合	101
五十一、立几综合	103
五十二、选择性问题	106
五十三、归纳性问题	108
五十四、存在性问题	111
五十五、最值与范围问题	113
五十六、应用问题	115
五十七、论证性问题	118
五十八、数形结合	120
五十九、分类讨论	123
六十、转化与化归	125
参考答案与解题提示	128

上编 技能训练

一、集合

[训练要诀]

解有关集合问题时,要注意三点:

1. 弄清集合中元素的实质。如集合 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $C = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ 表示的不是同一个集合。集合 A 中的元素是函数 $y = x^2$ 的函数值,故 $A = [0, +\infty)$; 集合 B 中的元素是函数 $y = x^2$ 的自变量,故 $B = \mathbb{R}$; 集合 C 中的元素是抛物线 $y = x^2$ 上的点,故 C 是一个点集。

2. 运用集合中元素的性质——确定性、互异性和无序性。确定性是指对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的。如 $\{\text{中年人}\}$ 就不是一个集合,其元素无法确定。互异性是指对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的,相同对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素。如 $\{1, 2, 2\}$ 只能算作 $\{1, 2\}$ 。无序性是指对于一个给定的集合,集合中的元素是无序的。如 $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 1\}$ 是同一个集合。

3. 运用数轴或图形,将形数结合起来。

[训练示范]

例 1 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax + b = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y^2 + (a-1)y + b-5 = 0, y \in \mathbb{R}\}$, 若 $A = \{3\}$, 求 B 。

解析与答案 由已知得:集合 A 是由一元二次方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的实数根构成的集合,又 $A = \{3\}$, 故方程 $x^2 - ax + b = 0$ 有两个相等的实数根(集合的互异性),都是 3,由根与系数关系得: $a = 3 + 3 = 6$, $b = 3 \times 3 = 9$ 。而 B 是一元二次方程 $y^2 + (a-1)y + b-5 = 0$ 的实数根构成的集合,即 $y^2 + 5y + 4 = 0$ 的实数根构成的集合,故 $B = \{-1, -4\}$ 。

例 2 设集合 $A = \{x | |x-a| < 2\}$, $B = \left\{x \left| \frac{2x-1}{x+2} < 1 \right.\right\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围。

解析与答案 由 $|x-a| < 2$, 得 $a-2 < x < a+2$ 。由 $\frac{2x-1}{x+2} < 1$, 得 $\frac{x-3}{x+2} < 0$, $-2 < x < 3$ 。

又 $A \subseteq B$, 结合图 1-1 可得 $\begin{cases} a-2 \geq -2, \\ a+2 \leq 3, \end{cases}$

所以 a 的取值范围是 $0 \leq a \leq 1$ 。

说明 $B \subseteq A$ 与 $A \cup B = A$ 与 $A \cap B = B$ 之间是等价的。

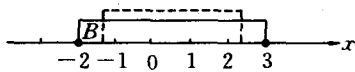


图 1-1

[训练题目]

1. 设全集 $I = \mathbb{Z}$, 集合 $E = \left\{x \left| n = \frac{x}{2}, n \in \mathbb{Z} \right.\right\}$, $F = \left\{x \left| n = \frac{x+1}{2}, n \in \mathbb{Z} \right.\right\}$, 则 I

可表示为 ()

(A) $C_I E \cup F$ (B) $E \cup C_I F$ (C) $E \cup F$ (D) $E \cap F$

2. 设集合 $M = \left\{x \mid \left(\frac{2}{5}\right)^x < 1\right\}$, $N = \{x \mid \log_5 x < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

(A) $\{x \mid x > 0\}$ (B) $\{x \mid 0 < x < 1\}$

(C) $\{x \mid x < 1\}$ (D) $\emptyset$

3. 集合 P 、 Q 满足 $P \cup Q = \{a, b\}$, 试求集合 P 、 Q 。此题的解共有 ()

(A) 9 种 (B) 4 种 (C) 7 种 (D) 16 种

4. 已知全集 $I = \{\text{不大于 } 15 \text{ 的正奇数}\}$, 集合 $M \cap N = \{5, 15\}$, $C_I(M \cup N) = \{3, 13\}$, $M \cap C_I N = \{1, 7\}$, 则 $M =$ _____, $N =$ _____

5. 设 $A = \{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$, $B = \{x \mid ax + 5 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 a 的取值集合为 _____

6. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x \mid 4x + a < 0\}$, 且 $A \cap B = B$, 则实数 a 的取值范围是 _____

7. 设 $A = \{(x, y) \mid x + my + 6 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid (m-2)x + 3y + 2m = 0\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 $m =$ _____

8. 设集合 $A = \{10, y, \lg(xy)\}$, $B = \{2, |x|, y\}$, 若 $A = B$, 求 x, y 。

9. 已知集合 $M = \{a, 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - 3x < 0, x \in \mathbb{Z}\}$, 且 $M \cap N = \{1\}$, 记 $P = M \cup N$, 写出集合 P 的所有子集。

10. 设 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围。

二、函数的解析式与定义域

[训练要诀]

1. 求函数解析式的主要方法有待定系数法和换元法。如果已知函数解析式的结构, 则可用待定系数法求解析式; 如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式且 $g(x)$ 存在反函数时, 可用换元法求 $f(x)$ 的解析式。

2. 求函数定义域一般有三种类型: (1) 给出函数的解析式, 求其定义域, 此时即求使解析式有意义的自变量的取值范围; (2) 不给出函数 $f(x)$ 的解析式, 而是由 $f(x)$ 的定义域去求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域, 此时应运用换元法; (3) 在应用性问题中求函数的定义域, 除考虑函数解析式有意义外, 还应考虑所给问题的实际意义对自变量的要求。

[训练示范]

例 1 (1) 设 $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2}$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f(1) = 1$, $f[f(2)] = 2f^{-1}(4)$, 求 $f(x)$ 的解析式。

解析与答案 (1) 令 $u = \frac{x+1}{x}$ ($u \neq 1$), $\therefore x = \frac{1}{u-1}$ ($x \neq 0$)。代入原式得 $f(u) = u^2 - 2u + 2$, $\therefore f(x) = x^2 - 2x + 2$ ($x \neq 1$) (换元法)。

(2) 设 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), 由 $f(1) = 1$ 得 $a + b = 1$ ①, 又 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$, 由 $f[f(2)] = 2f^{-1}(4)$, 得 $2a^2 + ab + b = \frac{2}{a}(4 - b)$ ②. 由①、②得 $a^3 - a - 6 = 0$, 即 $(a - 2)(a^2 + 2a + 3) = 0$, $\therefore a = 2, b = -1, \therefore f(x) = 2x - 1$.

说明 在用换元法求解析式时, 要注意判定引进的“元”的取值范围, 如(1)题中的 u 的取值范围是 $u \neq 1$.

例 2 (1) 求 $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \cos x$ 定义域;

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $F(x) = f(x^2) - f\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 的定义域.

解析与答案 (1) $\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0, \\ \cos x > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$ 借助数轴,

求两个不等式的交集, 得函数的定义域是 $\left[-5, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 5\right]$.

(2) $\begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1, \\ 0 \leq x - \frac{2}{3} \leq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}, \end{cases}$ 得 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1, \therefore F(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

说明 求复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域时, 要根据外函数的要求(即定义域)布列关于内函数的不等式, 解之即可.

[训练题目]

1. 若函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 A , $y = f[f(x)]$ 的定义域为 B , 则 ()

(A) $A \cap B = B$ (B) $A \cup B = B$ (C) $A \subseteq B$ (D) $A = B$

2. 函数 $y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{|x| - x}$ ($a > 0$) 的定义域为 ()

(A) $[-a, a]$ (B) $[-a, 0) \cup (0, a]$
(C) $(0, a]$ (D) $[-a, 0)$

3. 若 $f(x) = 2x + 3$, $g(x+2) = f(x)$, 则 $g(x)$ 的表达式为 ()

(A) $2x + 1$ (B) $2x - 1$ (C) $2x - 3$ (D) $2x + 7$

4. 若 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 则 $f(2x)$ 等于 ()

(A) $2f(x)$ (B) $2[f(x) + g(x)]$
(C) $2g(x)$ (D) $2f(x) \cdot g(x)$

5. (1) 函数 $y = \log_{(2x+1)}(1 - 3x)$ 的定义域是 _____

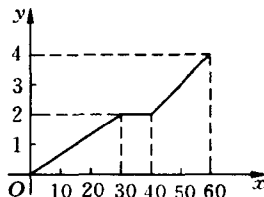
(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $F(x) = f(x) + f(\log_{\frac{1}{2}} x)$ 的定义域为 _____

6. (1) 已知 $f(x+1) = 2x^2 + 1$, 则 $f(x-1) =$ _____ (2) 已知 $f(e^x) = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____

7. 求函数 $y = \frac{\sqrt{x(3-x)}}{\lg(x-3)^2}$ 的定义域。

8. 已知 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x)$ 为 x 的一次函数, 若 $f[h(x)] = g(x)$, 求 $h(x)$ 的解析式。

9. 甲同学到乙同学家的途中有一个公园, 甲到公园的距离与乙到公园的距离都是 2 km, 甲 10 时出发前往乙家, 如图 1-2 表示甲从家出发到乙家为止经过的路程 y (km) 与时间 x (分) 的关系。



(1) 回答甲在公园中休息的时间是多少分钟?

(2) 写出 $y = f(x)$ 的函数表达式。

图 1-2

三、反 函 数

[训练要诀]

1. 会判定一个函数是否有反函数。一个函数有反函数的条件是“若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ”。如 $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$ 就没有反函数; 在定义域上单调的函数必有反函数。对于有反函数的函数, 必有“ $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ”。

2. 会求一个函数的反函数。求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的一般步骤是: (1) 检查 $y = f(x)$ 是否存在反函数 (书写时, 此步骤可以省略); (2) 当存在反函数时, 把 $y = f(x)$ 看成是关于 x 的方程, 解出 $x = f^{-1}(y)$; (3) 把 x, y 互相调换, 改写为 $y = f^{-1}(x)$; (4) 由 $y = f(x)$ 的值域确定反函数的定义域。

3. 掌握互为反函数的两个函数之间的关系。(1) 互为反函数的两个函数定义域、值域互换; (2) 互为反函数的两个函数具有相同的单调性与奇偶性 (一般来说, 偶函数没有反函数); (3) 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称。

[训练示范]

例 1 求函数 $y = x|x| + 2x$ 的反函数。

解析与答案 当 $x \geq 0$ 时, $y = x^2 + 2x$, 即 $(x+1)^2 = y+1$, $\therefore x = -1 + \sqrt{y+1}$ ($y \geq 0$)。当 $x < 0$ 时, $y = -x^2 + 2x$, 即 $(x-1)^2 = 1-y$, $\therefore x = 1 - \sqrt{1-y}$ ($y < 0$)。

$$\therefore x = \begin{cases} -1 + \sqrt{1+y} & (y \geq 0) \\ 1 - \sqrt{1-y} & (y < 0) \end{cases}, \therefore \text{所求反函数为 } y = \begin{cases} -1 + \sqrt{1+x} & (x \geq 0) \\ 1 - \sqrt{1-x} & (x < 0) \end{cases}.$$

说明 分段函数的反函数可以分段求出, 然后合并。

例 2 已知 $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} (x \in \mathbb{R})$, 求 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 的值。

解析与答案 解法一: 由 $y = \frac{2^x}{1+2^x}$ 得 $y(1+2^x) = 2^x$, $2^x(1-y) = y$, 而 $y \neq 1$, 故 $2^x = \frac{y}{1-y}$. $\because 2^x > 0$, $\therefore \frac{y}{1-y} > 0$, $\therefore 0 < y < 1$. $\therefore x = \log_2 \frac{y}{1-y} (0 < y < 1)$, $\therefore y = \frac{2^x}{1+2^x}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的反函数是 $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x} (0 < x < 1)$, $\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ 。

解法二:根据函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间的关系,可知求 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 的值就是求 $f(x) = \frac{1}{3}$ 时的 x 的值. 令 $\frac{2^x}{1+2^x} = \frac{1}{3}$, 则 $3 \cdot 2^x = 1 + 2^x$, $\therefore x = -1$, 即 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -1$.

[训练题目]

- 设函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 若 $f(a) = b$ ($ab \neq 0$), 则 $g(b)$ 等于 ()
 (A) a (B) a^{-1} (C) b (D) b^{-1}
- 函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数是 ()
 (A) 奇函数, $\mathbb{R}^+$ 上减函数 (B) 偶函数, $\mathbb{R}^+$ 上减函数
 (C) 奇函数, $\mathbb{R}^+$ 上增函数 (D) 偶函数, $\mathbb{R}^+$ 上增函数
- 下列各对函数中,互为反函数的是 ()
 (A) $y = x^4 (x \in \mathbb{R})$, $y = x^{\frac{1}{4}} (x \in \overline{\mathbb{R}^+})$
 (B) $y = \sqrt{x} + 1 (x \in \overline{\mathbb{R}^+})$, $y = (x-1)^2 (x \in \mathbb{R})$
 (C) $y = -x^2 + 2 (x \geq 1)$, $y = \sqrt{-x-2} (x \leq -2)$
 (D) $y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$, $y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$
- (1) 函数 $f(x) = -\sqrt{x^2-1} (x \geq 1)$ 的反函数是_____ (2) 函数 $f(x) = \frac{1}{2}(10^x - 10^{1-x})$ 的反函数是_____ (3) 函数 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的反函数的定义域是_____
- 若 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} (x \geq 0)$, 则 $f^{-1}(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 已知 a 为实数,若函数 $y = \frac{x-2}{x+a} (x \in \mathbb{R}, \text{且 } x \neq -a)$ 的图象关于直线 $y = x$ 成轴对称,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$
- 已知 $f(x) = a + b^{x-1} (b > 0, b \neq 1)$ 的图象经过点 $(1, 3)$, 函数 $f^{-1}(x+a) (x > 0)$ 的图象经过点 $(4, 2)$, 试求函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式.
- 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2-1}) (x \geq 1)$.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的反函数及其定义域; (2) 若 $f^{-1}(n) < \frac{3^n + 3^{-n}}{2} (n \in \mathbb{N})$, 求 a 的取值范围.

四、函数的值域

[训练要诀]

- 常见函数求值域的一些方法:(1)配方法是求二次函数值域的基本方法;(2)求某些

函数值域可转化为求其反函数的定义域;(3)求某些无理函数的值域常用换元法转化为求有理函数的值域;(4)某些函数的值域可利用基本不等式来求;(5)某些分式有理函数可化为二次方程,用判别式来求值域。另外,函数的图象、函数的单调性、三角函数的有界性等也都可以用于求函数值域。

2. 复合函数求值域时可用换元法,将复合函数分解成若干个常见函数。但在求每个函数的值域时,要注意相关定义域的制约。

[训练示范]

例 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{3^x}{3^x + 1}$; (2) $y = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}$; (3) $y = 2x + 4\sqrt{1-x}$; (4) $y = x + \frac{1}{x} + 1$ ($x \neq 0$)。

解析与答案 (1) 原式可化为 $x = \log_3 \left(\frac{y}{1-y} \right)$, 令 $\frac{y}{1-y} > 0$, 得 $y \in (0, 1)$ 。

(2) $y = -1 + \frac{4}{2 + \sin x}$, 得 $y \in \left[\frac{1}{3}, 3 \right]$ 。

(3) 设 $t = \sqrt{1-x}$, 则 $t \geq 0$, $x = 1 - t^2$ 。 $\therefore y = -2t^2 + 4t + 2 = -2(t-1)^2 + 4 \leq 4$, $\therefore y \in (-\infty, 4]$ 。

(4) 解一: 当 $x > 0$ 时, 有 $y = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时, $y = 3$;
当 $x < 0$ 时, 有 $-y = (-x) + \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \geq 1$, $\therefore y \leq -1$, 当且仅当 $-x = -\frac{1}{x}$, 即 $x = -1$ 时, $y = -1$ 。综合可知: $y = x + \frac{1}{x} + 1$ 的值域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ 。

解二: $\because y = x + \frac{1}{x} + 1$, $\therefore x^2 + (1-y)x + 1 = 0$ 。 $\because$ 方程有实根, $\therefore \Delta = (1-y)^2 - 4 \geq 0$, $\therefore y - 1 \leq -2$ 或 $y - 1 \geq 2$, 得 $y \leq -1$ 或 $y \geq 3$ 。 $\therefore y = x + \frac{1}{x} + 1$ 的值域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ 。

说明 第(1)题是通过求原来函数的反函数的定义域,求函数的值域。也可将原式化为 $3^x = \frac{y}{1-y}$, 直接利用指数函数性质得 $\frac{y}{1-y} > 0$ 。

第(2)题采用了“部分分式法”求解,即将原分式分解成两项,其中一项为常数,另一项容易求出值域。形如 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ ($a \neq 0, ac \neq bd$) 的函数均可使用这种方法。本题也可化为 $\sin x = \frac{2-2y}{1+y}$, 利用正弦函数的值域,令 $\left| \frac{2-2y}{1+y} \right| \leq 1$, 求函数的值域。

第(3)题采用换元法,要特别注意变量的取值范围。

第(4)题利用基本不等式求值域时,必须注意公式的使用条件;利用判别式求值域的关键是构造自变量 x 的二次方程。

[训练题目]

- 下列函数中,与函数 $y = 2x^2 - 4x - 1$ 有相同值域的是 ()
 (A) $y = 3x - 9 (x \leq 2)$ (B) $y = \frac{1}{x+1} (x \leq -\frac{4}{3})$
 (C) $y = -x^2 + 1 (x \geq 2)$ (D) $y = 3x^2 - 6x (x \geq 0)$
- 若 $f(x) = \log_2 x + 3 (x \geq 1)$, 则 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 ()
 (A) $\mathbb{R}$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $(0, 1)$ (D) $[3, +\infty)$
- 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域和值域都为 $\mathbb{R}$, 则 $f(x) > g(x) (x \in \mathbb{R})$ 成立的充要条件是 ()
 (A) 有一个 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) > g(x)$
 (B) 有无穷多个 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) > g(x)$
 (C) 对 $\mathbb{R}$ 中任意的 x , 都有 $f(x) > g(x) + 1$
 (D) $\mathbb{R}$ 中不存在 x , 使得 $f(x) \leq g(x)$
- (1) 函数 $y = \frac{5x+3}{2x-3}$ 的值域是_____ (2) 函数 $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域是_____
 (3) 函数 $y = \sqrt{4-2^{x^2-4x+5}}$ 的定义域为_____, 值域为_____
- 求下列函数的值域:
 (1) $y = \frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$; (2) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$;
 (3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; (4) $y = \log_{\frac{1}{3}}(12x - 27 - x^2)$ 。
- 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+b}{2x-b} (b \in \mathbb{R})$ 。
 (1) 求 $f(x)$ 的定义域; (2) 当 $b < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的值域。
- 设 a 为实数, 对一切实数 x , $y = x^2 - 4ax + 2a + 6$ 的值均为非负数, 求函数 $f(a) = 2 - a |a + 3|$ 的值域。
- 如图 1-3, $\triangle AOB$ 是边长为 2 的正三角形, 直线 $x = t$ 截这个三角形所得的位于此直线左方的图形的面积为 y 。求函数 $y = f(t)$ 的解析式, 并求出它的定义域和值域。

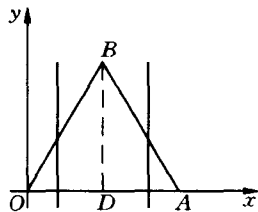


图 1-3

五、函数的奇偶性与周期性

[训练要诀]

函数的奇偶性与周期性可从数与形两个角度进行判断:

1. 利用定义。如果对定义域内的任意 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数; 如果对定义域内的任意 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数; 如果存在常数 $T (T \neq 0)$, 对定义域内的任意 x , 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 以 T 为周期。

2. 利用函数图象的特征。奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称, 反之也真。

[训练示范]

例 1 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \frac{(1+2^x)^2}{2^x};$$

$$(2) f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) f(x) = \lg x^2 + \lg \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0);$$

$$(4) y = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

解析与答案 (1) $f(-x) = \frac{(1+2^{-x})^2}{2^{-x}} = 2^{-x} \left(\frac{1+2^{-x}}{2^{-x}} \right)^2 = 2^{-x} (1+2^x)^2 = \frac{(1+2^x)^2}{2^x} = f(x)$, $\therefore f(x)$ 为偶函数。

$$(2) f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -f(x), \therefore f(x) \text{ 为奇函数}.$$

(3) $\because f(x) = \lg x^2 + \lg \frac{1}{x^2} = 0$, $\therefore f(-x) = f(x)$ 且 $f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 既是奇函数又是偶函数。

(4) 令 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, 解得 $-1 \leq x < 1$, 定义域关于原点对称, 故这个函数既不是奇函数也不是偶函数。

说明 函数是奇或偶函数的必要条件是其定义域关于原点对称; 既是奇函数又是偶函数的函数, 其解析式必为 $f(x) = 0$; $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(0)$ 有定义, 必有 $f(0) = 0$ 。

例 2 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$. 求 $x \in [5, 6]$ 时, $f(x)$ 的解析表达式。

解析与答案 当 $x \in [5, 6]$ 时, $6-x \in [0, 1]$, 故 $f(6-x) = 6-x$ 。

又 $f(x+2) = f(x)$, $\therefore f(6-x) = f(-x)$ 。又 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x) = 6-x$ 。

说明 解答本题也可以先作 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图象, 再据 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且周期为 2, 可作出 $y = f(x)$ 在 $[5, 6]$ 上的图象, 然后根据图象求出解析式。

[训练题目]

- 已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2) =$ ()
(A) -26 (B) -18 (C) -10 (D) 10
- 函数 $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是 ()
(A) 奇非偶函数 (B) 偶非奇函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 既是奇函数又是偶函数
- 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 是偶函数, 在 $x < 0$ 时, $f(x)$ 为增函数, 若 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ 且 $|x_1| < |x_2|$, 则 ()
(A) $f(-x_1) > f(-x_2)$ (B) $f(-x_1) < f(-x_2)$
(C) $-f(x_1) > f(-x_2)$ (D) $-f(x_1) < f(-x_2)$
- 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2) = f(x+2)$, $f(2+x) = f(2-x)$, 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则 $f(x)$ ()
(A) 是奇函数非偶函数, 不是周期函数
(B) 是偶函数非奇函数, 是周期函数

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数,不是周期函数

(D) 不是偶函数也不是奇函数,是周期函数

5. 已知奇函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(x-1)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则 $f(-\log_2 6) =$ ()

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{5}{6}$ (D) $-\frac{23}{24}$

6. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 则在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)$ 的解析式是 ()

(A) $x(x-2)$ (B) $x(|x|-2)$ (C) $|x|(x-2)$ (D) $|x|(|x|-2)$

7. 判断下列函数是否具有奇偶性, 并将判断结果填在题后的横线上:

(1) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & (x \geq 0) \\ x^2-1, & (x < 0) \end{cases}$ _____ (2) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+2|-2}$ _____

(3) 函数 $f(x)$ 的定义为 $\mathbb{R}$, $f(x)$ 不恒等于零, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ _____

8. 若函数 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2+2}+ax) - \lg b$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 则实数 a, b 的值为 $a =$ _____, $b =$ _____

9. 已知 $f(x) = x\left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)$. (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性; (2) 证明 $f(x) > 0$.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 其图象关于直线 $x = 1$ 对称, 对任意 $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 都有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 且 $f(1) = a > 0$.

(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)$; (2) 证明 $f(x)$ 为周期函数.

六、函数的单调性

[训练要诀]

判断函数在某一区间上的单调性、求函数的单调区间的方法有:(1)运用定义;(2)利用函数图象。先作出函数图象,根据图象划分函数的单调区间,判断函数在某一区间上的单调性;(3)利用复合函数的性质。复合函数 $y = f[g(x)]$ 在公共定义域上的单调性的确定方法:若外函数 f 与内函数 g 的单调性相同,则复合函数为增函数;若外函数 f 与内函数 g 的单调性相反,则复合函数为减函数。函数在区间的端点处有意义时,单调区间应写为闭区间或半开半闭区间。

用定义证明函数单调性的一般步骤是:(1)设 x_1, x_2 是给定区间上的任意两个值,并且规定它们的大小 $x_1 < x_2$; (2)作差 $f(x_1) - f(x_2)$ (或作商 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$), 作差是与“0”比较(作商是与“1”比较), 并将此式变形, 而变形主要有两个方向:或变为积商, 或变为非负数的和; (3)判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负, 由此得出函数的增减性。奇函数在对称区间上的单调性相同, 偶函数在对称区间上的单调性相反。

[训练示范]

例1 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上是增函数, 试求 a 的取值范围。

解析与答案 设 $-2 < x_1 < x_2 < +\infty$, 那么 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1+1}{x_1+2} - \frac{ax_2+1}{x_2+2} = \frac{(x_2-x_1)(1-2a)}{(x_1+2)(x_2+2)} < 0$. $\because x_2 - x_1 > 0, x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0, \therefore 1 - 2a < 0, \therefore a > \frac{1}{2}$.

例 2 已知 $f(\log_a x) = \frac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 试判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并给予证明。

解析与答案 设 $\log_a x = t$, 则 $x = a^t$ ($t \in \mathbb{R}$), $\therefore f(t) = \frac{a}{a^2-1}(a^t - a^{-t})$, $\therefore f(x) = \frac{a}{a^2-1}(a^x - a^{-x})$ ($x \in \mathbb{R}$). 设 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 那么 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{a}{a^2-1} \cdot [(a^{x_1} - a^{-x_1}) - (a^{x_2} - a^{-x_2})] = \frac{a(a^{x_1} - a^{x_2})}{a^2-1} \left(1 + \frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}\right)$, 其中 $a^{x_1}a^{x_2} > 0$.

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $\because a^2 - 1 < 0, a^{x_1} - a^{x_2} > 0, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数;

(2) 当 $a > 1$ 时, $\because a^2 - 1 > 0, a^{x_1} - a^{x_2} < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2)$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。综合(1)和(2)可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。

[训练题目]

- 在下列命题中, 真命题是 ()
 (A) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 且在定义域内为减函数
 (B) 函数 $y = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数, 且在 $[0, +\infty)$ 内是增函数
 (C) 函数 $y = 3x$ ($-1 \leq x < 1$) 是奇函数, 且在定义域内是增函数
 (D) 函数 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 是偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 内是增函数
- 设 $f(x)$ 是减函数, $f(x) > 0$, 下列函数中是增函数的是 ()
 (A) $y = \sqrt{f(x)}$ (B) $y = 0.2^{f(x)}$ (C) $y = \log_2 f(x)$ (D) $y = [f(x)]^2$
- 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值是 5, 则 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上是 ()
 (A) 增函数, 最小值 -5 (B) 增函数, 最大值 -5
 (C) 减函数, 最小值 -5 (D) 减函数, 最大值 -5
- 已知函数 $y = x - \frac{p}{x} + \frac{p}{2}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 p 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, -1]$ (B) $[-1, +\infty)$ (C) $(-\infty, 1]$ (D) $[1, +\infty)$
- 函数 $f(x) = \log_a |x-1|$ 在区间 $(0, 1)$ 上递减, 那么 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上 ()
 (A) 递减, 无最小值 (B) 递减, 有最小值
 (C) 递增, 无最大值 (D) 递增, 有最大值
- 已知 $f(x) = 8 + 2x - x^2$, 如果 $g(x) = f(2 - x^2)$, 那么 $g(x)$ ()
 (A) 在 $(-1, 0)$ 上是减函数 (B) 在 $(0, 1)$ 上是减函数
 (C) 在 $(-2, 0)$ 上是增函数 (D) 在 $(0, 2)$ 上是增函数
- 函数 $y = ax^2 - (3a-1)x + a^2$ 在 $[1, +\infty)$ 递增, 则 a 的取值范围是 _____

8. 已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 那么 $f(2x - x^2)$ 的单调减区间是_____

9. 定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $y = f(x)$ 是减函数, 且是奇函数, 若 $f(a^2 - a - 1) + f(4a - 5) > 0$, 求实数 a 的取值范围。

10. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x+2} + \lg \frac{1-x}{1+x}$ 。

(1) 试判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并给出证明;

(2) 若 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 证明方程 $f^{-1}(x) = 0$ 有唯一解。

七、函数的图象及其变换

[训练要诀]

1. 会画。画函数图象的两种基本方法是描点法和图象变换法。

2. 会变。掌握图象的三种基本变换: 平移变换、对称变换、伸缩变换。(1) 平移变换: 是指函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(x \pm a)$ ($a > 0$)、 $y = f(x) \pm b$ ($b > 0$) 的图象间的关系;(2) 对称变换: 是指 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 、 $y = -f(x)$ 、 $y = -f(-x)$ 、 $y = f^{-1}(x)$ 、 $y = |f(x)|$ 和 $y = f(|x|)$ 的图象间的关系;(3) 伸缩变换: 是指函数 $y = f(x)$ 与 $y = af(x)$ ($a > 0$)、 $y = f(ax)$ ($a > 0$) 的图象间的关系。

3. 会用。记住基本初等函数的图象特征, 能利用函数图象研究函数的性质。如利用函数图象研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性以及一些特殊函数值等; 函数图象从“形”的方面刻画函数的变化规律, 表示量与量之间的依存关系。要能运用数形结合的思想方法解决有关问题。

[训练示范]

例 1 画出下列函数的示意图:

(1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$; (2) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$; (3) $y = \log_2|x|$; (4) $y = |x^2 - 1|$ 。

解析与答案 (1) 作 $y = \log_{\frac{1}{2}}x$ 关于 y 轴的对称图形, 如图 1-4(1); (2) 作 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 关于 x 轴的对称图形, 如图 1-4(2); (3) $y = \log_2x$ 的图形和它关于 y 轴的对称图形, 如图 1-4(3); (4) 将 $y = x^2 - 1$ 的图形在 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方, 如图 1-4(4)。

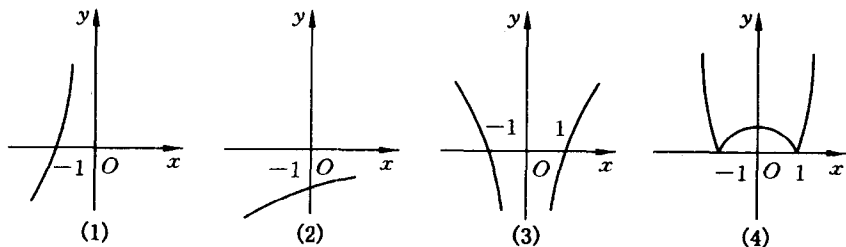


图 1-4