高等学校21世纪教材

GAODENG XUEXIAO 21 SHIJI JIAOCAI

离散数学

李盘林 李宝洁 孟军 孟宪福 编著

COMPUTER

人民邮电出版社
POSTS & TELECOMMUNICATIONS PRESS

高等学校21世纪教材

离 散 数 学

李盘林 李宝洁 孟 军 孟宪福 编著

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/李盘林等编著.—北京:人民邮电出版社,2002.6

高等学校21世纪教材

ISBN 7-115-10157-4

Ⅰ.离... Ⅱ.李... Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第015672号

内容提要

本书是介绍离散数学的一本教材,共有11章,内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构的基本概念及性质、半群与群、环与域、格与布尔代数、图的基本概念及矩阵表示以及几类重要的图。

全书编写力求通俗、简明、扼要。各章都配有典型的例子和适量的习题,便于读者理解与掌握内容。

本书可作为高等学校计算机及相关专业的教材,也可供有关技术人员学习参考。

高等学校21世纪教材

离 散 数 学

◆ 编　　著　李盘林　李宝洁　孟　军　孟宪福

责任编辑　须春美

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号

邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn

网址　http://www. ptpress.com.cn

读者热线　010-67180876

北京汉魂图文设计有限公司制作

北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本:787×1092　1/16

印张:15.5

字数:373千字　2002年6月第1版

印数:1-6000册　2002年6月北京第1次印刷

ISBN 7-115-10157-4/TP·2789

定价:21.00元

本书如有印装质量问题,请与本社联系　电话:(010)67129223

丛书前言

当今世界，科学技术突飞猛进，知识经济已见端倪，国际竞争日趋激烈。教育在综合国力的形成中处于基础地位，国力的强弱将越来越取决于劳动者的素质，取决于各类人才的质量和数量，这对于培养和造就我国 21 世纪的一代新人提出了更加迫切的要求。21 世纪初，我国高等教育呈快速发展的势头。教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教学的基本工具，也是深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才的重要保证。因此，高等教育教材建设必须有一个与之相适应的快速发展。

随着计算机软硬件的不断升级换代，计算机教学内容也随之更新，尤其随着教育部"高等教育面向 21 世纪教育内容与课程体系改革"计划的实施，对教材也提出了新的要求。为此我们聘请了国内高校计算机教学方面知名的专家教授，精心策划编写了这套"高等学校 21 世纪教材"。

为真正实施精品战略，组织编写好这套教材，我们在国内高校做了系统、详细的调查，对教育部制订的教育计划做了认真的研究，还对国内外已出版的教材做了理性的分析，确立了依托国家教育计划、传播先进教学理念、为培养符合社会需要的高素质创新型人才服务的宗旨。

在本套教材的策划过程中，我们多次组织了由专家及高校一线教师参加的研讨会，对现有比较出色的教材的特点及优点进行了分析，博采众长，力求实现教材权威性与实用性的完美结合。

本套教材有如下特点：

1. 考虑到全国普通高等院校学生的知识、能力、素质的特点和实际教学情况，在编写教材时把重点放在基本理论、基础知识、基本技能与方法上。

2. 紧密结合当前技术的新发展，在阐述理论知识的同时侧重实用性。

3. 力求在概念和原理的讲述上严格、准确、精练，理论适中，实例丰富，写作风格上深入浅出，图文并茂，便于学生学习。

4. 为适应当前高校课程种类多、课时数要压缩的教学特点，教材不仅篇幅有很大的压缩，而且均配有电子教案，以满足现代教学新特点的需要，做到易教易学。

5. 所选作者均是国内有丰富教学实践经验的知名专家、教授，所编教材具有较高的权威性。

教育的改革将不会停止，教材也将会不断推陈出新。目前本套教材即将推出，将接受广大教学第一线教师的检验。

由于我们的水平和经验有限，这批教材在编审、出版工作中还存在不少缺点和不足，希望使用本套教材的学校师生和广大读者提出批评和建议，以便改进我们的工作，使教材质量不断提高。

编者的话

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础。因此，它是计算机科学与技术专业的核心、骨干课程。一方面，它给后继课，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等，提供必要的数学基础；另一方面，通过学习离散数学，培养和提高了学生的抽象思维和逻辑推理能力，为学生今后继续学习和工作，参加科学研究，攀登科技高峰，打下扎实的数学基础。

本书由11章组成。它们是命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构的基本概念及性质、半群与群、环与域、格与布尔代数、图的基本概念及矩阵表示，几类重要的图。

本书是编著者结合多年教学实践与科学研究，参考国内外教材，在力求通俗、简明、扼要的指导思想下编写而成的。在编写过程中有如下三点考虑：

1. 力图做到“少而精”，注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学，在定理证明中多次运用归纳法，希望读者了解定理的内容，同时应该掌握这一证明方法。

2. 在加强基本理论教学的同时，注意了分析问题、解决问题的技能培养和训练。书中各知识点均配有典型例子，并加以说明。此外，各章都配有适量的习题，希望通过做习题这个环节，来培养、提高学生解决问题的能力和技能。

3. 一方面每章有各自独立性，教师根据需要可以单独选讲几章；另一方面，尽可能注意各章之间联系，规范并统一了符号和术语。

本书在编写过程中，得到张华工程师的支持和帮助，在此表示深深的谢意。

限于作者水平，书中难免有不当和疏漏之处，请读者批评指正。

编　者

2002年2月

目　　录

第一章　命题逻辑

命题逻辑,也称命题演算,记为 Ls。它与谓词逻辑构成数理逻辑的基础,而命题逻辑又是谓词逻辑的基础。数理逻辑是用数学方法即通过引入表意符号研究推理的学问。因此,数理逻辑又名为符号逻辑。

命题逻辑是研究由命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。那么,什么是命题?如何表示和构成?如何进行推理?下面逐一地进行讨论。

1.1　命题与联结词

1. 命题的概念

所谓命题,是指具有非真必假的陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等因都不能判断其真假,故都不是命题。命题仅有两种可能的真值—真和假,且二者只能居其一。真用 1 或 T 表示,假用 0 或 F 表示。由于命题只有两种真值,所以称这种逻辑为二值逻辑。命题的真值是具有客观性质的,而不是由人的主观决定的。

如果一陈述句再也不能分解成更为简单的语句,由它构成的命题称为原子命题。原子命题是命题逻辑的基本单位。

我们来看看下列语句:

(1) 6 是整数。

(2) 地球是方的。

(3) $3+5=8$。

(4) 金星的表面温度是 800℉。

(5) 请勿吸烟!

(6) 你去书店吗?

(7) 今天天气真好!

(8) 本命题是假的。

显然,(1)～(4)都是命题,(1)和(3)的真值为真,(2)真值是假,而(4)目前尚不知真和假,但不久的将来,人能确定其真或假。(5)～(7)都不是命题,因为它们分别是祈使句、疑问句和感叹句,不能判断其真假。(8)无法确定它的真值,当“本命题”假时,它便真;当“本命题”真时,

它便假。这种断言叫悖论。

命题分为两类,第一类是原子命题,原子命题用大写英文字母 $P,Q,R\cdots$ 及其带下标的 $P_i,Q_i,R_i,\cdots$ 表示。例如,用 P 表示大连是一座美丽的城市,记为 P:大连是一座美丽的城市。冒号(:)代表表示的意思,下同。

第二类是复合命题,它由原子命题、命题联结词和圆括号组成。什么是命题联结词?下面就来定义5个常用命题联结词。

2. 命题联结词

定义 1.1.1　设 P 表示一个命题,由命题联结词$\neg$和命题 P 连接成$\neg P$,称$\neg P$ 为 P 的否定式复合命题,$\neg P$ 读"非 P"。称$\neg$为否定联结词。$\neg P$ 是真,当且仅当 P 为假;$\neg P$ 是假,当且仅当 P 为真。否定联结词"$\neg$"的定义可由表 1.1.1 表示之。

表 1.1.1　　**$\neg$的定义**

P	$\neg P$
1	0
0	1

例 1.1.1　举例说明如何构成命题的否定。

解　令命题

P:大连是一座美丽的城市。

于是命题的否定为

$\neg P$:大连不是一座美丽的城市。

可见,"否定"修改了命题,它是对单个命题进行操作,称它为一元联结词。

定义 1.1.2　设 P 和 Q 为两个命题,由命题联结词$\wedge$将 P 和 Q 连接成$P\wedge Q$,称 $P\wedge Q$ 为命题 P 和 Q 的合取式复合命题,$P\wedge Q$ 读做"P 与 Q",或"P 且 Q"。称$\wedge$为合取联结词。

当且仅当 P 和 Q 的真值同为真,命题 $P\wedge Q$ 的真值才为真;否则,$P\wedge Q$ 的真值为假。合取联结词$\wedge$的定义由表 1.1.2 表示之。

表 1.1.2　　**$\wedge$的定义**

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.1.2　用合取联结词表示命题:我们踢足球,他们在游泳。

解　P:我们踢足球。

Q:他们在游泳。

本例可表成：$P \wedge Q$。

在日常生活中，常将"合取"表示具有某种关系的两个命题；但在命题逻辑中则不尽然，允许用于两个相互无关的原子命题。例如，可用原子命题"P：今天天晴"和"Q：三加三等于六"，构成复合命题 $P \wedge Q$，其意义是

今天天晴且三加三等于六。

这在日常生活中会认为不通事理，而在逻辑学中是允许的。

定义 1.1.3 设 P 和 Q 为两个命题，由命题联结词 $\vee$ 把 P 和 Q 连接成 $P \vee Q$，称 $P \vee Q$ 为命题 P 和 Q 的析取式复合命题，$P \vee Q$ 读做"P 或 Q"。称 $\vee$ 为析取联结词。

当且仅当 P 和 Q 的真值同为假，$P \vee Q$ 的真值为假；否则，$P \vee Q$ 的真值为真。析取联结词 $\vee$ 的定义由表 1.1.3 表示之。

表 1.1.3 **$\vee$ 的定义**

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由定义可知，析取联结词表示"可兼和"，"不可兼和"另有别的联结词定义之。

例 1.1.3 用析取联结词表示命题：灯泡有故障或开关有故障。

解 令 P：灯泡有故障。

Q：开关有故障。

本例可表成：$P \vee Q$。这里是说，或者灯泡有故障，或者开关有故障，或者二者都有故障，显然是"可兼和"。

与合取联结词一样，使用析取联结词时，也不要求两命题间一定有任何关系，有关例子就不再给出了。

定义 1.1.4 设 P 和 Q 为两个命题，由命题联结词 $\rightarrow$ 把 P 和 Q 连接成 $P \rightarrow Q$，称 $P \rightarrow Q$ 为命题 P 和 Q 的条件式复合命题，简称条件命题。$P \rightarrow Q$ 读做"P 条件 Q"或者"若 P 则 Q"。称 $\rightarrow$ 为条件联结词。

当 P 的真值为真而 Q 的真值为假时，命题 $P \rightarrow Q$ 的真值为假；否则，$P \rightarrow Q$ 的真值为真。条件联结词 $\rightarrow$ 的定义由表 1.1.4 表示之。

表 1.1.4 **$\rightarrow$ 的定义**

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在条件命题 $P \to Q$ 中,命题 P 称为 $P \to Q$ 的前件或前提,命题 Q 称为 $P \to Q$ 的后件或结论。条件命题 $P \to Q$ 有多种方式陈述:

"如果 P,那么 Q";"P 仅当 Q";"Q 每当 P";"P 是 Q 的充分条件";"Q 是 P 的必要条件"等。

例 1.1.4 用条件联结词表示下列命题:

① 如果他是大学生,那么他会一门外语。

② 如果雪是黑色的,那么三乘三等于九。

解 令 P:他是大学生,Q:他会一门外语,R:雪是黑色的,S:三乘三等于九。

① 可表成:$P \to Q$,

② 可表成:$R \to S$。

在日常生活中,用条件式表示前提和结论之间的因果或实质关系,如例 1.1.4 中的①,这种条件式称为形式条件命题。然而在命题逻辑中,一个条件式的前提并不要求与结论有任何关系,这种条件式称为实质条件命题。如例 1.1.4 中的②,雪是黑色的与三乘三等于九之间没有因果和实质关系存在,但条件式 $R \to S$ 是真,因为前提是假而结论是真。采用实质条件式作定义,不单是出于"善意推断",主要是因为前提与结论间有无因果和实质关系难以区分,而且实质条件式已包含了形式条件式,更便于应用。

定义 1.1.5 令 P、Q 是两个命题,由命题联结词 $\leftrightarrow$ 把 P 和 Q 连接成 $P \leftrightarrow Q$,称 $P \leftrightarrow Q$ 为命题 P 和 Q 的双条件式复合命题,简称双条件命题,$P \leftrightarrow Q$ 读做"P 当且仅当 Q",或"P 等价 Q"。称 $\leftrightarrow$ 为双条件联结词。

当 P 和 Q 的真值相同时,$P \leftrightarrow Q$ 的真值为真;否则,$P \leftrightarrow Q$ 的真值为假。双条件联结词 $\leftrightarrow$ 的定义由表 1.1.5 表示之。

表 1.1.5 **$\leftrightarrow$ 的定义**

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.1.5 用双条件联结词表示下列命题:① 三角形是等腰三角形当且仅当三角形两底角相等。

② 骗子讲真理当且仅当太阳从西方升起。

解 令 P:三角形是等腰三角形,Q:三角形两底角相等,R:骗子讲真理,S:太阳从西方升起。

① 可表成:$P \leftrightarrow Q$,

② 可表成:$R \leftrightarrow S$。

在本节结束时,应强调指出的是:复合命题的真值只取决于各原子命题的真值,而与它们的内容、含义无关,与原子命题之间是否有关系无关。理解和掌握这一点是至关重要的,请读

者认真去领会。

1.2　命题变元和合式公式

1. 命题变元

在命题逻辑中，命题又有命题常元和命题变元之分。一个确定的具体的命题，称为命题常元；一个不确定的泛指的任意命题，称为命题变元。显然，命题变元不是命题，只有用一个特定的命题取代才能确定它的真值：真或假。这时也说对该命题变元指派真值。命题常元和命题变元均可用字母 P 等表示。由于在命题逻辑中并不关心具体命题的涵义，只关心其真值，因此，可以形式地定义它们如下：

定义 1.2.1　以真或1、假或0为其变域的变元，称为命题变元；真或 1、假或 0 称为命题常元。

2. 合式公式

通常把含有命题变元的断言称为命题公式。但这没能指出命题公式的结构，因为不是所有由命题变元、联结词和括号所组成的字符串都能成为命题公式。为此常使用归纳定义命题公式，以便构成的公式有规则可循。由这种定义产生的公式称为合式公式。

定义 1.2.2　单个命题变元和命题常元称为原子命题公式，简称原子公式。

定义 1.2.3　合式公式是由下列规则生成的公式：

① 单个原子公式是合式公式。

② 若 A 是一个合式公式，则$(\neg A)$也是一个合式公式。

③ 若 A、B 是合式公式，则$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式。

④ 只有有限次使用①、②和③生成的公式才是合式公式。

例 1.2.1　说明$(P\rightarrow(Q\vee R))$是合式公式。

解　(1) Q 是合式公式　　根据规则①

(2) R 是合式公式　　根据规则①

(3) $(Q\vee R)$是合式公式　　根据(1)、(2)和规则③

(4) $(Q\rightarrow(Q\vee R))$是合式公式　　根据(1)、(3)和规则③

显然那些不能由定义中指出的规则生成的字符串，均不是合式公式，如下列字符串：

① $\neg P\wedge Q$

② $P\rightarrow(\wedge Q)$

③ $(P\rightarrow Q$

当合式公式比较复杂时，常常使用很多圆括号，为了减少圆括号的使用量，可作以下约定：

① 规定联结词的优先级由高到低的次序为：

$$\neg、\wedge、\vee、\rightarrow、\leftrightarrow$$

② 相同的联结词按从左至右次序计算时，圆括号可省略。

③ 最外层的圆括号可以省略。

例如，$(\neg((P\wedge Q)\vee(\neg R))\to((P\vee Q)\vee R))$

可写成：

$$\neg(P\wedge Q\vee(\neg R)\to P\vee Q\vee R$$

但有时为了看起来清楚醒目，也常常保留某些原可省去的圆括号。

为了方便计，合式公式也简称公式。

3. 公式真值表

对于含有命题变元的公式，因它不能确定其真假，故该公式不是命题。但对公式中出现的每一个命题变元指派一真值，称该组真值为公式的一个指派。对于每个指派，公式确定一个真值。若公式确定真值，称该指派为成真指派；否则，称为成假指派。对于所有的指派及相应的公式真值即组成了该公式的真值表。下面正式给出公式真值表的定义。

定义 1.2.4 对于公式中命题变元的每一种可能的真值指派，以及由它们确定出的公式真值所列成的表，称为该公式的真值表。

由本定义可知，在先前命题联结词定义中所给出的各表，都是真值表，即相应地称为各命题联结词真值表。

定义 1.2.5 如果 B 是公式 A 中的一部分，且 B 为公式，则称 B 是公式 A 的子公式。

例如，设 A 为 $(P\to Q)\wedge\neg R$，则 $\neg R$，$P\to Q$ 等都是 A 的子公式。

下面用例子说明公式真值表的构造方法。

例 1.2.2 构造公式 $P\to(Q\wedge\neg P)$ 的真值表。

解 该公式含有两个命题变元 P 和 Q，它们一共有 4 种指派，分别为：0 0、0 1、1 0、1 1。对此 4 种指派，依据联结词的定义及其优先级和括号，逐步求出各子公式直至给定公式的真值。详见下表：

P	Q	P	$\to$	$(Q$	$\wedge$	$\neg P)$
0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
步	骤	④	⑤	②	③	①

其中①、②、③和④是求各子公式真值的次序，⑤为给定公式的真值。

用归纳法不难证明，对于含有 n 个命题变元的公式，有 2^n 个真值指派，即在该公式的真值表中有 2^n 行。

为方便构造真值表，特约定如下：

① 命题变元按字典序排列。

② 对每个指派，以二进制数从小到大或从大到小顺序列出。

③ 若公式较复杂，可先列出各子公式的真值(若有括号，则应从里层向外层展开)，最后列出所求公式的真值。

4. 命题的符号化

把一个用文字叙述的命题相应地写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的合式公式，称为命题的符号化。符号化应该注意下列事项：

① 确定给定句子是否为命题。

② 句子中连词是否为命题联结词。

③ 要正确地表示原子命题和适当选择命题联结词。

例 1.2.3 张明正在睡觉或游泳。

解 此例可改叙为"张明在睡觉而没游泳，或者张明在游泳而没睡觉。"可知其中的"或者"是可兼或，因此可用析取式复合命题表示。

令 P：张明在睡觉，Q：张明在游泳，则该例符号化为$(P\wedge \neg Q)\vee(Q\wedge \neg P)$。

例 1.2.4 符号化下列命题：

① 他既聪明又用功。

② 他虽聪明但不用功。

③ 除非你努力，否则你将失败。

④ 除非天气好，我才骑自行车上班。

⑤ 小王晚上要回家，除非下大雨。

⑥ 只有睡觉才能恢复疲劳。

⑦ 只要我还有口气，我就要战斗。

⑧ A 中没有元素，A 就是空集。

⑨ 张明或者李强都可以做这件事。

⑩ 张明和李强都做这件事了。

解 ① 符号化为 $P\wedge Q$，其中 P：他聪明，Q：他用功。② 符号化为 $P\wedge \neg Q$，其中 P 和 Q 同①。③ 符号化为$\neg P\rightarrow Q$，其中 P：你努力，Q：你将失败。④ 符号化为 $P\rightarrow Q$，其中 Q：天气好，P：我骑自行车上班。⑤ 符号化为$\neg Q\rightarrow P$，其中 P：小王晚上要回家，Q：下大雨。⑥ 符号化为 $Q\rightarrow P$，其中 P：睡觉，Q：恢复疲劳。⑦ 符号化为 $P\rightarrow Q$，其中 P：我还有口气，Q：我要战斗。⑧ 符号化为 $P\rightleftarrows Q$，其中 P：A 中没有元素，Q：A 是空集。⑨ 符号化为 $P\vee Q$，其中 P：张明可以做这件事，Q：李强可以做这件事。⑩ 符号化为 $P\wedge Q$，其中 P,Q 同⑨。

例 1.2.5 试讨论"这盆花盛开，促使那些蜜蜂来采蜜"符号化。

解 连词"促使"并非是联结词，因为由它构成的复合命题的真值不能完全由构成它的原子命题的真值来确定。令 P："这盆花盛开"，其值为 T，Q："那些蜜蜂来采蜜"，其值为 T，则"这盆花盛开，促使那些蜜蜂来采蜜"为 T；又令 P："海水是咸的"值为 T，Q："那些蜜蜂来采蜜"值为 T，则"海水是咸的，促使那些蜜蜂来采蜜"值为 F，可见两组原子命题都为 T，但由连词"促使"构成的复合命题的值，一个为 T，一个为 F，这不符合逻辑联结词的真值规定。不是逻辑联结词构成的复合命题，不能翻译成合式公式，即不能符号化。

命题符号化是很重要的，一定要掌握好，在命题推理中常常最先遇到的就是符号化一个问题，解决不好，等于说推理的首要前提没有了。

1.3 公式分类与等价公式

1. 公式分类

定义 1.3.1 设 A 为任意公式,则

① 对应每一个指派,公式 A 均相应确定真值为真,称 A 为重言式,或永真式。

② 对应每一个指派,公式 A 均相应确定真值为假,称 A 为矛盾式,或永假式。

③ 至少存在一个指派,公式 A 相应确定真值为真,称 A 为可满足式。

由定义可知,重言式必是可满足式,反之一般不真。

重点将研究重言式,它最有用,因为它有以下特点:

① 重言式的否定是矛盾式,矛盾式的否定是重言式,这样只研究其一就可以了。

② 两重言式的合取式、析取式、条件式和双条件式等都仍是重言式。于是,由简单的重言式可构造出复杂的重言式。

③ 由重言式使用公认的规则可以产生许多有用等价式和蕴涵式。

判定给定公式是否为永真式、永假式或可满足式的问题,称为给定公式的判定问题。

在 Ls 中,由于任何一个命题公式的指派数目总是有限的,所以 Ls 的判定问题是可解的。其判定方法有真值表法和公式推演法。

例 1.3.1 用真值表判定公式$\urcorner(\urcorner P\rightarrow Q)\wedge P$ 是永真式、永假式还是可满足式。

解

P Q	$\urcorner$	($\urcorner P$	$\rightarrow Q$)	$\wedge P$
0 0	1	1	0	0
0 1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	0	1	0
步 骤	③	①	②	④

可见,$\urcorner(\urcorner P\rightarrow Q)\wedge P$ 为永假式。

可以指出,当给定公式中命题变元较多时,或公式本身较为复杂时,用真值表法解决公式判定问题是很麻烦的,然而它总是可行的。

在公式间,尽管它们结构形式不同,然而它们的真值表可能完全相同,看下例:

例 1.3.2 列出公式 $P\rightarrow Q$ 与$\urcorner P\vee Q$ 的真值表。

解

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg P$	$\vee$	Q
0	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	
1	1	1	0	1	
步骤		①	①	②	

可知,两公式的真值表是相同的。

2. 等价公式

从例 1.3.2 可知,的确有一些公式,它们的真值表是相同的,也就是说,同一个真值表可能会代表许多公式。这样,又可以按真值表是否相同来对公式进行分类。同一类中的公式之间,它们彼此是等价的。下面正式给出两个公式是等价的定义。

定义 1.3.2 设 A 和 B 是两个命题公式,如果 A、B 在其任意指派下,其真值都是相同的,则称 A 和 B 是等价的,或逻辑相等,记作 $A\Leftrightarrow B$,读作 A 等价 B,称 $A\Leftrightarrow B$ 为等价式。

显然,若公式 A 和 B 的真值表是相同的,则 A 和 B 等价。因此,验证两公式是否等价,只需做出它们的真值表即可。

例 1.3.3 证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

证明 列出真值表如下:

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$(P\rightarrow Q)$	$\wedge$	$(Q\rightarrow P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1
步骤		①	①	②	①

可见,$P\leftrightarrow Q$ 和$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$真值表相同,得证。

读者也不难验证下列等价式:

① $P\Leftrightarrow\neg\neg P$ ② $P\vee P\Leftrightarrow P$ ③ $(P\vee\neg P)\wedge Q\Leftrightarrow Q$ ④ $P\vee\neg P\Leftrightarrow Q\vee\neg Q$

由此可见,两公式等价,不一定是含相同的命题变元。

现在继续本节开始的讨论,对于含有 n 个命题变元的命题公式,按真值表是否相同去分类,能够划分多少类命题公式?显然,对于给定的问题,只要能够确定构成多少个不同的真值表即可。因为对于含有 n 个命题变元的命题公式,可有 2^n 种指派,或者说可做成的真值表会有 2^n 行,而对于每一个指派或者说对于每一行,命题公式都取得真值或者真或者假的两种可能,所以,n 个命题变元的命题公式共可以构成 2^{2^n} 个不同的真值表,即是说,含有 n 个命题变