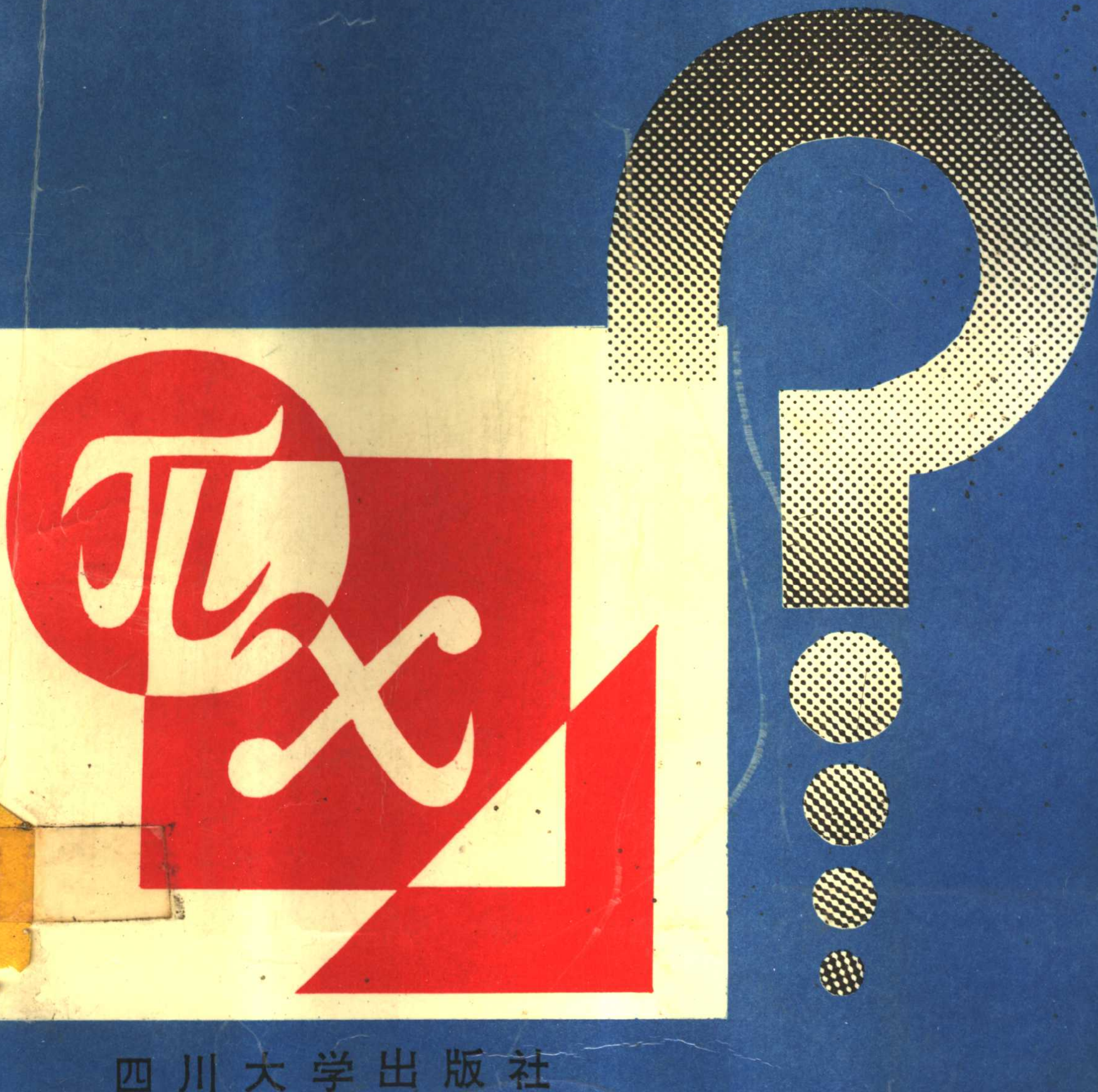
高等数学标准试题及简答精选

主编·任天视·林梦熊·杜秀明·王明琼



四川大学出版社

（川）新登字014号

责任编辑：陈昭麟
封面设计：冯先洁
技术设计：陈昭麟

高等数学标准试题及简答精选

任天视　林梦熊
杜秀明　王明琮　主编

四川大学出版社出版发行　（成都市望江路29号）
四川省新华书店经销　郫县犀浦印刷厂印刷
787×1092mm　1/16开本　31.25 印张　693千字
1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷
印数：00001—10000 册

ISBN 7-5614-0484-0/O·62　定价：9.80元

前　　言

为了提高各类高等院校所设《高等数学》这门主干课的教学质量，我们深感编写一套具有综合功能的、能对学生所学知识进行全方位检测的标准化试题是非常必要的。该书的目的是期望通过平时的练习和阶段的测试，使学生对高等数学的内容在理解、记忆、分析、归纳、推演和创新等各方面的能力都得到提高。我们在四川省数学会高等数学专业委员会的大力帮助下，参照国家教委颁发的各类《高等数学教学大纲》的要求，在多年教学实践所积累的试题的基础上，认真吸取了国内外在试题建设方面的宝贵经验，精心筛选出3159题，并附上简单答案，综合而成这本教学参考书，以供选用。此外，本书还有以下两方面的特点：

一、题型新颖、多样、选用方便：全书共13章，每章包括客观题、基本题和综合题三大类。这三类题若按接近于35：50：15的比例组配使用，可以检测学生所学的基本概念和基本理论的深度和广度，以及掌握基本运算的能力和技巧的熟练程度，并能考核学生的综合能力和应变技能。

二、知识的覆盖面宽，适用范围较广：书中包括一元和多元微积分、微分方程、级数、空间解析几何、向量代数、向量分析、线性代数、概率论与数理统计等内容，适用于理、工、师范、财经、医、农等各类院校的本科生和专科生，也可组配出用于这些专业硕士研究生入学的测试题，其客观题和基本题也可用作各类成人高教的试题。

由于我们的水平有限，肯定会有疏漏、缺点和错误，恳请批评指正。

编　者

1991年10月

目　　录

第一章　函数　极限　连续性

一、客　观　题

$\begin{cases} -1 \le \frac{2x-1}{7} \le 1 \\ x^2-x-6 \ge 0 \end{cases}$

Ⅰ．单项选择题

1．函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域是（　　）．

（A）$x\geqslant 3$；　（B）$x\leqslant -2$；

（C）$[-3,\ 4]$；　（D）$\{x|-3\leqslant x\leqslant -2\}\cup\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$．

2．函数 $y=\sqrt{1-x}+\arccos\frac{x+1}{2}$ 的定义域是（　　）．$\begin{cases} 1-x \ge 0 \\ -1 \le \frac{x+1}{2} \le 1 \end{cases}$

（A）$x\leqslant 1$；　（B）$-3\leqslant x\leqslant 1$；

（C）$(-3,\ 1)$；　（D）$\{x|x<1\}\cap\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$．

3．函数 $y=|x|$ 的定义域是（　　）．

（A）$(0,\ +\infty)$；　（B）$(-\infty,\ 0)$；

（C）$(-\infty,\ +\infty)$；　（D）$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$．

4．函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 若 -1<x<2 \\ x^3-3, & 若 2<x\leqslant 4 \end{cases}$ 的定义域是（　　）．

（A）$-1<x<2$；　（B）$2<x\leqslant 4$；

（C）$(-1,\ 4]$；　（D）$\{x|-1<x<2\}\cup\{x|2<x\leqslant 4\}$．

5．函数 $f(x)=\begin{cases} x-3, & 若 -4\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2+1。& 若 0<x\leqslant 3 \end{cases}$ 的定义域是（　　）．

（A）$-4\leqslant x\leqslant$；　（B）$0<x\leqslant 3$；

（C）$(-4,\ 3)$；　（D）$\{x|-4\leqslant x\leqslant 0\}\cap\{x|0<x\leqslant 3\}$．

6．函数 $y=\sin x-\cos x$ 是（　　）．$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

（A）偶函数；　（B）奇函数；

（C）非奇非偶函数；　（D）奇偶函数．

7．函数 $y=x\cos x+\sin x$ 是（　　）．

（A）偶函数；　（B）奇函数；

（C）非奇非偶函数；　（D）奇偶函数．

8．函数 $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$（$a>1$）是（　　）．

（A）偶函数；　（B）奇函数；

(C) 非奇非偶函数； (D) 奇偶函数.

9. 函数 $y=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>1)$ 是（ ）.

(A) 偶函数； (B) 奇函数；
(C) 非奇非偶函数； (D) 奇偶函数.

10. 函数 $y=\sin\frac{3}{2}x$ 的最小正周期是（ ）.

(A) 2π； (B) 3π； (C) $\frac{2}{3}\pi$； (D) $\frac{4}{3}\pi$.

11. 函数 $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$ 的最小正周期是（ ）.

(A) 2π； (B) π； (C) 4； (D) $\frac{1}{2}$.

12. 令 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数，则 $[-3.97]$ 为（ ）.
(A) 3； (B) 4； (C) -3； (D) -4.

13. 令 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数，则 $[3.58]$ 为（ ）.
(A) -3； (B) -4； (C) 3； (D) 4.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 若x>0,\\ x-1, & 若x\leqslant 0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-e^x, & 若x>0,\\ e^x, & 若x\leqslant 0,\end{cases}$
则 $f(x)\cdot g(x)$ 为（ ）.

(A) $\begin{cases}-e^x(x+1), & 若x>0,\\ e^x(x+1), & 若x\leqslant 0;\end{cases}$ (B) $\begin{cases}-e^x(x+1), & 若x>0,\\ -e^x(x-1), & 若x\leqslant 0;\end{cases}$

(C) $\begin{cases}e^x(x-1), & 若x\geqslant 0,\\ e^x(x+1), & 若x\leqslant 0;\end{cases}$ (D) $\begin{cases}-e^x(x+1), & 若x>0,\\ e^x(x-1), & 若x\leqslant 0.\end{cases}$

15. 当（ ）时，函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$ 是相同的.
(A) $-\infty<x<+\infty$ (B) $x>0$； (C) $x<0$； (D) $x\geqslant 0$.

16. 当（ ）时，函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 是相同的.
(A) $-\infty<x<+\infty$； (B) $x>0$； (C) $x>1$； (D) $x>e$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$（ ）.

(A) $=\frac{\pi}{2}$； (B) $=-\frac{\pi}{2}$； (C) 不存在.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$（ ）.

(A) $=1$； (B) $=0$； (C) 不存在.

19. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$（ ）.

(A) 存在； (B) 不存在； (C) 不能断定是否存在.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} =$ (　　).

(A) $+\infty$; (B) 0; (C) 1.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ (　　).　　$\dfrac{n(1+n)}{2n^2}=\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}$

(A) $=0$; (B) $=\dfrac{1}{2}$; (C) 不存在.

22. 设a_0, $b_0\neq 0$, 则当(　　)时有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

(A) $m>k$; (B) $m=k$; (C) $m<k$.

23. 当$x\to 0$时, e^x-1是(　　).

(A) 较x高阶的无穷小; (B) 较x低阶的无穷小;

(C) 与x同阶的无穷小.

24. 设$f(x)=\begin{cases}x-1, & 若-1<x\leqslant 0\\ x, & 若0<x\leqslant 1\end{cases}$, 则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ (　　).

(A) $=-1$; (B) $=0$; (C) 不存在.

25. 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & 若x\leqslant 0\\ ax+b, & 若x>0\end{cases}$在分段点$x=0$处的极限为1, 则$b=$ (　　).

(A) -1; (B) 1; (C) 0.

26. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{|x-1|}{x-1}=$ (　　).

(A) 1; (B) -1; (C) ∞.

27. 当$x\longrightarrow$(　　)时, $x\sin\dfrac{1}{x}\longrightarrow 1$.

(A) 0; (B) ∞; (C) 1.

28. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$均不存在, 则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ (　　).

(A) 不存在; (B) 存在; (C) 不能断定是否存在.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ (　　).

(A) $=1$; (B) $=-1$; (C) 不存在.

Ⅰ. 填空题

30. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 则$f[f(x)]=$ $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$.

31. 函数$f(x)=1-x^2$与$g(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$ $1\leq x\leq 1$ 恒等的.

32. 函数$f(x)=1$与$g(x)=\cos^2x+\sin^2x$ 不是 恒等的。

33. 函数$f(x)=\frac{1}{3}\sin 2x$ 的值域是$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

34. 函数$y=3^{4x+8}$的值域是$[1,+\infty)$

35. 函数$y=ax+b$ $(a<0)$是单调 ↓ 函数。

36. 函数$y=a^{x+1}$ $(0<a<1)$是单调 ↓ 函数。

37. 设函数$f(x)$的定义域为[0，2]，则函数$f(x^2)$的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

38. 设$f(x)=\frac{1}{2+x^2}$，则$f\left(\frac{1}{x}\right)=$ $\frac{1}{2+\frac{1}{x^2}}$。

39. 设$f(x)=\begin{cases}x+1, & 若x\geqslant 0\\ x-1, & 若x<0\end{cases}$，则$f(0)=$ 1 ，$f(-1)=$ -2 。

40. 考察奇偶性。函数$f(x)=x\sin x$是 偶 函数，因而其图形关于 y轴 对称。

41. 考察奇偶性。函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是 奇 函数，因而其图形关于 原点 对称。

42. 函数$y=\frac{1}{|x|-x}$的定义域为 $x<0$。

43. 函数$y=\ln(\ln x)$的定义域为 $x>e$。

44. 函数$f(x)=\begin{cases}x, & 若0\leqslant x<1\\ 2x, & 若1\leqslant x<2\\ x^2-4x+8, & 若2<x\leqslant 3\end{cases}$ 的定义域为$[0,2)\cup(2,3]$

45. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=$ $|a|$ 。

46. 变量y以常数A为极限的必要且充分条件是变量y可以表示为________________________的和。

47. 若数列$\{x_n\}$单调且 有界 ，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$必定存在。

48. 凡无穷小量皆以 0 为极限。

49. 设在一个确定的自变量过程下，$\alpha(x)$是无穷小量，$B(x)$是有界变量，则$\alpha(x)\cdot B(x)$是 无穷小 量。

50. 函数$f(x)=\frac{1}{x}$的连续区间是$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

51. 函数$f(x)=\frac{1}{1-\ln x^2}$的连续区间是$(-\infty,-e)$，$(-e,0)$，$(0,+e)$，$(+e,+\infty)$

52. 函数$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点是 $x=0$ ，其为第 二 类间断点。

53. 函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$的间断点是 $x=0$ ，其为第____类间断点，属______型。

54. 函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$的间断点是$x=-1$，其为第可去类间断点，属＿＿＿型。

55. 函数$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$的间断点是$x=-1$，其为第＿＿类间断点，属＿＿＿型。

56. 函数$f(x)\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & 若x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & 若x=0\end{cases}$的间断点是$x=0$，其为第一类间断点，属可去型。

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}$。

58. $\lim\limits_{x\to a+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)=$＿＿＿＿。

Ⅱ. 判断题（在括号内填上“正确”或“否”）

59. 若$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

60. 若$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

61. 若$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

62. 若$f(x)=\frac{\pi}{2}$，$g(x)=\arcsin x+\arccos x$，则对于$-1\leqslant x\leqslant 1$，有$f(x)=g(x)$。（　　）

63. 若$f(x)=\operatorname{arctg}x$，$g(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$，则对于$0<x<+\infty$，有$f(x)=g(x)$。（　　）

64. 若$f(x)=\frac{x\sin x}{x}$，$g(x)=\sin x$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

65. 若$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$，$g(x)=x^2-1$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

66. 若$f(x)=\ln(x^2-4)$，$g(x)=\ln(x-2)+\ln(x+2)$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

67. 若$f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$，$g(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)$，则$f(x)\equiv g(x)$。（　　）

68. 若$f(x)=2\ln(1-x)$，$g(x)=\ln(1-x)^2$，则$f(x)$与$g(x)$的定义域相同。（　　）

69. 函数$f(x)=c$（c为常数）是任意正数均可作为其周期的周期函数。（　　）

70. 函数$f(x)=\cos^4x+\sin^4x$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{2}$。（　　）

71. 函数$f(x)=1+5\operatorname{tg}\frac{x}{5}+3\cos\frac{x}{3}$的最小正周期为$T=30\pi$。（　　）

72. 函数$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$为偶函数。 (   )

73. 函数$f(x)=x^2-x+1$是非奇非偶函数。 (   )

74. 函数$f(x)=x^{2n}$（n为自然数）为偶函数。 (   )

75. 函数$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数是其自身。 (   )

76. 设$y=\arcsin u$，$u=x^2+3$,则此二函数可复合成函数$y=\arcsin(x^2+3)$。 (   )

77. $y=c$（c为常数）不是函数。 (   )

78. 有界数列必有极限。 (   )

79. 单调数列必有极限。 (   )

80. 无界数列必不存在极限。 (   )

81. 无穷小量是很小很小的数。 (   )

82. 无穷大量是很大很大的数。 (   )

83. $\dfrac{1}{n}$的极限为0。 (   )

84. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{3n^2+4n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2+4n)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$。 (   )

85. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}=\infty-\infty=0$。 (   )

86. 函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间[1，2]上有界，而在[-1，1]上无界。 (   )

87. $\dfrac{1}{x}$是无穷大量。 (   )

88. 数0是无穷小量。 (   )

89. 若$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$，则$f(x)$在$x=a$连续。 (   )

90. 凡分段函数必有间断点。 (   )

二、基 本 题

I. 计 算 题

91. 指出函数$y=\sin^2x$是怎样复合而成的。

92. 指出函数$y=\sin x^2$是怎样复合而成的。

93. 指出函数$y=\sqrt{x^2+1}$是怎样复合而成的。

94. 指出函数$y=\arcsin(3x+1)$是怎样复合而成的。

95. 指出函数$y=e^{\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}}$是怎样复合而成的。

96. 求 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域。

97. 求 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$ 的定义域。

98. 求 $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\lg(5-x)$ 的定义域。

99. 求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域。

100. 求 $\lim\limits_{x\to2}(x^2\ln x)$。$=4\ln2$

101. 求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{16-x^2}}{(x^2+1)\lg x}$。 $\sqrt3+2\sqrt3$ $\frac{3\sqrt3}{5\lg2}$

102. 求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2+x-5}{3x+1}$。 $\frac{5}{7}$

103. 求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{5x}{x^2-4}$。 $\frac{5\cdot2}{+0}$

104. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+\ln(2-x)}}{4\operatorname{arctg}x}$。 $\frac{1}{\pi}$

105. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+5x}{3x^3+2x^2+x}$。 $=5$

106. 求 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^3+8}$。 $-\frac{2}{3}$

107. 求 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$。 $-\frac{2}{5}$

108. 求 $\lim\limits_{u\to-2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2+5u+6}$。 $=0$

109. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$，其中$m$、$n$为正整数。 $\frac{m}{n}$

110. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{10}-7n+1}{4n^{10}-8n^3+4n^2-1}$。 $\frac{1}{4}$

111. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+x-2}{7x^3+5x^2-3}$。 $\frac{2}{7}$

112. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$。 0

113. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n^2}-n}$。 $=1$

114. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2-1}{3x^4+1}$。 0

115. 求 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$。

116. 求 $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$。

117. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$。 $=0$

118. 求 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ $\frac{\sqrt{x}}{2x}$

119. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt[3]{x}}$。

120. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$。

121. 求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$。

122. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$。

123. 求 $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$。 $=0$

124. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{4x}$。 $\frac{1}{4}$

125. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$。

126. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$。

127. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 4x}$。

128. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{10x-3}$。

129. 求$\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{3\sec x}$。

130. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^{\frac{7}{3}}+x^{\frac{5}{2}})\sqrt{\sin 2x}}{(\mathrm{tg}x)^3}$。

131. 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$。

132. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$。

133. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\mathrm{tg}x}$。

134. 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$。

135. 设$f(x)=\begin{cases}x-1, & 若 -1<x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 若 0\leqslant x<1.\end{cases}$ 问：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？

136. 设$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$。问：需定义$f(0)$为何值才能使$f(x)$在点$x=0$处连续？

137. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & 若 x<0,\\ k, & 若 x=0,\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}; & 若 x>0.\end{cases}$ 问：k为何值$f(x)$才在其整个定义域内连续？为什么？

138. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & 若 x>0\\ 1-3e^{-x}, & 若 x\leqslant 0\end{cases}$的连续性。

139. 当$x\to 0$时，试确定无穷小量$x\sin\sqrt{x}$关于x的阶。

140. 当$x\to 0$时，试确定无穷小量$\sqrt[5]{4x^3-3x^4}$关于x的阶。

141. 当$x\to 0$时，试比较无穷小量$\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\sin x}$与$x$的阶。

142. 当$x\to 1$时，无穷小量$1-x$与$1-\sqrt[3]{x}$是否同阶？是否等价？

143. 当$x\to 1$时，无穷小量$1-x$与$2(1-\sqrt{x}$是否同阶？是否等价？

Ⅰ. 证明题

144. 用“ε—N”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$。

145. 用“ε—N”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

146. 用“ε—N”定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n+3}{n^3+4}=0$.

147. 用“ε—K”定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$.

148. 用“ε—K”定义证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

149. 用“ε—δ”定义证明：$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$.

150. 用“ε—δ”定义证明：$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

151. 用“ε—δ”定义证明：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

152. 用“ε—δ”定义证明：$\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

153. 用“ε—δ”定义证明：$\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x+4}=3$.

154. 证明方程 $x^5-3x=1$ 在区间（1，2）内至少有一个根.

155. 证明方程 $\cos x=x$ 在区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一实根.

156. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 试证：在（a，b）内至少有一一点ξ，使得$f(\xi)=\xi$.

157. 试证：方程 $x=a\sin x+b$（$a>0$，$b>0$）至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

158. 试证：方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于1的正根.

Ⅱ. 应用题

159. 将边长为 a 的正方形铁皮于各角剪去相等的小正方块，然后折起各边做成无盖箱. 试建立箱的容积与小正方块的边长之间的函数关系.

160. 设有物质分布不均匀的细杆OB，M为其上任一点，假定OM的质量与OM的长度平方成正比，且当$OM=4$（长度单位）时其质量为8（质量单位）. 试建立OM的质量与其长度间的函数关系.

161. 一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比；阻力的方向与运动方向相反. 假定当物体以1米/秒的速度运动时阻力为2克. 试建立阻力与速度间的函数关系.

162. 设一三角形的某两边之长分别为a与b，此两边的夹角为α. 试将此三角形的面积表成α的函数，并求其定义域.

163. 设一圆锥的体积为V，试将其底半径表为其高的函数，并求出定义域.

164. 一物体受压缩弹簧的推力而运动. 如这弹簧一端固定于原点，原长$2L$，压缩后长度为L，弹性系数为k. 试将物体所受之力表为距离的函数（只考虑弹簧长度由L变至$2L$的过程）.

165. 等腰直角三角形的直角边长为 a，分斜边为 n 等分，并由分点引平行于直角边之直线成折线。对于任意的n，这个折线长都是$2a$。但另一方面，当n无限增大时，折线就无限接近三角形的斜边，因此斜边长就等于两直角边长之和。问上述推理错误何在？

三、综合题

I．计算题

166. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$。 167. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$。

168. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$。

169. 设函数$f(u)$在区间（0，1）有定义。求下列函数的定义域：(1) $f(\sin x)$，（2） $f(\ln x)$。

170. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$。求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$。

171. 设$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ （$x>0$）。求$f(x)$。

172. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3x}$。 173. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$。

174. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$。 175. 求 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$。

176. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\mathrm{ctg}x}$。

177. 回答：能否补充定义函数 $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处的值，使$f(x)$在 $x=0$ 处变成连续？为什么？

178. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 若0\leqslant x\leqslant1,\\ x+3, & 若x>1.\end{cases}$

试问在 $x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=2$ 诸点处$f(x)$是否连续？为什么？

179. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 若\ 0<x<1,\\ 2, & 若\ x=1,\\ 2-x, & 若\ 1<x\leqslant2.\end{cases}$

（1）指出 $f(x)$的定义域。（2）回答：$x=1$ 是 $f(x)$ 的什么间断点？为什么？（3）改变 $f(x)$在 $x=1$ 的定义使$f(x)$在 $x=1$ 点变成连续。

180. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$. 181. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

182. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

183. 试确定：c为何值时函数$f(x)=\begin{cases}x^2-7, & 若|x|\leqslant c\\ \frac{6}{|x|}, & 若|x|>c\end{cases}$在$(-\infty,+\infty$上连续.

184. 设$y=\lim\limits_{t\to x}\frac{1}{t-x}\ln\frac{t}{x}$（$x>0$），求函数$y(x)$的初等函数表达式.

185. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-(n-1)^{\beta}}=1992$，试求$\alpha$、$\beta$的值.

Ⅰ. 证明题

186. 已知$f(x)=9x+1$，$g(x)=x^2$. 求证满足$g[f(x)]=f[g(x)]$的所有x值为：$x=0$，$x_2=-\frac{1}{4}$.

187. 对于任意实数x和整数n，定义$F(\sin x)=\sin(4n+1)x$. 求证：$F(\cos x)=\cos(4n+1)x$.

188. 用“$\varepsilon-\delta$”论证法证明$\lim\limits_{x\to2+}\frac{[x]^2-4}{x^2-4}=0$.

189. 用极限存在的夹挤判定法证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+9^n}=9$.

190. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e$. 191. 证明$\lim\limits_{x\to0+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

192. 设$x_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$. 证明数列$\{x_n\}$收敛.

193. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}=1$.

194. 设有序列$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，…，$a_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限.

195. 已知数列$x_1=1$，$x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1}$，…，$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，….
证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求出极限.

196. 试确定$x\to0$时下列各无穷小关于基本无穷小x的阶数：（1）$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$（$x>0$）；（2）$\ln(1+x)$；（3）x^3+3x^2；（4）$\sin x-\operatorname{tg}x$.

197. 设 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，$\{b_n\}$ 是单调递减数列，且 $a_n<b_n$（对于一切的 n），$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

198. 若对每个自然数 K，均有自然数 N_K，使当 $n>N_K$ 时有 $|a_n-a|<1/K$，问是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证之。

199. 设 $f(x)$ 在（a，b）内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$。证明：在（a，b）内存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

200. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$。

201. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$。

Ⅱ. 应用题

202. 设有一底半径为 R 厘米、高为 H 厘米、正放的圆锥形容器。若以每秒 a 立方厘米的速率从锥顶小孔往容器注水。试将容器中水的容积 V 分别表成时间 t 及水高 h 的函数。

203. 设行李重量不超过20公斤时不收运费；超过20公斤时每超过 1 公斤收运费0.1元。试将运费 p 表成行李重量 w 的函数。

204. 设某公共汽车路线全长为10公里，票价规定如下：乘坐 2 公里以下者收费 5 分，乘坐 2 至 5 公里收费 1 角，5 公里以上收费 1 角 5 分，试将票价表成路程的函数。

205. 设在 ox 轴的区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有 3 克重的物质均匀分布着，另有 1 克重的物质集中在 $x=3$ 处。试将区间（$-\infty$，x）一段的质量 M 表为坐标 $x(-\infty<x<+\infty)$ 的函数。

206. 用 n 个点等分长为 a 的线段 AB，以每个小段为底，做底角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的等腰三角形。这些三角形的两腰组成一折线。试求当 n 无限增大时所得折线 L 的极限。

四、简　答

1. (D).	2. (B).	3. (C).	4. (D).	5. (D).
6. (C).	7. (B).	8. (B).	9. (A).	10. (D).
11. (C).	12. (D).	13. (C).	14. (D).	15. (D).
16. (B).	17. (C).	18. (B).	19. (B).	20. (C).

21. (B). 22. (B). 23. (C). 24. (C). 25. (B).
26. (B). 27. (B). 28. (C). 29. (C).

30. $1-\frac{1}{x}$. 因$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$.

31. 不是。因$g(x)=|1-x^2|$. 32. 是。因对应法则与定义域均相同。

33. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. 因为$\sin 2x$的值域为$[-1, 1]$.

34. $(0, +\infty)$. 因为由$y=3^{4x+3}$可解得反函数$x=\frac{1}{4}(\log_3 y-3)$，而此反函数的定义域为$(0, +\infty)$.

35. 递减。任取x_1，$x_2\in(-\infty, +\infty)$，不妨设$x_1<x_2$，则$f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)<0$.

36. 递减。$y=a\cdot a^x$，当$0<a<1$时a^x是单调递减函数。

37. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.由假设有$0\leqslant x^2\leqslant 2$，即$x^2\leqslant 2$，则$|x|\leqslant\sqrt{2}$.

38. $\frac{x^2}{1+2x^2}$. 因$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$.

39. 1，-2. 因$f(0)=0+1=1$，$f(-1)=(-1)-1=-2$. 40. 偶，y轴。

41. 奇，原点。因$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$=-f(x)$.

42. $(-\infty, 0)$. 43. $(1, +\infty)$. 因$D=\{x|\ln x>0\}=\{x|x>1\}$.

44. $[0, 3]$.

45. $|a|$. 因$xy\leqslant|xy|$，则$x^2-2|xy|+y^2\leqslant x^2-2xy+y^2$，即$(|x|-|y|)^2\leqslant(x-y)^2$，从而$||x|-|y||\leqslant|x-y|$. 由此，对于任给的$\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$满足当$n>N(\varepsilon)$时总有$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

46. A与一个无穷小量。 47. 有界。 48. 数零。 49. 无穷小。

50. $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$. 51. $(-\infty, -e)$，$(-e, 0)$，$(0. e)$，$(e, +\infty)$.

52. $x=0$，第二。 53. $x=0$，第二，振荡。 54. $x=-1$，第一，可去。

55. $x=-1$，第二，无穷。 56. $x=0$，第一，可去。 57. $\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{5^{50}}$.

58. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. 因为$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x-(\sqrt{a}-\sqrt{x-a})^2}{\sqrt{x^2-a^2}[\sqrt{x}+(\sqrt{a}-\sqrt{x-a})]}$

$$=\frac{2\sqrt{a}\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a}-\sqrt{x-a})}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}-\sqrt{x-a})}\longrightarrow$$