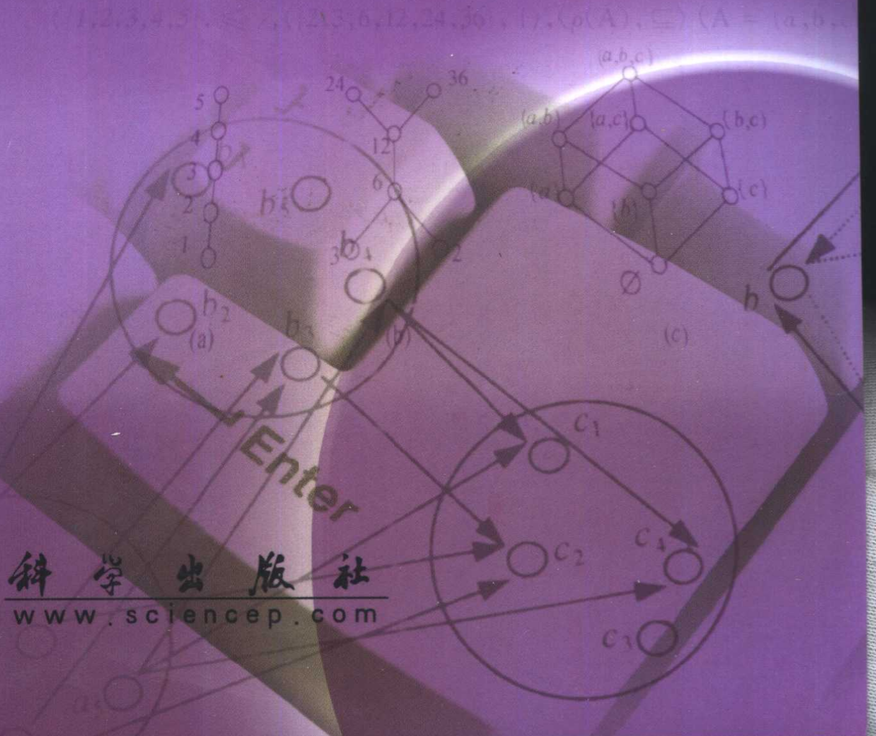
LISANSHUXUE

离散数学
解题指导

JIETIZHIDAO

王元元　张桂芸　等编著



科学出版社
www.sciencep.com

离散数学解题指导

王元元　张桂芸
宋丽华　仪新莹　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与科学出版社2002版《离散数学导论》教材相配套的辅助教材。内容按照教材对应章节的先后次序安排，每章节包括了内容概述和习题解答两部分，前者集中了离散数学最基本的概念和定理，后者是教材中习题的详细参考解答。本书的目的是为读者开拓解题思路，提供解题方法和技巧，加深读者对离散数学应用及其与计算机科学的联系的认识，从而逐步增强分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等院校计算机专业及相关专业本科生、专科生离散数学课程的教学参考书，也可作为计算机软硬件研究开发者和应用人员的学习用书，以及大学毕业生考研复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学解题指导/王元元等编著.—北京：科学出版社，2003
ISBN 7-03-010922-8

Ⅰ.离…　Ⅱ.王…　Ⅲ.离散数学-高等学校-解题　Ⅳ.O158-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第083503号

责任编辑：赵卫江/责任校对：曹锐军
责任印制：吕春珉/封面设计：萧　梅

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社总发行　各地新华书店经销

*

2003年1月第一版　开本：787×1092　1/16
2003年1月第一次印刷　印张：17 1/2
印数：1—4 000　字数：406 000

定价：27.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

几乎每个学生都知道，做题对于学习数学是非常重要的，课后做练习能使你最大地受益。然而，许多人在学习和复习离散数学的时候，包括有些从事该课程教学的教师，都感觉到离散数学的习题没有明显的规律性，往往缺乏一般的解法，不像高等数学、线性代数、概率论等其他数学习题有章可循，因而常常觉得无从下手，有时做完了也很难找到正确答案。这不能不说是离散数学教学的一大特点或一大难点。因此，很多学习离散数学或打算参加该课程各种各样考试的读者急需一本比较全面、系统的习题题解，以此作为学习和复习离散数学的一种"着落"、一个依据、一名"学习助手"和一位"随身老师"，另外刚刚从事离散数学教学的青年教师也可从中获取一些方便和一份自信。尤其对于使用科学出版社 2002 版《离散数学导论》和 1994 版《离散数学》这两本书作为教材的各高等院校，尽快出版与这两本教材配套的题解更是学生和教师们一直盼望的事。为此，我们将多年来积累的题解汇集成册，奉献给大家，以供学习离散数学的学生和教师、参加硕士和博士研究生入学考试的考生以及对此感兴趣的各类读者参考使用。

本书与科学出版社 2002 版《离散数学导论》教材(以下简称教材)完全配套。每章节的内容包括两部分：第一部分是内容概述，将教材中最基本的概念和定理整理集中，以使读者能对必要的内容有个脉络，同时习题中不乏这些概念和理论的应用。因此，这一部分既是主要内容的复习，又是重要事实的备查，因而也可以使读者独立于配套教材而单独使用本书。第二部分为主体内容，是习题的详细参考解答，其编号与教材各章节习题完全相同。

当然，习题往往是正文内容的巩固、深化与拓广，因此，我们建议读者务必首先搞清吃透基本概念，深入理解基本原理，再进入到做练习和阅读题解的阶段。在参考题解的具体解法前，千万要反复分析思考、尽量独立解题，只有在你已经得出一个解或毫无头绪时，才去查看题解。有了解答，可将做过的习题与题解进行对比，检查自己完成的习题是否正确，解法是否合理、是否最好。一筹莫展时，可在题解中找找思路。可能的话，几个同学在一起进行讨论，对书中的解法评头论足，甚至提出异议。总之，切不可直接去看题解，否则会事倍功半，甚至贻误学习、留下隐患。当然，更要不得的是将题解作母版，拷贝一份给老师当作业。必须强调，只有把题解当工具，才能深入理解解题过程，掌握解题思路；才能举一反三，开拓思维，以利学习。我们认为，读者通过这部分的阅读，要能达到三个目的：第一是从中得到每道题的一个解，加强对课程学习的记忆和理解；第二是从中获得解题的思路，体会挖掘其中渗透的离散数学的思想、方法，加深对离散数学应用及其与计算机科学联系的认识；第三是从中培养数学建模能力，提高算法设计能力，逐步增强分析问题和解决问题的能力，同时学习在证明中运用演绎法、分析法、归纳法等常用数学方法，以及运用反证法、构造法等现代数学方法。

本书每一节的习题大致分为三个层次，第一层次是基本练习题，第二层次是熟练应用题，第三层次是提高题。数量最大、最应该引起重视的当然是第二层次的练习题。原教材

中标有记号 △ 和 * 的内容是供教师选用的内容。作者的本意是：未标记的内容是多数院校都应该选用的；标有记号 △的内容是可以适当选取的；而标有记号 * 的内容是一般工程类院校可以忽略的内容。对于相应的读者不妨做类似的理解。当然，如果是准备报考硕士、博士研究生的考生，应与报考学校取得联系，以明确该校的要求，做更有针对性的复习。

我们非常感谢很多院校选用上述两本书作为教材，是他们的期盼才使我们有信心出版本书。当然和所有题解一样，本题解只是对习题给出一个建议性的解答，并非典范，由于作者水平所限，在解题过程中难免存在问题。我们希望能得到读者的批评指正，也希望能得到读者对习题的更多更好的解法，我们在新的版本中将加以引用并注明来源。

作　者

2002 年 9 月

目　　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第三篇 图 论

第四篇 抽象代数

第一篇　数理逻辑

第一章　命题演算及其形式系统

1.1　命题与联结词

【内容概述】

1. 命题

我们把对确定的对象作出判断的陈述句称作**命题**(propositions)，当判断正确或符合客观实际时，称该命题**真**(true)，否则称该命题**假**(false)。“真、假”常被称为命题的**真值**。

自然语言中“并非，或者，并且，如果……，那么……，当且仅当”这样的联结词称为**逻辑联结词**(logical connectives)。通常把不含有逻辑联结词的命题称为**原子命题**或**原子**(atoms)，而把由原子命题和逻辑联结词共同组成的命题称为**复合命题**(compositive propositions)。

2. 联结词

否定词(negation)“并非”(not)，用符号$\neg$ 表示。设 p 表示一命题，那么$\neg p$ 表示命题 p 的否定。p 真时$\neg p$ 假，而 p 假时$\neg p$ 真。$\neg p$ 读作“并非 p”或“非 p”。

合取词(conjunction)“并且”(and)，用符号$\wedge$表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p\wedge q$ 表示合取p 和q 所得的命题，即 p 和q 同时为真时$p\wedge q$ 真，否则 $p\wedge q$ 为假。$p\wedge q$ 读作“p 并且q”或“p 且q”。

析取词(disjunction)“或”(or)，用符号$\vee$表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p\vee q$ 表示 p 和q 的析取，即当 p 和q 有一为真时$p\vee q$ 为真，只有当 p 和q 均假时$p\vee q$ 为假。$p\vee q$ 读作“p 或者q”、“p 或q”。

蕴涵词(implication)“如果……，那么……”(if... then...)，用符号$\rightarrow$表示。设 p,q 表示两命题，那么 $p\rightarrow q$ 表示命题“如果 p，那么 q”。当 p 真而q 假时，命题 $p\rightarrow q$ 为假，否则均认为 $p\rightarrow q$ 为真。$p\rightarrow q$ 中的p 称为**蕴涵前件**，q 称为**蕴涵后件**。$p\rightarrow q$ 的读法较多，可读作“如果 p 则q”，“p 蕴涵q”，“p 是q 的充分条件”，“q 是p 的必要条件”，“q 当 p”，“p 仅当q”等等。数学中还常把 $q\rightarrow p$，$\neg p\rightarrow\neg q$，$\neg q\rightarrow\neg p$ 分别叫做$p\rightarrow q$ 的**逆命题、否命题、逆否命题**。

双向蕴涵词(two-way implication)“当且仅当”(if and only if)，用符号$\leftrightarrow$表示之。设 p,q 为两命题，那么 $p\leftrightarrow q$ 表示命题“p 当且仅当q”，“p 与q 等价”，即当 p 与q 同真值时 $p\leftrightarrow q$ 为真，否则为假。$p\leftrightarrow q$ 读作“p 双向蕴涵q”，“p 当且仅当q”，“p 等价于q”。由于“当且仅当”和“等价”常在其它地方使用，因而用第一种读法更好些。

3. 命题公式及其真值表

我们把表示具体命题及表示常命题的 p, q, r, s 与 f, t 统称为**命题常元**(proposition constants)。深入的讨论还需要引入**命题变元**(proposition variables)的概念，它们是以“真、假”或“1, 0”为取值范围的变元，为简单计，命题变元仍用 p, q, r, s 等表示。

定义 1.1 以下三条款规定了**命题公式**(proposition formula)的意义：

(1)命题常元和命题变元是命题公式，也称为原子公式或原子。

(2)如果 A, B 是命题公式，那么$(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$也是命题公式。

(3)只有有限步引用条款(1)，(2)所组成的符号串是命题公式。

如果公式 A 含有命题变元$p_1, p_2, \cdots, p_n$，记为 $A(p_1, \cdots, p_n)$，并把联结词看作真值运算符，那么公式 A 可以看作是$p_1, \cdots, p_n$ 的真值函数。对任意给定的 $p_1, \cdots, p_n$ 的一种取值状况，称为**指派**(assignments)，用希腊字母 α, β 等表示，A 均有一个确定的真值。当 A 对取值状况 α 为真时，称指派 **$\boldsymbol{\alpha}$ 弄真 $\boldsymbol{A}$**，或 α 是 A 的成真赋值，记为 $\alpha(A) = 1$；反之称指派 **$\boldsymbol{\alpha}$ 弄假 $\boldsymbol{A}$**，或 α 是 A 的成假赋值，记为 $\alpha(A) = 0$。对一切可能的指派，公式 A 的取值可用一张表来描述，这个表称为**真值表**(truth table)。当 $A(p_1, \cdots, p_n)$中有 k 个联结词时，公式 A 的真值表应为 2^n 行、$k + n$ 列(不计表头)。

4. 语句的形式化

用我们已有的符号语言，可以将许多自然语言语句形式化。

语句形式化要注意以下几个方面：

①要善于确定原子命题，不要把一个概念硬拆成几个概念，例如“弟兄”是一个概念，不要拆成“弟”和“兄”，“我和他是弟兄”是一个原子命题。

②要善于识别自然语言中的联结词(有时它们被省略)。例如“风雨无阻，我去上学”一句，可理解为“不管是否刮风、是否下雨我都去上学”。

③否定词的位置要放准确。

④需要的括号不能省略，而可以省略的括号，在需要提高公式可读性时亦可不省略。

⑤另外要注意的是，语句的形式化未必是惟一的。

【习题解答】

练习 1.1

1. 判断下列语句是否是命题，若是命题则请将其形式化：

(1)$a + b$

(2)$x > 0$

(3)“请进!”

(4)所有的人都是要死的，但有人不怕死。

(5)我明天或后天去苏州。

(6)我明天或后天去苏州的说法是谣传。

(7)我明天或后天去北京或天津。

(8)如果买不到飞机票,我哪儿也不去。

(9)只要他出门,他必买书,不管他余款多不多。

(10)除非你陪伴我或代我雇辆车子,否则我不去。

(11)只要充分考虑一切论证,就可得到可靠见解;必须充分考虑一切论证,才能得到可靠见解。

(12)如果只有懂得希腊文才能了解柏拉图,那么我不了解柏拉图。

(13)不管你和他去不去,我去。

(14)侈而惰者贫,而力而俭者富。(韩非:《韩非子·显学》)

(15)骐骥一跃,不能十步;驽马十驾,功在不舍;锲而舍之,朽木不折;锲而不舍,金石可镂。(荀况:《荀子·劝学》)

解 (1)不是命题。

(2)不是命题(x 是变元)。

(3)不是命题。

(4)是命题。可表示为 $p \wedge \neg q$,其中,p:所有的人都是要死的,q:所有的人都怕死。

(5)是命题。可表示为 $p \vee q$,其中,p:我明天去苏州,q:我后天去苏州。

(6)是命题。可表示为$\neg(p \vee q)$,其中,p、q 同(5)。

(7)是命题。可表示为 $p \vee q \vee r \vee s$,其中,p:我明天去北京,q:我明天去天津,r:我后天去北京,s:我后天去天津

(8)是命题。可表示为$\neg p \rightarrow \neg q$,其中,$p$:我买到飞机票,$q$:我出去。

(9)是命题。可表示为$(p \wedge q \rightarrow r) \wedge (\neg p \wedge q \rightarrow r)$或 $q \rightarrow r$,其中,p:他余款多,q:他出门,r:他买书。

(10)是命题。可表示为$(p \vee q) \leftrightarrow r$,其中,$p$:你陪伴我,$q$:你代我雇车,$r$:我去。

(11)是命题。可表示为$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$或 $p \leftrightarrow q$,其中,p:你充分考虑了一切论证,q:你得到了可靠见解。

(12)是命题。可表示为$(q \rightarrow p) \rightarrow \neg q$,其中,$p$:我懂得希腊文,$q$:我了解柏拉图。

(13)是命题。可表示为$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (\neg p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$或 r,其中,p:你去,q:他去,r:我去。

(14)是命题。可表示为$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$,其中,$p$:你奢侈,$q$:你懒惰,$r$:你贫困。

(15)是命题。可表示为$(p \rightarrow \neg q) \wedge (s \rightarrow r) \wedge (m \wedge n \rightarrow \neg o) \wedge (m \wedge \neg n \rightarrow v)$,其中,$p$:骐骥一跃,$q$:骐骥一跃十步,$r$:驽马行千里,$s$:驽马不断奔跑,$m$:你雕刻,$n$:你放弃,$o$:将朽木折断,$v$:金石可雕刻。

2. 判定下列符号串是否为公式,若是,请给出它的真值表,并请注意这些真值表的特点(公式中省略了可以省略的括号):

(1)$\neg(p)$(p 为原子命题)

(2)$(p \vee qr) \rightarrow s$

(3)$(p \vee q) \rightarrow p$

(4)$p \rightarrow (p \vee q)$

(5)$\neg(p\vee\neg p)$

(6)$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$

(7)$p\wedge(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)$

(8)$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(9)$\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg q\wedge\neg p$

(10)$\neg p\vee q\leftrightarrow(p\rightarrow q)$

(11)$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$

(12)$(p\vee q\rightarrow r)\leftrightarrow(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$

解　(1)不是公式。

(2)不是公式。

(3)是公式。真值表如下：

p	q	$p\vee q$	$(p\vee q)\rightarrow p$	$p\rightarrow(p\vee q)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

(4)是公式(恒真)。真值表同(3)。

(5)是公式(恒假)。真值表如下：

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$	$\neg(p\vee\neg p)$
0	1	1	0
1	0	1	0

(6)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(7)是公式(恒假)。真值表如下：

p	q	$\neg q$	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$p\rightarrow\neg q$	$p\wedge(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0

(8)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(9)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg q\wedge\neg p$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg q\wedge\neg p$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

(10)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$p\to q$	$\neg p\vee q\leftrightarrow(p\to q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(11)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(12)是公式(恒真)。真值表如下：

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$(p \vee q \to r) \leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

*3.A 国的人只有两种,一种永远说真话,一种永远说假话。你来到 A 国,并在一个二叉路口不知如何走才能到达首都。守卫路口的士兵只准你问一个问题,而且他只答"是"或"不是"。你应该如何发问,才能从士兵处获知去首都的道路。

解 设 p:你是说真话的,q:我应当向右走去首都。

你应当问:$p \leftrightarrow q$?

当回答"是 (真)",你选择向右走;当回答"不(假)"时,你选择向左走。

因为$p \leftrightarrow q$ 真,当且仅当 p 真且q 真(士兵说真话且应当向右走)

或 p 假且q 假(士兵说假话且应当向左走);

$p \leftrightarrow q$ 假,当且仅当 p 真且q 假(士兵说真话且应当向左走)

或 p 假且q 真(士兵说假话且应当向右走)。

1.2 重 言 式

【内容概述】

1. 重言式概念

定义 1.2 命题公式 A 称为**重言式**(tautology),如果对 A 中命题变元的一切指派均弄真A,因而重言式又称**永真式**;A 称为**可满足式**(satisfactable formula),如果至少有一个指派弄真 A,否则称 A 为**不可满足式**或**永假式**、**矛盾式**。

2. 逻辑等价式和逻辑蕴涵式

定义 1.3 当命题公式 $A \leftrightarrow B$ 为永真式时,称 A **逻辑等价于**B,记为 $A \vDash\!\dashv B$,它又称为**逻辑等价式**(logically equivalent)。

以下是一些重要的逻辑等价式,其中 A,B,C 表示任意命题公式:

E_1 $\neg\neg A \vDash\!\dashv A$ 双重否定律

E_2 $A \vee A \vDash\!\dashv A$ 幂等律

E_3 $A \wedge A \vDash\!\dashv A$ 幂等律

E_4 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ 交换律

E_5 $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ 交换律

E_6 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ 结合律

E_7 $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ 结合律

E_8 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 分配律

E_9 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 分配律

E_{10} $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ 德摩根律

E_{11} $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ 德摩根律

E_{12} $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ 吸收律

E_{13} $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ 吸收律

E_{14} $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

E_{15} $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

E_{16} $A \vee \mathrm{t} \Leftrightarrow \mathrm{t}$

E_{17} $A \wedge \mathrm{t} \Leftrightarrow A$

E_{18} $A \vee \mathrm{f} \Leftrightarrow A$

E_{19} $A \wedge \mathrm{f} \Leftrightarrow \mathrm{f}$

E_{20} $A \vee \neg A \Leftrightarrow \mathrm{t}$

E_{21} $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \mathrm{f}$

E_{22} $\neg \mathrm{t} \Leftrightarrow \mathrm{f}$, $\neg \mathrm{f} \Leftrightarrow \mathrm{t}$

E_{23} $A \wedge B \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$

E_{24} $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

E_{25} $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

定义 1.4 当命题公式 $A \to B$ 为永真式时，称 A **逻辑蕴涵** B，记为 $A \models B$，它又称为**逻辑蕴涵式**(logically implication)。

我们也列出一些十分重要的逻辑蕴涵式：

I_1 $A \models A \vee B$, $B \models A \vee B$

I_2 $A \wedge B \models A$, $A \wedge B \models B$

I_3 $A \wedge (A \to B) \models B$

I_4 $(A \to B) \wedge \neg B \models \neg A$

I_5 $\neg A \wedge (A \vee B) \models B$, $\neg B \wedge (A \vee B) \models A$

I_6 $(A \to B) \wedge (B \to C) \models A \to C$

I_7 $(A \to B) \wedge (C \to D) \models (A \wedge C) \to (B \wedge D)$

I_8 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \models A \leftrightarrow C$

逻辑等价式与逻辑蕴涵式有如下明显性质。

定理 1.1 对任意命题公式 A, B, C, A', B'，

(1) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $\models A \leftrightarrow B$

(2)$A \vDash B$ 当且仅当$\vDash A \to B$

(3)若 $A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B$,则 $B \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} A$

(4)若 $A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B, B \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} C$,则 $A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} C$

(5)若 $A \vDash B$,则$\neg B \vDash \neg A$

(6)若 $A \vDash B, B \vDash C$,则 $A \vDash C$

(7)若 $A \vDash B, A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} A', B \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B'$,则 $A' \vDash B'$

定理 1.2 设 A 为永真式,p 为A 中命题变元,$A(B/p)$表示将 A 中 p 的所有出现全部代换为公式B 后所得的命题公式(称为 A 的一个**代入实例**),那么 $A(B/p)$亦为永真式。

定理 1.3 设 A 为一命题公式,C 为A 的子公式(A 的一部分,且自身为一公式),且 $C \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} D$。若将 A 中子公式C 的某些(未必全部)出现替换为 D 后得到公式B,那么 $A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B$。

定理 1.2 常被称为**代入原理**(rule of substitution),简记为 RS。

定理 1.3 常被称为**替换原理**(rule of replacement),简记为 RR。

△3. 对偶原理

定义 1.5 设公式 A 仅含联结词$\neg, \wedge, \vee$, A^*为将 A 中符号$\wedge, \vee$, t, f 分别改换为$\vee, \wedge$, f, t 后所得的公式,那么称 A^*为 A 的**对偶**(dual)。

显然 A 与A^*互为对偶,即$(A^*)^* = A$。

定理 1.4 设公式 A 中仅含命题变元$p_1, \cdots, p_n$ 及联结词$\neg, \wedge, \vee$,那么

$$A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \neg A^*(\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n)$$

这里 $A^*(\neg p_1/p_1, \cdots, \neg p_n/p_n)$表示在 A^*中对 $p_1, \cdots, p_n$ 分别作代换$\neg p_1, \cdots, \neg p_n$ 后所得的公式。

定理 1.5 设 A, B 为仅含联结词$\neg, \wedge, \vee$和命题变元 $p_1, \cdots, p_n$ 的命题公式,且满足 $A \vDash B$,那么有 $B^* \vDash A^*$。进而当 $A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B$ 时有$A^* \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B^*$。常把 $B^* \vDash A^*$, $A^* \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B^*$称为 $A \vDash B$ 和$A \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} B$ 的**对偶式**。

【习题解答】

练习 1.2

1. 试判定以下各式是否为重言式:

(1)$(p \to q) \to (q \to p)$

(2)$\neg p \to (p \to q)$

(3)$q \to (p \to q)$

(4)$p \wedge q \to (p \leftrightarrow q)$

(5)$(p \to q) \vee (r \to q) \to ((p \vee r) \to q)$

(6)$(p \to q) \vee (r \to s) \to ((p \vee r) \to (q \vee s))$

解 (1)否

(2)是

(3)是

(4)是

(5)否

(6)否

2. 试用真值表验证 $E_6, E_8, E_{10}, E_{11}, E_{23}$。

证 (1)E_6:$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	E_6
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(2)E_8:$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	E_8
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

(3)E_{10}:$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\neg (A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	E_{10}
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

(4)E_{11}:$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\wedge B$	$\neg(A\wedge B)$	$\neg A\vee\neg B$	E_{11}
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

(5)$E_{23}:(A\wedge B\to C)\leftrightarrow(A\to(B\to C))$

A	B	C	$A\wedge B$	$A\wedge B\to C$	$B\to C$	$A\to(B\to C)$	E_{23}
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3. 不用真值表,用代入、替换证明 E_{12}, E_{13}, E_{24}。

证 (1)$E_{12}: A\vee(A\wedge B)\models\!\!\!\!\dashv A$

$A\vee(A\wedge B)\models\!\!\!\!\dashv(A\wedge t)\vee(A\wedge B)$ 据 E_{17} 用 RR

$\models\!\!\!\!\dashv A\wedge(t\vee B)$ 对 E_8 用 RS

$\models\!\!\!\!\dashv A\wedge t$ 据 E_{16} 用 RR

$\models\!\!\!\!\dashv A$ 据 E_{17}

(2)$E_{13}: A\wedge(A\vee B)\models\!\!\!\!\dashv A$

$A\wedge(A\vee B)\models\!\!\!\!\dashv(A\vee f)\wedge(A\vee B)$ 据 E_{18} 用 RR

$\models\!\!\!\!\dashv A\vee(f\wedge B)$ 对 E_9 用 RS

$\models\!\!\!\!\dashv A\vee f$ 据 E_{19} 用 RR

$\models\!\!\!\!\dashv A$ 据 E_{18}

(3)$E_{24}: A\to B\models\!\!\!\!\dashv\neg B\to\neg A$

$\neg B\to\neg A\models\!\!\!\!\dashv\neg\neg B\vee\neg A$ 对 E_{14} 用 RS

$\models\!\!\!\!\dashv B\vee\neg A$ 据 E_1 用 RR

$\models\!\!\!\!\dashv\neg A\vee B$ 对 E_4 用 RS

$\models\!\!\!\!\dashv A\to B$ 据 E_{14}

4. 试用真值表验证 I_3, I_4, I_5, I_6。

证 (1)$I_3: A\wedge(A\to B)\to B$