精密工程测量

普通高等教育测绘类规划教材

张正禄　吴栋材　杨　仁　编著

测　绘　出　版　社

责任编辑：朱　伟
封面设计：赵培璧

ISBN 7-5030-0527-0/P·199
定　　价：4.60 元

普通高等教育测绘类规划教材

精密工程测量

张正禄　吴栋材　杨仁　编著

测绘出版社

（京）新登字 065 号

内 容 简 介

本书是根据精密工程测量教学大纲编写的。全书较系统地讲述了精密工程测量的数据处理基本理论，较全面地阐述了精密工程测量的仪器、方法以及测量的自动化应用。并结合几种典型的大型特种精密工程较详细地介绍了精密工程测量工作的内容和特点。

本书可作为高等院校工程测量专业的教材。对于从事工程测量实际工作的测量科技工作者，本书亦具有很好的参考价值。

精密工程测量

张正禄 吴栋材 杨仁 编著

•

测绘出版社出版

北京大兴星海印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

•

开本 787×1092 1/16 • 印张17.5 • 字数 391 千字

1992 年 10 月第一版 • 1992 年 10 月第一次印刷

印数 0 001—3 000 册 • 定价 4.60 元

ISBN 7-5030-0527-0/P·199

前　言

精密工程测量的主要任务是解决各种大型特种精密工程所提出的测量课题：极高的精度要求；测量方法和仪器的发展；合理的数据处理方法和测量过程的自动化等。精密工程测量是工程测量学内容的扩展和延伸，和工程测量学有着密不可分的联系。随着我国社会主义四化建设的飞速发展，大型特种精密工程越来越多，对精密工程测量的需求也与日俱增。因此，对工程测量专业的学生来说，了解和掌握有关精密工程测量的知识，进一步加深和拓宽专业知识，是必不可少的。

由于目前国内外尚没有精密工程测量这门课的公开教材，作者在参阅了国内外大量有关资料的基础上，通过集体讨论，于1986年分工编写了《精密工程测量》讲义。本书就是在原讲义的基础上，结合几年来的教学和科研实践，进一步修改完善而成的。作者的主导思想是：理论和实践相结合，在较系统地讲述精密工程测量的数据处理基本理论和现代方法的基础上，结合各种实际的典型精密工程，介绍从控制网布设、施工放样、设备安装到变形监测等各项测量工作的内容和特点；同时，对精密工程测量的仪器和方法进行了较详细的叙述，对这一部分，作者介绍的重点是基本原理和方法，而不是仪器的结构和操作细节。此外，还介绍了精密工程测量的自动化应用，全球定位系统和重力测量对精密工程测量的作用等内容。

全书共分七章，其中第一、二章，第三章§3.1～§3.4，第四章§4.2，第五章§5.7，第七章§7.2、§7.3、§7.5以及附录一、三由张正禄编写；第三章§3.5、第四章§4.1、§4.3～§4.8以及第七章§7.1、§7.4由吴栋材编写；第五章§5.1～§5.6以及附录二由杨仁编写；第六章§6.1和§6.2分别请陈永奇和管泽霖编写。

全国测绘教材委员会组织有关专家对教材初稿进行了评审，专家们提出了许多宝贵意见，在此谨致衷心感谢。

由于精密工程测量所涉及的知识比较广泛，加之作者的理论水平和实际经验有限，书中难免有不妥之处甚至错误，恳请读者批评指正。

编　者

1991年7月于武汉

目　录

第一章　绪　　论

本世纪近二十年来，现代科学技术有着飞速的发展，人类科学技术不断向宏观宇宙和微观粒子世界延伸。由于发展空间科学、进行大型特种精密科学实验以及各种现代化建设的需要，工程建筑物的规模愈来愈大，建筑物的结构和内部设施也愈来愈复杂。为了保证大型精密设备的安全和正常运行，不但对各工艺构件间相互位置的精度要求愈来愈高，而且对测量的速度也要求愈来愈快。现代科技的发展促进了工程测量学的发展，作为这门学科的扩展和延伸，出现了精密工程测量。精密工程测量的主要任务是解决各种大型和特种精密工程所提出的极高的精度要求。为此，它把现代大地测量学与计量学结合起来，用测量学的原理和方法，使用精密的测量和计量仪器，在超出计量的范围和条件下，达到10^{-6}以上的相对精度或大型工艺、设备的计量级的安装精度。

在大型特种精密工程建筑物中，最典型的工程建筑物要数高能粒子加速器工程。此外，还有大型核电站，高速磁浮铁路，大型隧道工程，大型射电天文望远镜，超高型建筑物以及长距离高精度道轨和传送带装置等。这些大型特种精密工程的特点是：由于它们的大型和稀有性，耗资巨大，必须确保在极其安全可靠的状态下无故障、高效能地运行，因此，它们的精度要求极高。例如在高能物理实验工程中，要将环形加速器的重达数十吨的电磁铁精确地安装定位在近似圆形的环形设计轨道上，为了保证高能粒子在接近光速的飞行中与导流束管壁不发生碰撞，要求两相邻电磁铁的径向相对误差不超过±0.1～0.2mm；在直线加速器中，漂移管的横向精度也要求达到±0.05～0.3mm。然而，直线加速器和环形加速器的规模愈来愈大，直线加速器的粒子轨道长度从几百米增加到几公里，环形粒子加速器的轨道从几百米增加到几十公里，但其精度要求却丝毫未减少；直径达576m的射电天文望远镜，要求组成天线的反射曲面的单片之间的相对位置精度达到10^{-6}；人造卫星和导弹的发射轨道，抛光和磨光工艺玻璃传送带的安装和调校，则要求具有极高的平直度，在几百米甚至数公里长的范围内，要求在横向和高程方向的误差不超过±0.1～0.3mm；在高速磁浮铁路建设中，承载磁轨、行驶磁轨与承载钢轨、行驶钢轨之间的微量间隙设计值为10mm，为了保证系统正常运行，要求行车道纵梁相邻放样点的相对精度在±0.1～0.5mm的范围内；大型建筑物和设备的形变监测，大多数都要求到毫米或亚毫米级的精度。例如长60多米、基础和机器的高度达20多米的核电站的汽轮发电机组，其水平位移和垂直位移的监测精度要求达到±0.2～0.5mm。对于上述各种极高的精度要求，在世界测量科学史上都无相应的理论和经验，采用一般的测量仪器和方法是难于甚至是无法达到的。精密工程测量就是为了达到这些大型特种精密工程在建设和运营中所提出的极高的精度要求而逐渐发展起来的。

精密工程与一般工程建筑物一样，包括规划设计、施工放样和运营管理三个阶段，其中大部分测量工作与一般工程的测量工作相近。因此精密工程测量与工程测量学的内容也

有许多相同的地方，下面着重介绍与工程测量学不同之处。

在大型精密工程的规划设计阶段，要研究地形变及局部重力场不均匀性对工程稳定性的影响，要根据工程所处位置的地形、地质、水文以及人工活动等因素进行地形变监测，为设计提供必要和准确的资料。

对于有统一工艺流程和结构的大型工程建筑，除了要建立高精度的施工测量控制网外，还要建立高精度的安装测量控制网。对于控制网的设计主要采用模拟计算法（或称数学扭曲法）进行不同函数模型和随机模型的平差计算，对网的精度、可靠性以及灵敏度作诊断计算分析，一般还要采用不同解算方法进行同种图形和观测值的平差，以保证平差成果的可靠性。须将现代平差理论和方法如粗差剔除，模型检验和方差协方差分量估计等应用于网的设计和平差计算。

精密工程测量要求在控制点上建立稳固的测量标志并设立强制对中装置。在精密工程测量中为不同需要设计了高度稳定的各种专用测量标志，如考查地层和基础水平位移和垂直位移的标石设备；倒锤式平面控制标石和双金属丝水准标石；观测建筑结构沉陷和变形的各种墙上标志和点群式标志等。在施工安装期以及设备运营期，要对施工、安装测量控制网及形变监测网作重复观测并作点的稳定性分析。

精密工程测量的重要内容是研究、应用和发展精密工程测量的仪器和方法。在长度测量仪器中，用专制的因瓦杆尺、线尺进行距离测量和位移测量，精度可高达±0.02mm；高精度的电磁波测距仪特别是双色电磁波测距仪，例如 LDM2 Terrameter，其精度可达±0.1mm+0.1ppm；利用多谱勒频移效应测定位移的双频激光干涉仪 HP5526A 及 HP 5525B 的精度高达每米 0.5μm，成为最精密的长度测量仪和精密测距中最重要的长度基准；采用全球定位系统的空间测量技术，地面上相互不通视的两点间距离的相对精度可达±0.5ppm。在基准线测量方面，为了将各建筑结构或工艺设备的主轴线测设在直线上，在对现有的基准线测量法进行改进的同时，研究了新的基准线法，特别是对各种激光准直仪的研制和应用，为基准线测量的高精度和自动化开辟了广阔前景。在环形加速器中，用基准线测偏距代替小角测量不仅是提高控制网点径向精度的有效途径，同时采用尼龙丝准直的弦线偏距法，使调校加速器磁件的平滑测量变得更加精确而方便。

测角仪器发展的显著特点是光电测角技术有逐渐取代光学测角方法的趋势。由于采用编码度盘、光栅度盘和动态度盘等新技术和新工艺，不仅精度已达到甚至超过了光学测角法，而且采用微处理机，可完全实现数据获取、储存、传输和处理的自动化，这是精度和速度统一的典型例子。

在提高几何水准测量和流体静力水准测量的精度方面，设计了不同结构的微水准尺，采用了电子传感技术。用电子测斜仪和流体静力水准测量系统以及其它应变、应力、温度传感器等组成的大型机器设备垂直、水平位移监测自动化系统，代表了精密工程测量发展的一个重要方向。几何水准测量自动化方面也已取得可喜的进展。

为了保证大型工艺设备的正常运行，在运营期要经常进行工艺设备的检查和调校，在检校时既不能关闭整个设备，还要在十分复杂的条件下进行，例如高温、高压、带电或辐射等。这就要求使用精度高、速度快、能遥测和自动控制的测量仪器和方法，即实现用仪

器和自动装置来代替人进行工作的测量自动化。例如德国某大型核电站的大型汽轮发电机组的自动化持续监测系统，在5分钟内能获取200多个测点上的观测值，相当于四个测量小组工作两天。在大面积形变监测中，用自动寻标的电子速测仪系统可代替人进行大量而单调的重复观测。大型特种工程的精密工程测量实践表明，测量精度和速度的大幅度提高，都离不开采用现代化的自动化测量系统。

在精密工程测量中，各种外界影响所引起的测量误差不仅要考虑气温、气压变化对角度以及对电磁波测距产生影响；还要考虑湍流，风力对引张线的影响；考虑地球曲率和潮汐作用所产生的影响；考虑局部重力场的不均匀性和随时间变化性的影响等。并要研究减弱或消除这些影响的措施和方法。

精密工程测量的任务和内容表明，它与工程测量学这门学科有密不可分的关系，它们之间没有一条明确的界限。精密工程测量还涉及物理学、数学、地质、水文、机械制造学、计量学、工程建筑、自动控制、光电传感、电子技术、测量平差、控制测量、空间大地测量、重力测量、测量仪器学、计算机科学等许多学科的知识。事实表明，精密工程测量的高精度和自动化有着广阔的发展前途。学习精密工程测量可使我们加深对有关学科知识的理解和运用，扩大和深化我们的知识，使我们能更好地解决精密工程测量中所提的各种实际问题。

精密工程测量是工程测量学的分支，还没有构成一门独立的学科，目前在国内外还未见到专门的教材，而且对精密工程测量的定义和理解也不尽一致。但从它们的服务对象——大型特种精密工程来讲，它具有广阔的发展前途。这是因为随着社会的进步，科技的发展，各种大型特种精密工程的数量将会增多，规模将会更大，因而对测量提出的要求将会更高。就目前来说，在精密工程测量范围内还有许多问题未得到很好解决，比如对精度的要求来说，还很难对提出的各种极高的精度要求给予科学的证明和解释。目前也还没有关于精密工程测量的细则规范。这些工作要靠测量、设计、工程技术人员以及施工、安装和管理人员来共同研究和完成。

第二章　平差及数据处理基础

§2.1　平差基础

在精密工程测量中，无论是进行控制网的设计、模拟计算还是平差处理，大多采用最小二乘法的间接平差模型。本节以矩阵代数为工具，简述间接平差的原理和基本算法，同时也对带未知数的条件平差和附有限制条件的条件平差（最小二乘概括平差）模型作一简介。本节内容是其后有关数据处理内容的基础。

2.1.1　间接观测平差

2.1.1.1　平差模型及解算公式

由 n 维观测值向量真值 $\tilde{L}$ 和 u 维必要而且独立的未知参数向量真值 $\tilde{X}$ 之间的非线性函数模型为

$$\tilde{L} = \phi(\tilde{X}) \tag{2-1}$$

用实测的不带系统偏差的随机观测值向量 L 代替 $\tilde{L}$ 并加进改正数向量 V 后，得非线性函数模型

$$\hat{L} = L + V = \phi(\hat{X}) \tag{2-2}$$

引入近似坐标向量 X_0 和坐标改正数向量 $\tilde{x}$ 后，得

$$\tilde{X} = X_0 + \tilde{x} \tag{2-3}$$

在

$$\|\tilde{x}\| \ll \|X_0\|$$

成立的前提下，对（2-1）的 $\phi(\tilde{X})$ 按台劳公式展开，只取至一次项可得

$$\tilde{L} = \phi(X_0) + \left(\frac{\partial\phi(X)}{\partial X}\right)_{X_0}(\tilde{X} - X_0) \tag{2-4}$$

令

$$L_0 = \phi(X_0)$$

$$\underset{n\times u}{B} = \left(\frac{\partial\phi(X)}{\partial X}\right)_{X_0}$$

$$\tilde{l} = \tilde{L} - L_0$$

则（2-4）变为

$$\tilde{L} = L_0 + B\tilde{x}$$

故得

$$\tilde{l} = B\tilde{x} \tag{2-5}$$

上式称间接平差的线性函数模型，又称高斯一马尔柯夫模型。式中 B 为模型矩阵，$\tilde{l}$ 为改化后的观测值向量真值，引入 X_0 后，$\tilde{X}$、L、$\hat{L}$ 和 $\hat{l}$ 分解为

$$
\left.\begin{array}{ll}
\widetilde{X}=X_0+\widetilde{x} & \hat{X}=X_0+\hat{x} \\
\widetilde{L}=L_0+\widetilde{l} & \hat{L}=L_0+\hat{l} \\
L=L_0+l & \hat{l}=l+V
\end{array}\right\} \tag{2-6}
$$

由（2-5）可得改正数的线性方程

$$\hat{l}=l+V=B\hat{x} \tag{2-7}$$

观测值向量 L 和真值 $\widetilde{L}$ 之差称为偏差向量，用 ε_L 表示，即有

$$\varepsilon_L=L-\widetilde{L} \tag{2-8}$$

由于假设L是不带系统偏差的随机向量，故有 $E(L)=\widetilde{L}$，$E(\varepsilon_L)=O$。L 或 ε_L的随机模型由下式定义

$$\Sigma_{LL}=E(\varepsilon_L\varepsilon_L^T)=\sigma_0^2P^{-1}=\sigma_0^2Q_{LL} \tag{2-9}$$

Σ_{LL}为观测值向量的协方差矩阵，Q_{LL}为协因数矩阵，它们之间相差一个常数因子 σ_0^2，σ_0^2称为单位权方差。平差前所给的为先验单位权方差，而平差后得到的为σ_0^2的子样方差估值。

测量平差问题就是在已知的平差模型(2-7)、(2-9)下，求未知数向量的最佳估值$\hat{x}$，在高斯的最小二乘法则

$$V^TPV=\min$$

下所得到的解

$$\hat{x}=(B^TPB)^{-1}B^TPl=Tl \tag{2-10}$$

称为最小二乘解。现代平差中，对于高斯最小二乘法的重要发展是：人们借助矩阵代数工具，证明了由（2-10）得到的解具有以下性质：

X 的任意函数向量 $\widetilde{Y}=f(\widetilde{X})$，也包括 X 本身在内，按最小二乘法则（2-9）所求得的解具有无偏和方差最小的性质。用数学公式可表示为

$$
\left.\begin{array}{ll}
E(\hat{Y})=\widetilde{Y} & E(\hat{X})=\widetilde{X} \\
\operatorname{tr}(Q_{\hat{Y}\hat{Y}})=\min & \operatorname{tr}(Q_{\hat{X}\hat{X}})=\min
\end{array}\right\} \tag{2-11}
$$

综上所述，间接观测平差的算法可归纳为

表 1

平　差　模　型	
$\hat{l}=l+V=B\hat{x}$	函数模型（改正数的线性方程）
$E(\varepsilon_L)=O$ $\Sigma_{LL}=\sigma_0^2Q_{LL}$	观测值的随机模型

表 2

平 差 算 法	
$P=Q_{LL}^{-1}$	权阵
$N\hat{x}=n$ $N=B^{T}PB$ $n=B^{T}Pl$	法方程组 法方程系数阵 常数项阵
$Q=N^{-1}$ $\hat{x}=Qn$	法方程的解 向量
$V=B\hat{x}-l$	改正数向量
$\hat{l}=l+V$ $\hat{L}=L+V$	观测值平差值 向量
$\hat{X}=X_0+\hat{x}$	未知数向量
$\hat{L}=\phi(\hat{X})$	平差结果的检验

2.1.1.2 平差值向量的协方差矩阵

平差的目的不仅在于计算所需要的平差值向量如$\hat{X}$、$\hat{l}$、V以及$\hat{X}$的函数向量

$$\hat{Y}=f(\hat{X})$$

的值，而且还需要知道这些量的随机性质，即它们的方差协方差矩阵。首先，把函数向量线性化，得

$$\hat{Y}=F\hat{x}+Y_0=\hat{y}+Y_0$$

其中

$$F=\left(\frac{\partial f(X)}{\partial X}\right)_{X_0} \qquad Y_0=f(X_0)$$

然后把上述平差量表示为观测值 l 的线性函数。设 l 的任意线性随机函数为

$$h=Hl \tag{2-12}$$

由广义协方差传播律可得 h 的协方差矩阵 Σ_{hh}和协因数矩阵 Q_{hh}

$$\Sigma_{hh}=H\Sigma_{LL}H^{T}=\sigma_0^2HQ_{LL}H^{T}=\sigma_0^2Q_{hh} \tag{2-13}$$

$$Q_{hh}=HQ_{LL}H^{T} \tag{2-14}$$

将$\hat{x}$、$\hat{l}$、V和$\hat{y}$当作h的子向量，则 (2-12) 可表示为

$$h=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{l}\\ V\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}QB^{T}P\\ BQB^{T}P\\ BQB^{T}P-I\\ FQB^{T}P\end{pmatrix}l \tag{2-15}$$

由 (2-14) 可得(2-16)式，下式中的 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$和 $Q_{\hat{Y}\hat{Y}}$以及 $Q_{\hat{X}\hat{Y}}$、$Q_{\hat{X}V}$等，以后也记为 Q_{XX}、

Q_{YY}、Q_{XY}、Q_{XV}。

$$Q_{hh}=\begin{pmatrix} Q_{\hat{X}\hat{X}} & Q_{\hat{X}\hat{L}} & Q_{\hat{X}V} & Q_{\hat{X}\hat{Y}} \\ Q_{\hat{L}\hat{X}} & Q_{\hat{L}\hat{L}} & Q_{\hat{L}V} & Q_{\hat{L}\hat{Y}} \\ Q_{V\hat{X}} & Q_{V\hat{L}} & Q_{VV} & Q_{V\hat{Y}} \\ Q_{\hat{Y}\hat{X}} & Q_{\hat{Y}\hat{L}} & Q_{\hat{Y}V} & Q_{\hat{Y}\hat{Y}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q & QB^T & O & QF^T \\ BQ & BQB^T & O & BQF^T \\ O & O & Q_{LL}-BQB^T & O \\ FQ & FQB^T & O & FQF^T \end{pmatrix} \quad (2\text{-}16)$$

从（2-16）知，V 与其它平差量随机无关，这一性质在其后的统计推断中具有重要意义。单位权方差的估值 S_0^2 按下式计算

$$S_0^2=\frac{V^TPV}{n-u}=\frac{V^TPV}{f} \quad (2\text{-}17)$$

且 $$E(S_0^2)=\sigma_0^2 \quad (2\text{-}18)$$

其证明将在方差分量估计一节给出。

2.1.1.3　平差参数及其函数的置信域

定理：u 维未知参数向量的二次型 $(\hat{X}-\tilde{X})^T\Sigma_{XX}^{-1}(\hat{X}-\tilde{X})$ 为 χ_u^2 变量，即

$$(\tilde{X}-\tilde{X})^T\Sigma_{XX}^{-1}(\hat{X}-\tilde{X})=\chi_u^2 \quad (2\text{-}19)$$

证明　设 $\varepsilon_X=\hat{X}-\tilde{X}$，对 ε_{XX} 作谱分解

$$\Sigma_{XX}=E(\varepsilon_X\varepsilon_X^T)=SDS^T$$

作线性变换

$$\eta=D^{-\frac{1}{2}}S^T\varepsilon_X=(\eta_1\quad\eta_2\quad\cdots\quad\eta_u)^T$$

则 $$\Sigma_{\eta\eta}=E(\eta\eta^T)=E(D^{-\frac{1}{2}}S^T\varepsilon_X\varepsilon_X^TSD^{-\frac{1}{2}})=I$$

故 $$\eta_i\sim N(0,\ 1),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ u$$

$$\eta^T\eta=\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_u^2=\chi_u^2$$

而 $$\eta^T\eta=\varepsilon_X^TSD^{-\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}S^T\varepsilon_X=(\hat{X}-\tilde{X})^T\Sigma_{XX}^{-1}(\hat{X}-\tilde{X})$$

故得证！

u 维未知参数向量 $\tilde{X}$ 的置信超椭球可由以下概率关系式确定

$$P\{(\hat{X}-\tilde{X})^TQ_{XX}^{-1}(\hat{X}-\tilde{X})\leqslant\sigma_0^2\chi_{u,\ 1-\alpha}^2\}=1-\alpha \quad (2\text{-}20)$$

或 $$P\{(\hat{X}-\tilde{X})^TQ_{XX}^{-1}(\hat{X}-\tilde{X})\leqslant uS_0^2F_{u,\ f,\ 1-\alpha}\}=1-\alpha \quad (2\text{-}21)$$

其半轴 A_i 为

$$A_i=\sigma_0\sqrt{\lambda_i\chi_{u,\ 1-\alpha}^2} \quad (2\text{-}22)$$

或 $$A_i=S_0\sqrt{u\lambda_iF_{u,\ f,\ 1-\alpha}} \quad (2\text{-}23)$$

其中 λ_i 为协因数矩阵 Q_{XX} 的特征值。在平面控制网平差中，当只存在一个待定点时，则该点的置信域变为一个置信椭圆，其半轴为

$$A_i=S_0\sqrt{2\lambda_iF_{2,\ f,\ 1-\alpha}}\quad i=1,\ 2 \quad (2\text{-}24)$$

λ_i 是待定点坐标的协因数阵

$$Q_P=\begin{pmatrix} q_{XX} & q_{XY} \\ q_{YX} & q_{YY} \end{pmatrix} \quad (2\text{-}25)$$

的特征值，由下式计算

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{XX} + q_{YY} + w) \tag{2-26}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(q_{XX} + q_{YY} - w)$$

其中
$$w = \sqrt{(q_{XX} - q_{YY})^2 + 4q_{XY}^2} \tag{2-27}$$
长半轴的方向角为

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2q_{XY}}{q_{XX} - q_{YY}}\right) \tag{2-28}$$

在精密工程控制网中，往往要计算未知数的函数及其置信范围，如两个点的相对误差，相邻点的径向相对误差等。设未知数的函数向量为 h 维，线性化后可表示为

$$\hat{Y} = F\hat{x} + Y_0 \tag{2-29}$$

与 (2-21) 相似，$\hat{Y}$ 的 h 维置信超椭球可由下式导出

$$P\{(\hat{Y} - \tilde{Y})^T Q_{YY}^{-1}(\hat{Y} - \tilde{Y}) \leqslant hS_0^2 F_{h,f,1-\alpha}\} = 1 - \alpha \tag{2-30}$$

其半轴长为

$$A_i = S_0\sqrt{h\lambda_i F_{h,f,1-\alpha}} \tag{2-31}$$

λ_i 为 Q_{YY} 的特征值，A_i 的方向即为 λ_i 所对应的特征向量的方向。

2.1.2 带未知数的条件平差

带未知数的条件平差的非线性函数模型为

$$F(\tilde{L}, \tilde{X}) = O \tag{2-32}$$

平差后的观测值向量 $\hat{L}$ 和未知数向量估值 $\hat{X}$ 应满足

$$\Psi(\hat{L}, \hat{X}) = O \tag{2-33}$$

引入近似未知数向量 X_0 和观测值向量 L，并按台劳公式展开取至线性项，得线性化函数模型

$$AV + B\hat{x} + W = O \tag{2-34}$$

其中
$$\underset{c\times n}{A} = \left(\frac{\partial\Psi(L, X)}{\partial L}\right)_{L, X_0} \tag{2-35}$$

$$\underset{c\times u}{B} = \left(\frac{\partial\Psi(L, X)}{\partial X}\right)_{L, X_0} \tag{2-36}$$

$$W = \Psi(L, X_0) \tag{2-37}$$

$$V = \hat{L} - L \tag{2-38}$$

$$\hat{x} = \hat{X} - X_0 \tag{2-39}$$

上式中 c 为条件式个数；n 为观测值个数；u 为独立未知数个数。观测值 L 的随机模型同 (2-9)，由最小二乘法则 (2-9) 和条件式(2-34)，按拉格朗日求极值法得法方程

$$\begin{pmatrix} AQ_{LL}A^T & B \\ B^T & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ O \end{pmatrix} = O \tag{2-40}$$

其解算步骤如下

求逆

$$\begin{pmatrix} AQ_{LL}A^T & B \\ B^T & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{22} &= -(B^T(AQ_{LL}A^T)^{-1}B)^{-1} = -(B^TN_{aa}^{-1}B)^{-1} = -N_{bb}^{-1} \\ Q_{21} &= -Q_{22}B(AQ_{LL}A^T)^{-1} = N_{bb}^{-1}B^TN_{aa}^{-1} \\ Q_{11} &= (I - Q_{21}^TB^T)(AQ_{LL}A^T)^{-1} \\ &= (I - N_{aa}^{-1}BN_{bb}^{-1}B^T)N_{aa}^{-1} = N_{aa}^{-1} + N_{aa}^{-1}N_{bb}N_{aa}^{-1} \end{aligned}$$

未知数和联系数向量为

$$\hat{x} = -Q_{21}W = -N_{bb}^{-1}B^TN_{aa}^{-1}W \tag{2-42}$$

$$K = -Q_{11}W \tag{2-43}$$

改正数向量为

$$V = Q_{LL}A^TK \tag{2-44}$$

由(2-38)、(2-39)得平差后的观测值向量和未知数向量

$$\hat{L} = L + V = L_0 + l + V = L_0 + \hat{l} \tag{2-45}$$

$$\hat{X} = X_0 + \hat{x} \tag{2-46}$$

并代入 (2-33) 进行平差检验。验后单位权方差估值为

$$S_0^2 = \frac{V^TQ_{LL}^{-1}V}{c-u} = \frac{-K^T(W + A\hat{x})}{c-u} \tag{2-47}$$

对平差量$\hat{X}$、V、$\hat{l}$以及$\hat{L}$和$\hat{X}$的任意函数向量$\hat{Y}$，协方差阵的推算方法与间接观测平差相同，这里，首先要将Y线性化并求W的表达式。对任意函数

$$\hat{Y} = \varphi(\hat{L}, \hat{X}) \tag{2-48}$$

线性化后可得

$$\hat{Y} = H\hat{l} + F\hat{x} + Y_0 \tag{2-49}$$

其中

$$H = \left(\frac{\partial\varphi(L, X)}{\partial L}\right)_{L_0, X_0}, \quad F = \left(\frac{\partial\varphi(L, X)}{\partial X}\right)_{L_0, X_0} \tag{2-50}$$

$$Y_0 = \varphi(L_0, X_0)$$

对不符值向量W(2-37)在L_0点按台劳公式展开取至一次项得

$$W = \Psi(L, X_0) = \Psi(L_0, X_0) + \left(\frac{\Psi(L, X_0)}{\partial L}\right)_{L_0, X_0}(L - L_0) \tag{2-51}$$

在 $\Psi(L_0, X_0) = O$ 时， (2-52)

得 $W = Al$ (2-53)

不难导出$\hat{X}$、V、$\hat{L}$以及$\hat{Y}$对于观测值向量l的线性表达式

$$
h=\begin{pmatrix}\hat{X}\\ V\\ \hat{L}\\ \hat{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Q_{21}A\\ -Q_{LL}A^{T}Q_{11}A\\ I-Q_{LL}A^{T}Q_{11}A\\ H(I-Q_{LL}A^{T}Q_{11}A)-FQ_{21}A\end{pmatrix}l+\begin{pmatrix}X_0\\ O\\ L_0\\ Y_0\end{pmatrix} \tag{2-54}
$$

其协因数阵

$$
Q_{hh}=\begin{pmatrix}Q_{XX} & Q_{XV} & Q_{X\hat{L}} & Q_{XY}\\ Q_{VX} & Q_{VV} & Q_{V\hat{L}} & Q_{VY}\\ Q_{\hat{L}X} & Q_{\hat{L}V} & Q_{\hat{L}\hat{L}} & Q_{\hat{L}Y}\\ Q_{YX} & Q_{YV} & Q_{Y\hat{L}} & Q_{YY}\end{pmatrix} \tag{2-55}
$$

的详细表达式为

$$
Q_{hh}=\begin{pmatrix}-Q_{22} & O & -Q_{21}AQ_{LL} & -Q_{22}F^{T}+Q_{X\hat{L}}H^{T}\\ O & Q_{LL}A^{T}Q_{11}AQ_{LL} & O & O\\ -Q_{LL}A^{T}Q_{12} & O & Q_{LL}-Q_{VV} & Q_{\hat{L}\hat{L}}H^{T}+Q_{\hat{L}X}F^{T}\\ FQ_{22}+HQ_{\hat{L}X} & O & FQ_{X\hat{L}}+HQ_{\hat{L}\hat{L}} & Q_{YY}\end{pmatrix} \tag{2-56}
$$

其中

$$
Q_{YY}=HQ_{\hat{L}\hat{L}}H^{T}+FQ_{XX}F^{T}+HQ_{\hat{L}X}F^{T}+FQ_{X\hat{L}}H^{T} \tag{2-57}
$$

带未知数的条件平差模型（2-34）也可以转化为间接平差模型，令

$$
\overline{V}=AV=-(B\hat{x}+W) \tag{2-58}
$$

则

$$
W+\overline{V}=-B\hat{x} \tag{2-59}
$$

将 W 看作新的观测值，$\overline{V}$为它的改正数，由（2-53）得W的随机模型为

$$
Q_{WW}=AQ_{LL}A^{T}=N_{aa} \tag{2-60}
$$

将(2-59)、(2-60)与(2-7)、(2-8)相比较，可见它们是标准的间接平差模型，与（2-11）相似，可得未知数的解为

$$
\hat{x}=-(B^{T}(AQ_{LL}A^{T})^{-1}B)B^{T}(AQ_{LL}A^{T})^{-1}W=-N_{bb}^{-1}B^{T}N_{aa}^{-1}W \tag{2-61}
$$

与（2-42）相同，但一般不采用这种变换的方法求解。

2.1.3 最小二乘概括平差模型

间接观测平差、带未知数的条件平差是最小二乘法平差方法的特殊形式，而后者又是间接观测平差、条件平差以及混合平差等平差模型的一般形式。然而，最小二乘概括平差模型是附有限制条件的带未知数的条件平差（可简称附有限制条件的条件平差），由概括平差模型出发，可得到所有其它最小二乘平差模型。因此，掌握概括平差模型，对深入理解最小二乘各平差模型及其相互关系具有重要意义。下面简略介绍概括平差模型的主要计算公式，其详细内容可参见“测量平差原理”一书。

最小二乘概括平差的函数模型为