H∞控制理论

解学书　钟宜生　编著

清华大学出版社

H_∞ 控制理论

解学书　钟宜生　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

图书在版编目(CIP)数据

H_∞控制理论/解学书,钟宜生编著.—北京:清华大学出版社,1994.10

ISBN 7-302-01587-2

Ⅰ.H… Ⅱ.①解…②钟… Ⅲ.控制论-最佳化 Ⅳ.0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 07635 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
印刷者:北京密云胶印厂
发行者:新华书店总店北京科技发行所
开　本:850×1168 1/32　印张:7　字数:177 千字
版　次:1994 年 9 月第 1 版　1994 年 9 月第 1 次印刷
书　号:ISBN 7-302-01587-2/TP・668
印　数:0001—2000
定　价:7.60 元

光华基金会为支持研究生教材和学术专著的出版，给予我社资助，本书即为由光华基金会资助出版的专著之一。

目　　录

绪　论

虽然鲁棒控制(*robust control*)这个术语在控制理论的文献中从1972年才开始出现[1],但早在本世纪20年代,在反馈系统的稳定性问题得以解决之前,就有人探讨过鲁棒控制问题的求解[2]。

30年代开始发展起来的古典控制理论(频率域方法)在一定程度上能较方便地处理单变量控制系统的鲁棒性问题,尤其是鲁棒稳定性问题。其实,我们在利用Bode图进行单变量控制系统的综合时,总是设法保证系统具有一定的稳定裕量,以使控制系统对受控对象特性的微小变化(或其模型的微小摄动)具有一定的“鲁棒性”(虽然当时人们没有使用这个术语)。总的来说,频率域方法是试凑法,但由于上述优点(和其它一些优点),使其甚至今天仍在工业控制系统设计中扮演“主角”。

从50年代末开始发展起来的现代控制理论(状态空间方法)能较好地解决多变量控制系统的分析和综合问题。并且,已经证明LQG状态反馈控制系统的幅值稳定裕量为0.5至∞,而相角稳定裕量大于或等于$\pm 60°$[3]—[5]。然而,LQG控制系统甚至LQ最优调节器对受控对象的模型摄动(或模型误差)的鲁棒稳定性有时却很差[6],[7]。下面我们以例来说明这一点。

考虑一单输入单输出系统,受控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

其状态空间最小实现为

$$\dot{x}=Ax(t)+bu(t),\quad x(0)=x_0\neq 0$$

$$y(t)=c^T x(t)$$

其中 $y(t)$和 $u(t)$分别为受控对象的输出和输入，而

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则使性能指标

$$J = \int_0^\infty [\, y^2(t) + ru^2(t)]dt, \quad r > 0$$

为最小的状态反馈控制

$$u(t) = -kx(t)$$

的状态反馈矩阵 k 由下式给出：

$$k = r^{-1}b^T P$$

其中 P 为如下代数 Riccati 方程的正定解：

$$PA + A^T P - r^{-1}Pbb^T P + c^T c = 0$$

可求得

$$k = [\, 1 + q - \sqrt{5 + 2q} \quad 2\sqrt{5 + 2q} - q - 4\,]$$

其中

$$q = \sqrt{4 + r^{-1}}$$

容易证明，对于这样构成的状态反馈矩阵 k，如下谱分解方程成立。

$$[1 + G_0^{\sim}(s)][1 + G_0(s)] = 1 + r^{-1}G^{\sim}(s)G(s)$$

其中

$$G_0(s) = k(sI - A)^{-1}b$$

$$= \frac{(\sqrt{5 + 2q} - 3)s + q - 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_0^{\sim}(s) = G_0^T(-s)$$

显见，$1+G_0(s)$是该系统的回程差函数。由上述谱分解方程可知

$$|1 + G_0(j\omega)| \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty$$

因此，$G_0(s)$的 Nyquist 轨线到$(-1, j0)$点的距离总是大于或等于1的，即 $G_0(s)$的 Nyquist 轨线不会进入到以$(-1, j0)$点为圆心，

半径等于1的圆内去。由此可知，该系统的幅值稳定裕量为0.5至∞，而相角稳定裕量大于或等于$\pm 60°$，参见图0.1。

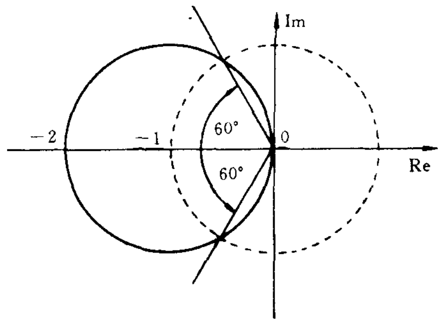

图 0.1

下面我们考虑如下形式的动态摄动(亦称模型误差)。

$$G_p(s) = G(s) + \frac{\varepsilon}{s+1}$$

其中$G_p(s)$是摄动后的(或者说是实际的)受控对象的传递函数，ε是一实数。显然，对任意的实数$\eta > 0$，当$|\varepsilon|$充分小时，总有

$$|G_p(j\omega) - G(j\omega)| = \left|\frac{\varepsilon}{1+j\omega}\right| < \eta, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty$$

上述摄动的状态空间描述可表示为b矩阵的摄动：

$$b_p = b + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样对应的回程差函数为

$$1 + k(sI - A)^{-1} b_p = 1 + \frac{b_1 s + b_0}{(s+1)(s+2)}$$

其中

$$b_1 = \sqrt{5+2q} - 3 + \varepsilon(q + 1 - \sqrt{5+2q})$$

$$b_0 = q - 2 + 2\varepsilon(q + 1 - \sqrt{5+2q})$$

对于给定的 ε，当 $r \to 0$ 时

$$b_1 = \varepsilon q + 0(q)$$

$$b_0 = (1 + 2\varepsilon)q + 0(q)$$

其中 $0(q)$ 表示当 q 趋于无穷大时，$q^{-1}0(q)$ 趋于零的量。由此可知，对于任意给定的 ε，当 $r \to 0$ 时，该系统的闭环极点趋于如下两实数(参见[8]中的引理)。

$$p_1 = -\varepsilon q, \quad p_2 = -(1 + 2\varepsilon)/\varepsilon$$

当 $-1/2 < \varepsilon < 0$ 时，p_1 和 p_2 均为正常数，且 $|\varepsilon|$ 越小，p_2 越大。也就是说，受控对象的微小模型摄动会使该闭环系统具有模很大的正实极点。

然而，在实际控制工程中，受控对象的精确模型往往是难以得到的。有时，即使能获得受控对象的精确模型，但也因为其过于复杂，在进行控制系统设计时，非进行简化不可。另外，随着系统的工作条件(环境)的变化，随着控制系统中的元器件的老化或坏损，受控对象的特性也随之发生变化，从而偏离设计时所依据的标称特性。这些都会导致模型误差。

此外，在许多实际问题中，仅知道噪音(或干扰)是属于某个集合而并不确知其统计特性(或能量谱)。这便使得 LQG(或 H_2)方法难以使用。

鉴于这些实际情况，人们对 LQG(或 H_2)等控制系统设计方法进行了反思，开始寻求这样的鲁棒控制问题的解，即

(1) 受控对象不是由一个确定的模型来描述的，而仅知道其模型属于某个给定的模型集合；

(2) 外部信号(包括干扰信号，传感器噪音和指令信号)不是具有已知特性(例如能量谱或统计特性)的信号，也仅知道其属于某个给定的信号集合。此时，控制系统设计应采用怎样的性能指标，设计方法又如何？

针对上述问题，加拿大学者 G. Zames 于 1981 年提出了以控

制系统内某些信号间的传递函数(矩阵)的 H_∞ 范数为优化指标的设计思想。

下面用几个例子来说明,对于上述鲁棒控制问题,为什么会采用传递函数(矩阵)的 H_∞ 范数作为(优化)设计指标。

让我们考虑图 0.2 所示的控制系统。

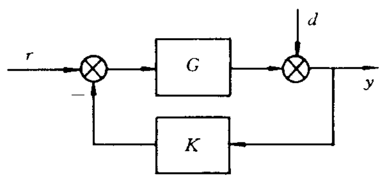

图 0.2

我们先讨论干扰抑制问题。此时,假设干扰信号 d 属于如下信号集合。

$$D = \{d : d = W(s)v,\ v \in H_2,\ \| v \|_2 \leqslant 1\}$$

其中 $W(s)$ 是稳定的实有理函数,并设 $1/W(s)$ 也是稳定的实有理函数;H_2 是在开的右半复平面上为解析且平方可积的复变函数所构成的集合;$\| v \|_2$ 是 v 的 H_2 范数,即

$$\| v \|_2^2 = \sup_{\xi>0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v^*(\xi + j\omega)v(\xi + j\omega)d\omega$$

因此,我们假设干扰信号集合是由所有满足下式的信号 $d \in H_2$ 所构成。

$$\| W^{-1}(s)d \|_2 \leqslant 1$$

由 Plancherel 定理可知,上述不等式是对干扰信号 d 的加权能量的约束。

对于集合 D 中的所有干扰信号,我们希望设计一控制器 $K(s)$,使得闭环控制系统稳定,且使 $\| y \|_2$ 最小。

易知

$$y=[I+G(s)K(s)]^{-1}d$$
$$=T_{yv}(s)W(s)v$$

其中

$$T_{yv}(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1}$$

因此，我们要设计一控制器 $K(s)$ 使得 $T_{yv}(s)$ 为稳定的有理函数，且使得

$$J=\sup[\|y\|_2 : v\in H_2, \|v\|_2\leqslant 1]$$

最小。由于

$$\begin{aligned}&\sup[\|y\|_2 : v\in H_2, \|v\|_2\leqslant 1]\\&=\sup[\|T_{yv}(s)W(s)v\|_2 : v\in H_2, \|v_2\|\leqslant 1]\\&=\sup[\|T_{yv}(s)W(s)v\|_2 : v\in H_2, \|v_2\|=1]\\&=\|T_{yv}(s)W(s)\|_\infty\end{aligned}$$

所以，对于给定集合 D 中的任意 d，使 y 的 H_2 范数(即输出信号的平方积分，也即其能量)最小的问题，便转化为使 $T_{yv}(s)W(s)$ 的 H_∞ 范数最小的问题。

这样，在我们的问题的设定下，很自然地引入了某传递函数(加权后)的 H_∞ 范数作为优化设计指示。

其次，我们讨论鲁棒稳定问题。

假设 $d=0$，而受控对象的模型属于如下模型集合：

$$G=\{G(s) : |G(j\omega)-G_0(j\omega)|<|r(j\omega)|, \omega\in R\}$$

其中 $G_0(s)$ 是受控对象的标称模型，$r(s)$ 是稳定的实有理函数，R 为实数集合。

对任意的 $G(s)\in G$，定义受控对象的模型摄动为

$$\Delta(s)=G(s)-G_0(s)$$

则图 0.2 所示系统与图 0.3 所示系统是等价的。而图 0.3 所示系统的稳定性与图 0.4 所示系统的稳定性是等价的。

如果 $K(s)$ 能使无模型摄动的系统稳定，即 $K(s)[1+G_0(s)$

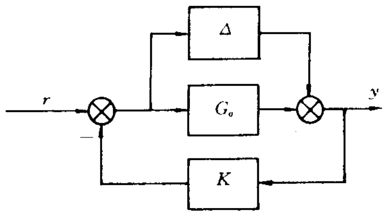

图 0.3

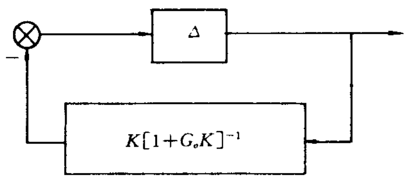

图 0.4

$\times K(s)]^{-1}$为稳定有理函数，且设 $\Delta(s)$也是稳定的有理函数，则由小增益定理(或 Nyquist 稳定判据)可知，$K(s)$能使摄动后的系统稳定的充分条件是

$$|\Delta(j\omega)K(j\omega)[1+G_0(j\omega)K(j\omega)]^{-1}|<1,\ \forall\ \omega\in R$$

那么对于 G 中的所有模型，$K(s)$均使系统稳定的充分条件是$K(s)$稳定 $G_0(s)$，且

$$|r(j\omega)K(j\omega)[1+G_0(j\omega)K(j\omega)]^{-1}|\leqslant 1,\ \forall\ \omega\in R$$

上述不等式等价为

$$\sup_{\omega\in R}|r(j\omega)K(j\omega)[1+G_0(j\omega)K(j\omega)]^{-1}|\leqslant 1$$

即(详见第一章)

$$\|r(s)K(s)[1+G_0(s)K(s)]^{-1}\|_\infty\leqslant 1$$

事实上，如果 G 中的任意模型 $G(s)$ 的不稳定极点的个数（计及重数）均与标称模型 $G_0(s)$ 的不稳定极点的个数相等的话（而不要求 $\Delta(s)$ 为稳定），则对于任意 $G(s)\in G$，$K(s)$ 使系统为稳定的充分必要条件是[10],[11]

(1) $K(s)$ 稳定 $G_0(s)$，且

(2) $\| r(s)K(s)[1+G_0(s)K(s)]^{-1} \|_\infty \leqslant 1$

因此，对于给定的模型集合 G，求取鲁棒稳定化控制器 $K(s)$ 的问题，便转换为要在稳定 $G_0(s)$ 的控制器集合中求取使 $\| r(s) \times K(s)[1+G_0(s)K(s)]^{-1} \|_\infty \leqslant 1$ 的控制器 $K(s)$ 的问题。

这也很自然地引入了某个传递函数（加权后）的 H_∞ 范数作为设计指标。

最后，我们考虑存在时间域描述的参数摄动的稳定性分析和稳定问题。先考虑如下系统。

$$\dot{x} = Ax(t)$$

$$A = A_0 + B_0 \Delta C_0$$

其中 A_0、B_0 和 C_0 均是给定矩阵，A_0 是稳定矩阵。Δ 表示系统的参数摄动。对于此系统，其为稳定（即 A 为稳定矩阵）的充分必要条件是[12]

$$\| \Delta \|_\infty < [\, \| C_0(sI - A_0)^{-1} B_0 \|_\infty]^{-1}$$

上述条件可认为是对参数摄动项 Δ 的一种不定结构限定，即矩阵 Δ 在满足上述条件下能有多种形式。但此结果也可用来处理给定结构的参数摄动。为此，将 A 矩阵写成

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} B_i \Delta_i C_i$$

其中 $A_0, B_i, C_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ 是给定矩阵，A_0 是稳定矩阵，而 $\Delta_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ 表示系统的参数摄动。适当选取 B_i, C_i, Δ_i 的形式，可以具体描述 A 矩阵的每个元素的摄动。例如，取 $B_1 = e_1 = (1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)^T$，$C_1 = e_1^T = (1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)$，$\Delta_1 = \delta_1$（标量），则 $B_1\Delta_1 C_1$ 描述的

是 A 矩阵的(1,1)元的摄动。

上述 A 矩阵可改写成

$$A = A_0 + [B_1\ B_2\ \cdots\ B_N]\begin{bmatrix}\Delta_1 & & 0 & \\ & \Delta_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \Delta_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N\end{bmatrix}$$

因此,只要令

$$B_0 = [B_1\ B_2\ \cdots\ B_N]$$

$$C_0 = \begin{bmatrix}C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N\end{bmatrix}$$

即可直接利用前面的结果而得知

$$\max_i\{\|\Delta_i\|_\infty\} < [\|C_0(sI - A_0)^{-1}B_0\|_\infty]^{-1}$$

是 A 矩阵为稳定的充分必要条件。显然此条件可以给出对 A 矩阵的每个元素摄动的限定。

其实可以证明,上述结果可以用于分析时变的摄动,即 Δ_i 可以是(Lebesgue 可测的)时变函数(矩阵)[12]。

下面考虑具有时域描述参数摄动的系统的稳定问题。设系统的动态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

其中

$$A = A_0 + \Delta A$$

$$B = B_0 + \Delta B$$

而

$$\begin{aligned}[\Delta A \quad \Delta B] &= DF[E_1 \quad E_2] \\ &= DFE\end{aligned}$$

A_0,B_0,D 和 $E(=[E_1 \quad E_2])$ 均是给定的常数矩阵,而 F 表示系统的参数摄动。易见,上述描述不失一般性,因为适当选取 D,E_1,E_2

和 F，可以描述各种可能的（A 和 B 分别的）摄动形式。同样不失一般性，可以假设

$$F^TF \leqslant I$$

当此假设不满足时，只要用一个因子去乘或除 D 矩阵或 E_1、E_2 矩阵的各元，同时用此因子去除或乘 F 矩阵的各元即可。对于上述具有参数摄动的系统，考虑用一状态反馈使闭环系统稳定的问题，即设

$$u(t) = Kx(t)$$

现要设计一常数矩阵 K，使得系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

为稳定的。对于此鲁棒稳定问题，有如下结论，即如果(A_0,B_0)是能稳定的，则闭环系统是稳定的充分必要条件是

$$\| (E_1 \quad E_2K)(sI - A_0 - B_0K)^{-1}D \|_\infty < 1$$

事实上，上述摄动矩阵 F 可以是时变函数，只需假设其所有元 Lebesgue 可测即可。

可以将上述结果推广到动态状态反馈的情形。此时，只要将常数矩阵 K 改为实有理函数矩阵 $K(s)$即可。对于输出反馈的情形的相应结果，不难类推而得。

上述讨论又一次引入了以某传递函数的 H_∞范数作为分析和设计指标。

自从 1981 年 Zames 提出控制系统的 H_∞优化设计思想以来[13]，有众多学者投身于 H_∞优化设计理论的研究。十年前人们曾怀疑能否求得这种优化设计的一般解[14]，而今天，研究者们不仅已经提出了多种求解的方法，而且已使 H_∞优化设计理论基本完善了[22]。

H_∞控制理论的研究主流可分为两大阶段[15]。到 1984 年为止为第一阶段。在此阶段，人们把在使控制系统内部稳定的控制器集合中寻求使一个传递函数矩阵的 H_∞范数最小的解的问题，通过