

大学课程教学同步练丛书



DAXUE KECHENG JIAOXUE TONGBULIAN CONGSHU

高等数学

(上册)

同步学习辅导

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

大学课程教学同步练丛书



DAXUE KECHENG JIAOXUE TONGBULIAN CONGSHU

高等数学

(下册)

同步学习辅导

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

□ 策划编辑 / 冷国伟
□ 责任编辑 / 王俊轩
□ 封面设计 / 成 艺

ISBN 7-5612-1366-2



9 787561 213667 >

ISBN 7-5612-1366-2 / O · 185

定价：25.00元(本册定价：13.00元)

高等数学同步学习辅导

(上册)

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

高等数学同步学习辅导

(下册)

西北工业大学高等数学教研室 编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导/西北工业大学高等数学教研室编. —
西安:西北工业大学出版社, 2001. 8

ISBN 7 - 5612 - 1366 - 2

I. 高 … II. 西 … III. 高等数学-高等学校-教学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 036120 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072 电话:(029)8493844

网 址:<http://www.nwpup.com>

印 刷 者:西安电子科技大学印刷厂

开 本:850mm×1 168mm 1/32

印 张:20.1875

字 数:516 千字

版 次:2001 年 8 月 第 1 版 2001 年 11 月 第 2 次印刷

印 数:6 001~13 000 册

定 价:25.00 元(上、下册) 本册定价:13.00 元

前 言

学习高等数学课程时,不少学生感到教学进度快。虽然上课能听懂,但独自解题时会有不少的困惑和疑虑,遇到灵活性较大、综合性较强的题,更是无从下手。我们编写这本同步学习辅导书,供学生课外阅读,以起到教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。

本书共分 12 章(与高等数学(同济四版)教材相对应),每章分为若干节(与教学次序相同),最末节为综合问题。每节分为“知识网络导学”、“重点难点剖析”、“典型例题分析”、“基础知识训练”、“能力提高测试”、“参考答案与提示”等栏目。

【知识网络导学】 概括本节所对应的教材内容中的知识要点,阐述扼要、清晰。

【重点难点剖析】 对于教与学中的“重点”、“难点”以及“误点”进行整理提炼、着重剖析。

【典型例题分析】 讲究选题的布局,例题的典型性,注重解题思路的分析,对解题方法给出引导性的归纳总结。

【基础知识训练】 这部分是给学生配备的基础练习题,通过多种题型,检查学生掌握该节基础知识的程度。

【能力提高测试】 这部分也是练习题,选题具有一定的难度和综合性,以检查学生对知识的灵活运用能力,帮助学生对所学知识全面、深入地理解与掌握。

【参考答案与提示】 给出了每题的答案,并对略难的题给出了提示或简答。

全书试图给学生贯穿这样的思想:在学习中需要熟悉概念、性质,更需要明了其要素;需要多做几类练习题,更需要明了分析问

题的着眼点及解题的思路。引导学生学会将计算方法条理化,总结出规律性的东西,提高利用基本计算方法的思想去解决问题的能力。

本书可作为高等学校工科高等数学的同步教学参考书,也可作为考研应试者考前复习、强化训练的指导书。

参加本书编写工作的有西北工业大学数学与信息科学系陆全、肖亚兰、李云珠、符丽珍、王雪芳、杨月茜、刘华平、孟亚琴、刘哲、林伟、郑红婵等同志,全书由陆全、肖亚兰统纂定稿。

由于水平所限,加之时间仓促,书中错误及疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2001 年 4 月

内 容 简 介

本书是高等数学的同步学习辅导书,书中每节均设6个栏目,包括以下内容:对高等数学的主要知识点进行梳理、归总;剖析重点、难点和误点;选择有代表性的典型例题进行分析和求解,从而揭示高等数学的解题方法与技巧;配置了两级测试练习题,以提高学生基本运算、推理及应试的能力;附有测试题答案及提示,供学生自测。

本书可作为本科生学习高等数学的同步学习辅导书,也可作为考研的强化训练指导书。

目 录

(上册)

第一章 函数与极限	1
§ 1 函数	1
§ 2 极限	10
§ 3 函数的连续性	36
§ 4 综合问题	48
第二章 导数与微分	59
§ 1 导数概念	59
§ 2 导数运算	66
§ 3 微分	80
§ 4 综合问题	84
第三章 中值定理与导数的应用	91
§ 1 利用洛必达法则求极限	91
§ 2 微分中值定理	105
§ 3 函数性态研究	128
§ 4 综合问题	148
第四章 不定积分	168
§ 1 不定积分的概念 换元积分法	168
§ 2 分部积分法	189

§ 3	三种特殊类型函数的积分	198
§ 4	综合问题	213
第五章	定积分	217
§ 1	定积分的概念 积分上限函数	217
§ 2	定积分与广义积分的计算	229
§ 3	综合问题	249
第六章	定积分的应用	255
§ 1	几何应用	255
§ 2	物理应用	272
§ 3	综合问题	280
第七章	空间解析几何与向量代数	287
§ 1	向量代数	287
§ 2	平面与空间直线	300
§ 3	曲面与空间曲线 二次曲面	319
§ 4	综合问题	330

(下 册)

第八章	多元函数微分法及其应用	337
§ 1	多元函数的微分法	337
§ 2	多元函数微分的应用	368
§ 3	综合问题	386

第九章 重积分	398
§ 1 二重积分	398
§ 2 三重积分	411
§ 3 重积分的应用	423
§ 4 综合问题	433
第十章 曲线积分与曲面积分	440
§ 1 曲线积分	440
§ 2 曲面积分	471
§ 3 场论初步	497
§ 4 综合问题	504
第十一章 无穷级数	516
§ 1 数项级数的性质	516
§ 2 数项级数的审敛法	524
§ 3 幂级数	542
§ 4 傅里叶级数	562
§ 5 综合问题	572
第十二章 常微分方程	578
§ 1 微分方程的基本概念	578
§ 2 一阶微分方程	583
§ 3 高阶微分方程	603
§ 4 常系数线性微分方程	613
§ 5 综合问题	629

第一章 函数与极限

§ 1 函 数

【知识网络导学】

函数 概念	函数, 分段函数
	反函数, 复合函数
	基本初等函数, 初等函数
函数 性质	<u>有界函数</u> $f(x)$ $x \in X \subset D$, 存在 $M > 0$, 使 $ f(x) \leq M$
	<u>单调增加(减少)函数</u> $f(x)$ $x \in I \subset D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)
	<u>奇(偶)函数</u> $f(x)$ $x \in [-a, a]$, $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$)
	<u>周期函数</u> $f(x)$ $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在 $T > 0$, 使 $f(x+T) = f(x)$

【重点难点剖析】

(1) 确定函数的两个要素是定义域 D 和对应关系 f . 只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时, 它们才是同一个函数.

例如, $f_1(x) = \ln(1-x^2)$ 与 $g_1(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x)$ 是同一函数. 因为它们的定义域均为 $(-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g_1(x) = \ln[(1+x)(1-x)] = \ln(1-x^2) = f_1(x)$. 又 $f_2(x) = \ln(x^2-1)$ 与 $g_2(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ 不是同一函数. 因为

$f_2(x)$ 的定义域为 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g_2(x)$ 的定义域为 $D_2 = (1, +\infty)$, $D_1 \neq D_2$.

(2) 不是任意两个函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 都能构成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$. 例如, $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x - 2$ 就不能构成复合函数 $y = \sqrt{\cos x - 2}$. 因为 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $D_f = [0, +\infty)$ 与 $u = \cos x - 2$ 的值域 $R_\varphi = [-3, -1]$ 的交集是空集. 一般地, 当函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f 与 $u = \varphi(x)$ 的值域 R_φ 的交集 $D_f \cap R_\varphi$ 不空时, 此两函数才能构成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$.

将复合函数分解为若干个简单函数, 这对函数的研究会带来方便. 复合函数的分解过程是由外层到内层, 逐层进行的. 例如, $y = \sin(e^{\arctan \sqrt{x}})$ 分解为

$$y = \sin u, \quad u = e^v, \quad v = \arctan w, \quad w = \sqrt{x}.$$

【典型例题分析】

例 1.1 (1) 求 $y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$ 的定义域.

(2) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 试求 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

解 (1) 由
$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases}$$

解得函数的定义域(图 1-1) 为 $D = [-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

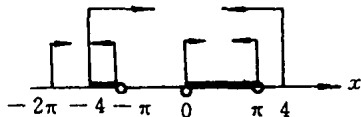


图 1-1

(2) 函数 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域是 $f(x+a)$ 及

$f(x-a)$ 的定义域之交集, 即

$$\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a, \\ a \leq x \leq 1+a. \end{cases}$$

1° 当 $a < 1-a$, 即 $a < \frac{1}{2}$

时(图 1-2), 所求函数的定义域为 $[a, 1-a]$;

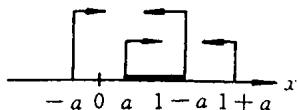


图 1-2

2° 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数的定

义域为一个点, $x = \frac{1}{2}$.

3° 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为空集 Φ , 此时函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处无定义.

小结 求具体函数的定义域时, 应注意对常见函数的某些限制.

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 根式中负数不能开偶次方;

(3) 零和负数不能取对数;

(4) 三角函数、反三角函数的定义域. 如 $\arcsin x$ 中 $|x| \leq 1$, $\tan x$ 中 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

对于应用问题中确定的函数, 其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 下列函数中哪个是周期函数? 周期为多少?

(1) $y = \sin(3x+2) + |\cos x|$; (2) $y = x \cos x$.

解 (1) 因为 $\sin x$ 是以 2π 为周期, 所以 $\sin(3x+2)$ 以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期. 又 $|\cos x|$ 以 π 为周期, 于是和函数 $y = \sin(3x+2) + |\cos x|$ 是以 $T = 2\pi \left(\frac{2\pi}{3} \text{ 和 } \pi \text{ 的最小公倍数} \right)$ 为周期的周期函数.

(2) 假设 $y = x \cos x$ 是周期函数, 周期为 $T(>0)$, 则有

$$(x+T)\cos(x+T) = x\cos x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x=0$, 得 $T\cos T=0$. 令 $x=\frac{\pi}{2}$, 得

$$\left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(T+\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad \left(T+\frac{\pi}{2}\right)\sin T=0.$$

由于 $T>0$, $T+\frac{\pi}{2}>0$, 可得 T 应满足的方程组

$$\begin{cases} \sin T = 0, \\ \cos T = 0, \end{cases}$$

显然此方程组无解, 故函数 $y = x \cos x$ 不是周期函数.

小结

(1) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期;

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 T_1, T_2 为周期, 则 $f(x) \pm g(x)$ 以 T_1 和 T_2 的最小公倍数为周期.

例 1.3 证明函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上即有上界又有下界.

证 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在 $M>0$, 对任意 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 所以 $f(x)$ 有上界 M 和下界 $-M$.

反之, 设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 和下界 K_2 , 即对任意的 $x \in X$, 有 $K_2 \leq f(x) \leq K_1$, 令 $K = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $|f(x)| \leq K, x \in X$, 即 $f(x)$ 在 X 上有界.

思考题 能否用“存在 $M>0$, 使 $|f(x)| < M, x \in X$ ”来定义函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 为什么?

例 1.4 设 $f(x)$ 为 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

分析 可按单调函数的定义证明, 注意利用函数的奇偶性.

证 对任意的 $x_1, x_2 \in (-l, 0), x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 且 $-x_1 > -x_2$. 由题设单调性知 $f(-x_1) > f(-x_2)$. 又由题设, $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内为奇函数, 有

$$f(-x_1) = -f(x_1), \quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

于是

$$-f(x_1) > -f(x_2), \quad f(x_1) < f(x_2).$$

这就证明了 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

注 本章中对函数的单调性及有界性的判定侧重于明确概念. 在第三章中将介绍利用导数性质的判定法.

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 2, \end{cases} g(x) = \ln x$, 求 $f[g(x)]$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f[g(x)] &= f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leq \ln x \leq 1 \\ \ln^2 x, & 1 < \ln x \leq 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e] \cap (0, +\infty) \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2] \cap (0, +\infty) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2\ln x, & x \in [1, e], \\ \ln^2 x, & x \in [e, e^2]. \end{cases} \end{aligned}$$

小结 对于分段函数的复合函数, 应注意自变量和中间变量的取值范围, 这是保证运算正确的一个重要环节. 初学者容易犯这样的错误(以上题为例),

$$f[g(x)] = f[\ln x] = \begin{cases} 2\ln x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln^2 x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

其错误所在正是未正确地给出中间变量 $u = \ln x$ 的取值范围.

$$\text{例 1.6 求函数 } y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases} \text{ 的反函数.}$$

分析 求反函数的步骤为: