高等数学竞赛与提高

毛京中 主编

6

北京理工大学出版社

高等数学竞赛与提高

毛京中　　　　主编
毛京中　陈一宏　编

北京理工大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛与提高/毛京中主编. —北京:北京理工大学出版社，2002.3

ISBN 7-81045-923-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第097558号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68459850(传真)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京房山先锋印刷厂
装　　订/天津高村装订厂
开　　本/850毫米×1168毫米　1/32
印　　张/13
字　　数/322千字
版　　次/2002年3月第1版　2002年3月第1次印刷
印　　数/1～5000册　　责任校对/郑兴玉
定　　价/18.00元　　责任印制/李绍英

图书出现印装质量问题，本社负责调换

序

学生学完《高等数学》这门重要基础课程之后，如何进一步提高一部分学有余力的学生的数学素质，是不少数学教师在思考和探索的一个课题.

本书是北京理工大学数学系毛京中、陈一宏老师根据他们多年的教学实践，为学有余力的学生开设高等数学提高班而编写的一本教学用书.

本书共有两部分：第一部分共七章，是按知识系统而编写的，其中包括内容要点与例题选讲；第二部分是试题解析，其中包括近几年北京市、北京理工大学的高等数学竞赛试题以及若干模拟试题.

本书编选的例题、试题所涉及的知识覆盖了高等数学的主要内容，既有灵活运用基本概念、基本理论、基本方法的题目，也有相对较难或综合性较强的题目，还有一些应用性题目，内容丰富多样并具有启发性，意在使学生在学好高等数学的基础上，进一步巩固、深化所学知识，提高分析问题、解决问题的能力.

本书不但可以作为高等数学竞赛培训班的教材，也是一本准备参加工学硕士研究生入学考试的学生和有志于提高数学水平的学生的有益读物.

北京理工大学是北京高校学生数学竞赛的最早承办单位，对此，我们北京高校的许多数学教师都深为铭感；北京理工大学的学生曾经在北京高校学生数学竞赛中取得过优异的成绩，我衷心地预祝他们在今后的竞赛中不断取得优异成绩.

李心灿

2001 年秋于北京航空航天大学

编者的话

科学技术的发展需要高素质的人才，而数学教育是培养现代科技人才的最重要的素质教育之一．学好数学对于学好一切科学几乎都是必要的．我们编写此书的目的是要在学好面向全体大学生开设的高等数学课后进一步提高学生，特别是提高优秀学生的数学技能和素质，同时也为有志于参加数学竞赛的学生提供一本参考书．

本书所选例题与试题约600道，所有题目均附有详细解答．这些解答仅供参考，希望读者能从中受到一些启发．我们相信，读者若能开动脑筋，一定会想出更多更好的解答．

本书在编写过程中得到了不少老师的支持与帮助．北京理工大学张润琦教授审阅了全部书稿，提出了很多宝贵的意见和建议．北京市数学研究会理事长李心灿教授在百忙中为本书作序．在此，我们一并致以诚挚的谢意．

由于我们水平有限，书中难免有不当和错误，恳请读者批评指正．

编　者

2001 年 11 月

目　录

第一部分

第二部分

第一部分

第一章　函数、极限与连续

一、内容要点

本章内容包括函数及性质，极限概念与性质，求极限的方法，连续函数的概念、性质及应用.

求极限的一般方法：

1. 利用极限的四则运算及复合运算法则.
2. 利用无穷小的运算法则.
3. 利用无穷小与无穷大的关系.
4. 利用 $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+$ 无穷小.
5. 利用两个重要极限.
6. 利用夹逼定理.
7. 利用单调有界准则及解方程.
8. 利用等价无穷小代换.
9. 利用函数的连续性.
10. 利用递推公式.
11. 利用合并或分项，因式分解，约分，变量代换，取对数等技巧.
12. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$.
13. 利用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.
14. 利用函数极限与数列极限的关系，即若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(x_n\neq x_0)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$；若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

（以下方法的例子见以后各章）

15. 利用洛必达法则.

16. 利用导数定义.

17. 利用微分中值定理与泰勒公式.

18. 利用定积分定义、定积分性质.

19. 利用收敛级数的性质.

常用的不等式：

1. 设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个正数，则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

关于等价无穷小：

1. 几个重要的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，$\sin x\simeq x$，$\tan x\simeq x$，$\arcsin x\simeq x$，$\arctan x\simeq x$，$1-\cos x\simeq\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\simeq x$，$e^x-1\simeq x$，$a^x-1\simeq x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\simeq\alpha x$.

2. 在自变量的某种趋向下，若 $\alpha\simeq\alpha'$，$\beta\simeq\beta'$，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}f=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}f$，$\lim\alpha f=\lim\alpha' f$. 当 $\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq1$ 时，$\lim(\alpha-\beta)f=\lim(\alpha'-\beta')f$.

二、例题选讲

例 1 证明：若对于任意 x,y，有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$，则对任意正整数 n，任意 a，b，有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2$$

证 若 $a=b$，结论显然成立.

若 $a\neq b$，不妨设 $a<b$，将 $[a,b]$ n 等分，设分点为 x_i，$i=0,1,2,\cdots,n$，则

$$|f(b)-f(a)| = \left|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}(b-a)^2$$

例 2 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于 $x=a$，$x=b$均对称($a\neq b$)，求证：$f(x)$是周期函数.

证 由题意，对$\forall\ x$，有

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+(x-a)) = f(a-(x-a)) \\ &= f(2a-x) = f(b+(2a-x-b)) \\ &= f(b-(2a-x-b)) = f(x+2(b-a)) \end{aligned}$$

故 $f(x)$是周期函数.

例 3 设对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$

证明 $f(x)$是周期函数.

证 对$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(1+x)=f\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2} \qquad \left(\text{由题设}, f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=f(x)$$

故 $f(x)$是周期函数.

例 4 设 $F(x)$除 $x=0$ 与 1 两点外，对全体实数都有定义，并满足等式 $F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，求函数 $F(x)$.

解 设已知等式为(1)，将(1)中 x 换成 $\frac{x-1}{x}$ 得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x} \tag{2}$$

将(1)中 x 换成$-\frac{1}{x-1}$得

$$F\left(-\frac{1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1} \tag{3}$$

(1)+(3)−(2)得

$$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

例 5 如果 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数，且$\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，求 $f(x)$.

解 对$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，由题意，$\exists$ 正数 T，使

$$f(x)=f(x+T)=\cdots=f(x+nT)$$

又由$\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x+nT)=0$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)$

解 由于

$$x-\ln x\cdot\sin x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\right)$$

当 $x\to+\infty$，$\frac{\ln x}{x}\to 0$，$\sin x$ 有界，故

$$\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\to 0$$

$$x-\ln x\cdot\sin x\to+\infty$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=\frac{\pi}{2}$$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1+2}{n^3}+\cdots+\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right)$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}(1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1))$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}[(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}[(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$=\frac{1}{6}$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$，其中 $a>0,b>0$.

解 若 $b=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n=1$

若 $b\neq1$，设 $y_n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{\frac{1}{n}\ln b}{a} = \frac{1}{a}\ln b = \ln b^{1/a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n = b^{1/a}$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\right)x^4$

解 由于当 $x\to\infty$时，

$$\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\to 0$$

$$原式= \lim_{x\to\infty} x^4\tan\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \frac{\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}{1+\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}\,\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{(x^2+1)(x^2+2)+(2x^2+5)(2x^2+7)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0,a\neq 1)$

解 原式$= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^x}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} a^x \frac{a^{x\log_a x - x}-1}{x-a}+\lim_{x\to a} a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}$$

$$= a^a\lim_{x\to a}\frac{(x\log_a x - x)\ln a}{x-a}+a^a\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\ln a}{x-a}$$

$$= a^a\lim_{x\to a}\frac{x\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}-1\right)\ln a}{x-a}+a^a\ln a$$

$$= a^a\lim_{x\to a}\frac{x\ln\dfrac{x}{a}}{x-a}+a^a\ln a$$

$$= a^a \lim_{x \to a} \frac{x\ln\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)}{x-a} + a^a \ln a$$

$$= a^a \lim_{x \to a} \frac{x\left(\frac{x}{a}-1\right)}{x-a} + a^a \ln a$$

$$= a^a + a^a \ln a = a^a(1+\ln a)$$

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) \quad (x>0)$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n+1]{x}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n+1]{x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln x$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n+1]{x}\,\frac{1}{n(n+1)}\ln x$$

$$=\ln x$$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin\dfrac{xe^x+xe^{-x}}{2}\sin\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}\,\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})e^{-x}(e^{2x}-1)}{4x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})e^{-x}\cdot 2x}{4x}=-2$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\dfrac{a_n}{x}\right)}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{1+\left(\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right)}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{n}\left[(a_1+\cdots+a_n)\frac{1}{x}+b_2\frac{1}{x^2}+\cdots+b_n\frac{1}{x^n}\right]$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

其中b_2，…，b_n分别为$\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)$的展开式中$\frac{1}{x^2}$，…，$\frac{1}{x^n}$的系数.

例 15 求$\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

解 原式$=\lim\limits_{x\to1}\left[\left(1-\sqrt{1+(x-1)}\right)\left(1-\sqrt[3]{1+(x-1)}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{1+(x-1)}\right)\right]\Big/(1-x)^{n-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{2}(x-1)\left(-\frac{1}{3}(x-1)\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}(x-1)\right)}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

例 16 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-x\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\cdot\frac{\ln e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-x\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}-\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{1+\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4}}-1\right)-\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}-1\right)-\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{x^2+x+1}{x^3}}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$$