

误差分析在 电气测量中的应用

何圣静 高莉如

水利电力出版社

930.15

75

113482

TM930.15
2175

误差分析在 电气测量中的应用

何圣静 高莉如

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系统地阐述了测量误差的来源、分类,各类误差的特点及其传递规律,结合一些实用的典型实例介绍了误差分析方法(回归分析法)在电气测量中的应用,详细地分析了系统误差,随机误差,仪器的误差。本书可供电力工程技术人员及大中专院校师生参考。

误差分析在电气测量中的应用

何圣静 高莉如

*

水利电力出版社出版、发行

(北京三里河路6号)

各地新华书店经营

北京市京东印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 3.5印张 75千字

1989年6月第一版 1989年6月北京第一次印刷

印数0001—3790册 定价2.35元

ISBN 7-120-00590-1/TM·155

前 言

在科学实验中，要进行大量的测量工作，测量是实验的支柱，而实验是科学的基础。实验证明，一切测量结果和实际值之间产生一定的差异是不可避免的。这种差异表现在数值上即称为误差。因而，误差是科学实验中的重要组成部分。科学技术的发展对电气设备提出了越来越高的性能质量指标。例如，从某大型水轮发电机的温度测量中，发现同一槽内线棒各导体间的最高温度与最低温度之差竟达三十多摄氏度，经过分析研究，这种情况是由于换位不完善而引起的，从而提供了革新的途径。在大型电机的试验研究工作的监视以及自动控制系统中，都有大量的数据需要采集和处理。测量精度不仅对产品质量起着监督和保证作用，而且往往是产品优劣的决定性因素。测量误差的深入分析研究经常是技术革新和重大的科学新发现的前导。因此，对测量结果误差的分析，一直受到人们极大的重视。

一个测量的完整过程往往包含有：

(1) 根据测量的目的和精度要求，用相应的原理，设计和拟定测量方法。

(2) 合理地选择仪器、元件并制定测量步骤。

(3) 测量（就是把待测量与标准值进行比较）。

(4) 运用误差理论对测量数据进行处理，得出最后的测量结果和误差范围。一个没有标明误差的测量结果，在科学上是没有什么价值的。

测量误差来源于上述过程的各个环节中。现代科学的发

ABE 30/90

展对先进的测量技术和精确的测量结果依赖性很大。许多科学技术成果，是通过不断地减少测量误差、提高测量精确度以及改进测量技术而取得的。因此，我们在测量工作中应充分重视对测量误差的分析，从而对测量结果作出正确的评价。

误差理论广泛渗透到科学实验的领域里，它来源于实践，又指导实践，它是对测量实践的科学概括和数学抽象。测量工作者、工程技术人员以及科学实验工作者借助高等数学知识掌握它是完全可能的。我们掌握了误差理论，就可能使测量的精确度不断地提高，从而推动科学技术的发展。

本书在初稿完成后蒙北京电力科学研究所钱慰曾同志仔细审阅，提出许多建议和意见，在此表示感谢。

限于我们的经验和水平，书中的缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

目 录

前 言

第一章 概述	1
第一节 误差的表示方法	1
第二节 误差的分类	5
第三节 误差的传递	6
第四节 误差的其它表示法	8
第二章 系统误差的分析	10
第一节 系统误差的主要来源	10
第二节 方法误差的分析	12
第三节 恒定值系统误差的消除	18
第四节 补偿测量法	26
第五节 变值系统误差的消除	29
第六节 用实验方法消除系统误差的典型实例	32
第七节 系统误差的综合	36
第三章 随机误差的分析	39
第一节 随机误差的特点	39
第二节 随机误差正态分布曲线	43
第三节 随机误差的非正态分布	53
第四节 最小二乘法及其应用实例	55
第五节 数据检验的几种方法	59
第四章 回归分析法	65
第一节 一元线性回归方程式	67
第二节 多项式回归及其应用	73
第三节 多元线性回归	78
第五章 电气测量仪器的误差分析	83

第一节	电气测量仪器准确度等级的意义	84
第二节	直流电桥的误差分析	88
第三节	直流电位差计的误差分析	91
第四节	功率表的误差分析	93
第五节	互感器的误差分析	96
第六节	仪器误差的修正技术	101
参考文献		105

第一章 概 述

我们并不要求一切测量所含有的误差都小到不能再小的地步，这不仅通常是做不到，也是不必要的。测量的目的往往是希望将误差控制在实验要求的范围之内，通过数学处理的方法来评定测量精度的大小。因此，我们要对每一项测量结果进行误差分析，其任务是：

(1) 测量前，估计测量误差的主要来源。

(2) 根据实验对测量误差大小的要求，合理地选择测量方法和仪器，采用比较经济、简便的测量技术方案，获得最佳值。

(3) 正确地处理数据。将测量结果写成一个数，并附带一定的测量不确定度。

(4) 最后，对测量结果进行分析评定，包括误差的来源，测量值的可靠性和精确度。因此，误差分析为测量技术的革新提供了科学依据。

第一节 误差的表示方法

误差定义为某量值的给出值与其客观真值之差。其中，给出值包括测量值、标称值、示值、预置值、计算近似值等。给出值具有广泛性，而真值是唯一的客观标准，因而误差具有唯一性，这里误差是指给出值的误差。

一、绝对误差

误差（即真误差）的定量表示是实测值与真值之差，即

$$\Delta x' = x - N_0 \quad (1-1)$$

式中 x ——待测量的实测值;

N_0 ——待测量的真值;

$\Delta x'$ ——真误差。

由于真值 N_0 是一个理想的概念,它是不能通过测量而获得的。在实际测量中,对真值的理解有如下几种。

1. 理论真值

例如,平面三角形三内角之和恒为 180° ; 理想电容和电感上,其电压与电流的相位差为 90° ; 以及理论公式中的理论值等等。

2. 计量学约定真值

凡满足国际计量大会决议中的单位的测量条件,例如,长度单位(1m是光在真空中,在 $1/299792458$ s 的时间间隔内行程的长度),电流单位(在真空中,两根无限长,而圆截面可忽略的平行导线,其间相距1m。由于一恒定的电流通过,因而产生磁场。如果在两导线之间产生的力,在1m的导线上为 2×10^{-7} N时,其电流即为1A),复现出的量值都是计量学约定真值。

3. 把标准仪器的示值作为约定真值

标准仪器的误差与测量仪器的误差相比,不大于 $1/5$ (或 $1/3 \sim 1/20$) 时,则可认为前者是后者的约定真值。

约定真值,有时也称为实际值。约定真值定义为满足规定准确度的用来代替真值地位的量值。通常用约定真值(实际值) N 来代替真值 N_0 , 因为 N 总比 x 更接近于 N_0 , 所以, x 与 N 之差可写为

$$\Delta x = x - N \quad (1-2)$$

式中 Δx ——绝对误差;

N ——代替真值 N_0 的实际值。

二、修正值

在实际测量中，我们经常采用修正值的概念来表达实测值的精确度。

由式(1-2)可以得出

$$N = x - \Delta x = x + \Delta x_0 \quad (1-3)$$

式中 $\Delta x_0 = -\Delta x$ 称为修正值。

由式(1-3)可以得知，含有误差的实测值加上修正值后可消除误差的影响。

三、偏差

例如，长度为1m的刻度尺，而加工为1.001m，但刻度尺上仍然标为1m，而1.001m是实际值。所以，对标称值1m来说，其误差为-0.001m，修正值为+0.001m。如果加工无偏差，则应该加工出1m的刻度尺，现在加工有偏差，对加工的实际值来说，偏离了标称值。为此，引入偏差的定义

$$\text{偏差} = \text{实际值} - \text{标称值}$$

可见，虽然偏差与修正值相等，但它是指对实际值而言，而修正值或误差都是对实测值而言。

【例 1-1】某电流表的刻度0~10A，在5A处校准值为4.95A，求在5A示值时的修正值？

$$\begin{aligned} \text{【解】 } 5\text{A处的修正值 } \Delta x_0 &= N - x = 4.95 - 5.00 \\ &= -0.05\text{A} \end{aligned}$$

四、相对误差

为了比较各待测量测量结果的精确度。例如，用尺子测量10m的距离，实测值为10.1m，绝对误差为0.1m；又用尺子去测量1m的长度，实测值为1.1m，绝对误差亦为0.1m，单从绝对误差来考虑，是无法比较它们的准确程度。

所以，经常采用相对误差的形式。相对误差的形式很多，常用的有下列几种。

1. 实际相对误差

实际相对误差为绝对误差 Δx 与约定真值（实际值） N 的比值，即

$$\Delta = \frac{\Delta x}{N} \quad (1-4)$$

或写为

$$\Delta = \frac{\Delta x}{N} \times 100\%$$

2. 示值相对误差

示值（或标称值）相对误差为绝对误差与仪器的示值（或量值的标称值）的比值，即

$$\Delta_s = \frac{\Delta x}{x_s} \quad (1-5)$$

式中 Δx ——绝对误差；

x_s ——仪器的示值；

Δ_s ——相对误差。

3. 满度相对误差

满度相对误差亦称为引用相对误差。满度相对误差为绝对误差与仪器示值的上限（即满度值） x_m 的比值。即

$$\Delta_m = \frac{\Delta x}{x_m} \quad (1-6)$$

式中 Δ_m ——满度相对误差。

【例 1-2】 用一只伏特计测量100V电压，绝对误差为+1V，用另一只伏特计测量20V电压，绝对误差为+0.5V，求各自的相对误差？

【解】

$$\Delta_1 = \frac{+1}{100} = +1\%$$

$$\Delta_2 = \frac{+0.5}{20} = +2.5\%$$

第二节 误差的分类

为了便于研究测量误差的特征与性质，我们一般将误差分为系统误差、随机误差和粗差。

一、系统误差

所谓系统误差是指在相同测量条件下，多次测量同一个待测量时，误差的大小和符号均保持恒定；或在条件改变时，按某一确定规律而变化的误差。实际中，经常用“正确度”来反映系统误差对测量结果的影响程度。

二、随机误差

所谓随机误差是指在相同的测量条件，对同一待测量进行多次测量时，其误差值可大可小，符号可正可负；以不可预定方式变化的误差。

三、粗差

所谓粗差，即明显地歪曲了测量结果的误差。这种误差是由于测量工作者的粗心，不正确的操作以及实验条件的突变引起的。例如，仪器故障、读错、记错、算错数据等等所引起的误差。含有粗差的测量结果称为坏值，坏值是不应该产生的，当然予以剔除。

误差理论的研究和分析的对象是系统误差和随机误差的产生、系统误差和随机误差对测量结果的影响以及减小和消除的系统误差和随机误差办法。由于随着人们对误差来源及

其变化规律的认识，不断地深化，往往有可能将原来认识不足而归为随机误差的某些项目误差予以澄清，转化为系统误差。反过来，对误差性质分析不够时，或者暂时搞不清楚误差的来源时，笼统地按随机误差来处理，这也是可以的。所以，往往对系统误差和随机误差的划分并不严格。一般来说，一个测量结果，其误差性质既含有系统误差，也含有随机误差。我们在进行误差分析的过程中，要把注意力集中于总误差中占有较大比重的误差上去，加以重点分析研究。只有这样，才有可能作出正确的评定，并提出提高测量精度的有效措施。

第三节 误差的传递

由直接测量的量代入公式计算得到的结果，称为间接测量。每次直接测量都有误差，显而易见，间接测量的结果也必然有误差，如何计算间接测量结果的误差，这就是误差的传递。例如，测量电动机的输出功率 P ，可以通过测量电动机的转矩和转速，再计算出 P ，也可以采用损耗分析法计算 P 。

设 y 为某些独立的自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的任意函数，即

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1-7)$$

这些自变量的误差各为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ，则

$$y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

为了求出 Δy 的表达式，对式(1-7)求全微分，有

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (1-8)$$

通常误差远小于测量值，我们可以把 $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, dy 看作误差，这就是误差的传递公式。由各部分的误差组成总误差。

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (1-9)$$

有时，也可以对式 (1-7) 先取对数，再求全微分，得

$$\frac{dy}{y} = \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \ln f}{\partial x_m} dx_m$$

即

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \ln f}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (1-10)$$

式 (1-9) 和式 (1-10) 是误差传递的一般公式。式中

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \text{ 和 } \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} dx_1,$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial x_2} dx_2, \dots, \frac{\partial \ln f}{\partial x_m} dx_m \text{ 称为分误差;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \text{ 和 } \frac{\partial \ln f}{\partial x_1}, \frac{\partial \ln f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \ln f}{\partial x_m}$$

称为误差的传递系数。由式 (1-9) 和式 (1-10) 可见，一个直接测量的量的误差对总误差的影响，不仅取决于本身误差大小，还取决于误差传递系数。

【例 1-3】 用三瓦表法测量三相交流电路中的功率，若各仪表的读数分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 以及误差分别为 ΔP_1 、 ΔP_2 、 ΔP_3 ，求测量总功率的误差。

【解】 三相交流电路的总功率等于

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

由此可求得三相总功率的绝对误差为

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$$

其相对误差为

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P_1}{P_1} + \frac{\Delta P_2}{P_2} + \frac{\Delta P_3}{P_3}$$

【例 1-4】 用单臂电桥测量互感器直流电阻的相对误差。

【解】 单臂电桥测量直流电阻的表达式为

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_0$$

利用式 (1-10) 可得 R_x 的相对误差为

$$\frac{\Delta R}{R_x} = \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_0}{R_0}$$

【例 1-5】 若电阻 R_1 和 R_2 并联, 试求总电阻 R 的相对误差。

【解】 R_1 与 R_2 并联后的总电阻为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

利用式 (1-10) 可求得 R 的相对误差。

因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial R_1} \right) \Delta R_1 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \Delta R_1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial R_2} \right) \Delta R_2 &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \Delta R_2 \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{\Delta R_2}{R_2}$$

第四节 误差的其它表示法

一、精度

反映误差大小的程度称为精度。精度高的误差小, 精度

低的误差大。精度又分为：

(1) 正确度：反映系统误差的影响程度。

(2) 精密度：反映随机误差的影响程度。

(3) 精确度（有时称准确度）：反映系统误差和随机误差综合的影响程度，其定量特征可用测量不确定度来表示。

二、测量的不确定度

测量误差是在测量过程中产生的。测量误差不能表征测量的准确度。因为对于系统误差来说，不可能完全获得系统误差的信息，修正以后的测量结果，不能准确地给出绝对误差的大小，其误差值含有不确定度。对于随机误差来说，在用统计法求出标准偏差时，存在一个置信度的问题。所以，只能用测量的不确定度来表征测量的准确度。

测量的不确定度是表征待测量的真值在某个量范围的一个评定。测量的不确定度一般包含两类不同的分量：一类分量可以在一组测得值通过统计分布法的计算而加以评定，用标准偏差 σ_i （或 σ_i^2 ）来表示，这称为A类；另一类分量只能通过经验或其它信息估算来评定，用近似标准偏差的平方 U_j 表征，这称为B类。

两类不确定度通常用方差合成法，求出合成不确定度 $\sigma_{\text{合}}$

$$\sigma_{\text{合}} = K \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 + \sum_j U_j^2} \quad (1-11)$$

式中 $\sigma_{\text{合}}$ ——测量不确定度的合成标准偏差；

K ——因子， K 一般取1。

第二章 系统误差的分析

第一节 系统误差的主要来源

现代科学技术的发展，对测量的精确度提出了越来越高的要求，从而也促进了对误差理论的深入研究，并在许多方面超出了古典误差理论的内容。所谓古典误差理论建立在两个假设条件的基础上，一个条件是认为随机误差服从正态分布，另一个条件是忽略系统误差的影响，即以测量数据中不含有系统误差，对随机误差作数学处理和估计。目前，人们十分重视系统误差的研究，系统误差已成为现代误差理论的一个重要组成部分。因为测量结果包括系统误差和随机误差，如果不消除或不减小系统误差的影响，就会使得对随机误差的估计变得毫无意义。

系统误差有时隐藏在测量数据之中，多次重复测量既不能发现系统误差，也不能消除它对测量精确度的影响。在有些测量中，系统误差的数值又相当大，甚至比随机误差大得多。并且，有时由于待测量的大小不相同，对系统误差的影响程度也会不同。在分析系统误差时，必须根据具体情况，把专业知识与误差理论结合起来。下面我们根据误差的主要来源加以分析。

一、装置误差

1. 仪器、仪表误差

仪器、仪表误差是由于使用的仪器或量具在结构上不完善、或没有按照操作规程使用而引起的误差。例如电工仪表、电桥、电位差计等的误差。