

高等学校通用教材

结构力学

龚尧南 编著



北京航空航天大学出版社

<http://www.buaapress.com.cn>

内 容 简 介

本书以杆系结构和薄壁结构为研究对象,讨论结构的构造原理、结构分析的基本理论和方法。首先介绍结构分析中的能量驻值原理以及它在位移和应力分析中的应用。在此基础上,由浅入深地由杆系结构到薄壁加筋结构,逐步讨论结构的功能及其组成、载荷在结构中的传递以及结构在传递载荷时所经受的变形和内力的分析方法。本书从传力的观点出发,讨论结构的合理组成以及应该如何安排(设计)结构各元件的刚度,以实现预定的传力路线。本书还着重讨论了加筋薄壁结构中的一些特殊问题,如限制弯曲与限制扭转问题、大开口与参差弯曲问题、结构不连续与由此引发的力的扩散和参与受力问题、大锥度与斜支持问题,等等。本书是为航空航天院校飞行器结构设计与工程力学专业本科生编写的专业教材;但对于其它(如机械工程和土木工程等)专业的本科生,在学习结构力学课程时也可供参考;还可供从事上述各类专业的工程技术人员、大专院校教师和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/龚尧南编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2001.9

ISBN 7-81077-080-2

I. 结... I. 龚... III. 结构力学 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045150 号

结构力学

龚尧南 编著

责任编辑 马广云

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号 邮编:100083 发行部电话:(010)82317024

<http://www.buaapress.com.cn>

E-mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

北京宏文印刷厂印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:346 千字

2001 年 9 月第 1 版 2002 年 2 月第 2 次印刷 印数:1 001~6 000 册

ISBN 7-81077-080-2/O·005 定价:16.00 元

序 言

1. 本书的内容安排

本书是《结构力学基础》(航空工业出版社, 龚尧南编, 1993年11月第1版)的修订版, 并按照新版培养计划中课程名称, 相应地将书名改为《结构力学》。《结构力学基础》是原航空工业部航空院校结构力学课程的统编教材。编写该教材的主要目的和指导思想, 是为了突破此前类似教材的内容和写法主要集中在教给学生如何分析一个已有的结构, 而基本上没有涉及如何根据结构原理从力学上去设计一个结构。《结构力学基础》一书的书稿曾请胡海昌院士和龙驭球院士审阅。

《结构力学基础》一书出版后, 经过在6届设计专业学生中试用, 说明基本上是适用的。1999年初, 当此教材初版告罄而2000年版培养计划又开始拟订时, 其改写任务又落在编者的肩上。因此, 本书基本上是按照2000年版培养计划中《结构力学课程教学大纲》的教学要求和内容安排进行编写的。在这份新的教学大纲中, 在削减课程课内学时数的同时, 还要求将弹性力学、结构力学、板壳学和有限元素法的基本内容有机地结合在一起, 并加进了“结构的振动”一章。另外, 虽然本教材原来(在第1版)编写时所针对的读者是航空航天院校设计专业的学生, 但是作者相信, 由于本教材内容的基础性和通用性, 它同样适用于其它工科院校工程类专业的本科学生。对于这些学生来说, 他们的使命是使用力学而不是发展力学, 因此, 掌握求解力学问题的现代方法(如有限元素法)同样是十分必要的。在本书中加入有限元素法的基础内容, 其目的之一是, 希望在有条件的情况下, 培养学生用有限元素法的理论和算法(通过常用的分析软件)来求解本书中的习题。这种能力的培养, 不仅减少了学生做习题的时间, 使学生能将更多的时间放在研究结构理论上, 而且, 对于以后没有机会专门修读有限元素法课程的学生来说, 加强并提高利用现代计算工具解决实际工程问题的能力, 在以后的工作过程中无疑会提高工作质量和效率。

2. 结构的主要功能——承力与传力

结构的主要功能在于支承和传递外载荷到反作用点。在土木工程中, 地面基础与结构的连接点就是反作用点。但对在空中或太空航行的飞行器来说, 反作用点的概念并不是必需的, 而且如果需要, 这些反作用点是可以根据具体情况人为地任意选取的。在设计和分析结构时, 除外载荷外, 有时还须考虑已知温度环境和其它物理环境对结构的影响。

因此, 在结构设计师看来, 结构是一些用于传力的元件和构件的综合, 不同的综合方式就形成了不同的传力路线, 或者体现了某种设计思想或设计概念。结构

设计师的任务就是通过他的综合来实现他所希望的传力路线(传力方式或承力方式)。虽然结构设计的最终目的是给出一个结构,即满足特定使用要求并受特定设计准则和使用条件所支配的结构综合,而不是分析一个给定形式的结构;但为了尽可能完美地达到最终目的,对承受已知静力和动力载荷、位移约束、温度环境以及使用条件的给定结构进行分析,是必不可少的,也是结构设计师最关心的重要事项之一。这里所说的结构设计师的含义是广义的,既包括总体设计和细节设计的人员,也包括结构分析(强度设计)人员。

所设计的结构,可以只含一条单一的传力路线,也可以含多条传力路线。从安全性的角度看,传力路线愈多,结构愈安全。在这种结构中,如果其中有一条传力路线遭到破坏,结构仍能保持一定的传力功能。在术语中称这样的结构为“破损-安全”结构。真正的单一传力路线结构是极少见的,多数实际结构是多传力路线的结构。当然,多传力路线结构的设计和分析比单一传力路线结构的要复杂和困难得多。

随着科学技术的飞速进步和已经取得的巨大成果,人们对飞行器提出了愈来愈高的要求,如操纵性和机动性、结构、重量^①、寿命、可靠性、工艺性、维修性和经济性等。飞机结构的形式日趋复杂,新材料和新工艺不断涌现。这一切都要求结构分析方法具有更高的精确度和计算效率。于是,在这样的形势下,人们提出了许多(而且仍在不断涌现)高效率和高精度的分析方法。本课程的另一个目的,就是为学习这些更高深的结构分析方法打下必要的基础,但不涉及这些先进分析方法更深入的内容。因此,希望在学习本课程时,一方面要注意掌握结构力学的基本理论、基本规律以及分析结构的几种基本方法;另一方面要注意了解各种不同型式结构的传力特点以及结构的设计参数对传力特性和传力路线的影响。若能掌握将实际结构理想化并使之成为合理的计算模型的能力,那就更好了。

我们相信,在已经具备这些基本知识和能力以后,再来学习和应用各种现代的、先进的结构分析方法(例如有限元素法等),将不会是一件困难的事。

3. 结构分析与结构力学的任务

分析结构的目的是,一方面是为了了解结构在已知外载荷、位移约束以及温度环境下的变形和应力状态,检验它是否满足各种设计准则;另一方面,通过对结构进行分析,还可以获知设计的结果是否与设计意图(即设计要求)相符。附加的也是十分重要的一项收获是,通过对分析结果的研究,可以了解并掌握各设计参数对结构各种响应(如位移、应力、固有频率等)的影响和敏感程度,从而使设计者能在以后的设计中主动调节各种参数以有效地达到预期的设计目标。

^① 在GB 3102.3—93中,重量是物体在特定参考系中获得其加速度等于当地自由落体加速度时的力。质量在SI单位制中是7个基本量之一,单位为kg。但在我国航空部门,“质量”一词用于说明产品或工作的好坏、优劣,认为“质量”为航空工业的“生命”,故本书中,除第六章(涉及计算惯性力)外,其它部分的内容均以“重量”代替SI单位制中的“质量”。

在设计工作的开始(即草图设计阶段),人们总是凭借过去设计类似结构的经验,再加上比较简单的分析计算来设计结构。有了具体的初步设计方案(图纸)以后,再对所设计的结构作详细分析,检查它是否满足全部必须满足的设计准则,如结构的强度和刚度要求、气动弹性力学要求、寿命和可靠性要求等。在用分析结果对原设计进行检验之后,再对结构设计进行必要的修改。于是,再分析修改后的结构,并用分析结果重新检验。如此继续下去,直至得出满意的设计为止。一个航空航天器的理想结构应该能满足全部有关的设计准则而又重量最轻。当然,在设计过程中以及按最终设计图纸制造成实际结构以后,都还要进行一系列的必要的实验进行验证。

以上提到的各项分析内容,并不是结构力学这门课程所能独立完成的。结构力学是(也仅仅是)一门研究结构在外载荷作用下的变形和受力(传力)规律的科学。它和材料力学、板壳学等相近学科一样,都是以弹性力学作为本门学科的基础的。这些不同但又相近的学科,它们之间的差异只是由于所研究对象的几何特征不同以及在力学上的特征不同,因而,采用了不同的假设和前提,导致了不同的分析方法。如前所述,在研究结构时,把结构看成是一些受力元件和构件的综合,因此在结构力学中,总是用一个理想化的(不包含非受力件和无足轻重的受力件)计算模型来替代真实结构。计算模型应能最大程度地体现原结构的重要力学特征。计算模型由具有已知弹性特性和几何特性的、有限尺寸的、理想化的受力元件组成。当这些元件按一定规则(如几何不变性和不可移动性的组成规则)组装在一起时,它们应能提供(或基本上提供)真实结构应有的静力和动力特性。在本课程中,重点讨论静力学问题,并把相当一部分注意力放在研究力的传递问题上,同时也对动力学问题作必要的讨论。

4. 如何使用本教材

在1999年6月本书编写工作正在进行的时候,全国教育工作会议召开并发表了《中共中央、国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》,提出了“以培养学生的创新精神和实践能力为重点”,“智育工作要转变教育观念,改革人才培养模式,积极实行启发式和讨论式教学,激发学生独立思考和创新的意识”,“理解知识产生和发展的过程”,“培养学生的科学精神和创新思维习惯,重视培养学生收集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力”。因此,本教材在编写时,一方面尽量做到适合新的教学大纲对学习内容的要求;另一方面又不局限于教学大纲所规定的基本内容,而是按照因材施教的原则,在这些内容之外作适当的扩充,使有能力和兴趣的学生可以在课外进一步深化和扩充自己的知识。同时,本教材在编写方式上也尽力按适合学生自学、培养学生获取知识和收集处理信息的能力这一方向去努力。教师要将本教材的内容全部在有限的课堂时数内作详细讲解是不可能的,也是不适当的。希望教师在讲授中着重问题的提出,注

意讲解基础理论以及重要的基本概念和结论,并引导学生在课后认真自学,积极思考,并努力应用这些概念、理论和方法去解决一些结构设计与分析的实际问题,在实践中进一步深化对这些知识的理解。同时,作者也希望有条件的任课教师尽可能指导学生使用有限元分析软件计算习题,把更多的时间和精力放在结构的传力路线设计和分析上。

虽然本书在编写时是朝这个方向努力的,但限于水平,仍然难免有不当之处,热诚地希望使用本书的师生提出宝贵意见。

5. 致 谢

在本书的改写过程中,作者得到了北京航空航天大学教务处、飞行器设计与应用力学系、宇航学院等单位有关领导及教师的热情支持和帮助,特别是燕瑛教授、成传贤教授和张玉珠教授的关心和支持。燕瑛教授使用本教材讲授结构力学课程达6届之多。她根据授课过程中发现的问题(包括印刷上的问题),并结合新版培养计划对课程的要求,对本书的改写工作提出了许多中肯而又有价值的意见。成传贤教授也使用本教材为学生授课,并在授课过程中仔细核查了全部公式。张玉珠教授认真阅读了本教材的书稿。北京航空航天大学教务处的泰安琳同志为本书的出版做了许多组织工作,在此,作者谨向他们表示衷心的感谢。

作 者

2000年5月于北京

目 录

第一章 弹性力学基础及变分原理	(1)
1.1 变分原理	(1)
1.1.1 定积分 $\int_a^b F(x, y, y')dx$ 的驻立值问题	(2)
1.1.2 自然边界条件	(4)
1.1.3 涉及高阶导数的定积分的驻立值问题	(5)
1.2 弹性力学的基本方程	(8)
1.3 应变能和余应变能	(11)
1.4 格林恒等式	(12)
1.5 虚功原理(虚位移原理)	(13)
1.6 最小势能原理	(15)
1.7 最小应变能原理	(20)
1.8 单位位移定理	(21)
1.9 余虚功原理(虚力原理)	(22)
1.10 最小余能原理	(23)
1.11 变形结构的最小余应变能原理	(24)
1.12 单位载荷定理	(27)
1.13 叠加原理	(30)
1.14 互换定理	(31)
参考文献	(32)
习 题	(32)
第二章 杆系结构的计算	(34)
2.1 结构与结构的传力	(34)
2.2 杆系结构和系统	(35)
2.3 桁架结构的几何不变性和静力分析	(37)
2.3.1 判断几何不变性的运动学方法	(37)
2.3.2 判断几何不变性的静力学方法	(41)
2.3.3 静定桁架的分析	(44)
2.4 刚架结构的几何不变性和静力分析	(48)
2.5 静定混合杆系的内力	(52)
2.6 静不定结构的内力和变形	(53)
2.6.1 力法的正则方程	(53)
2.6.2 力法原理	(57)
2.6.3 对称定律	(63)
2.6.4 静不定结构的变形计算	(65)

2.6.5 静不定结构分析小结	(66)
2.7 位移法	(67)
2.7.1 位移法的一般原理	(67)
2.7.2 位移法的应用	(69)
2.8 有限元素法	(71)
2.8.1 桁架结构的有限元分析	(71)
2.8.2 刚架结构的有限元分析	(75)
参考文献	(76)
习 题	(77)
第三章 薄壁结构的构造与传力——板与壳	(79)
3.1 作用在结构及其元件上的载荷	(79)
3.2 结构元件的功用	(80)
3.2.1 机 翼	(81)
3.2.2 机 身	(83)
3.3 结构的理想化与计算模型	(84)
3.4 薄板弯曲的基本方程	(89)
3.5 典型的边界条件	(93)
3.6 坐标旋转引起的变换	(94)
3.7 四边简支方板的小挠度分析	(95)
3.8 四边简支矩形板受轴压时的稳定性	(96)
3.9 加筋板的受压强度——等效宽度	(99)
3.10 圆板在均布载荷作用下的弯曲	(101)
3.11 圆板在分布法向载荷作用下的小挠度解	(102)
3.11.1 在均布法向载荷作用下的圆盘	(103)
3.11.2 均布载荷的情况——铰支边	(103)
3.11.3 均布载荷的情况——固支边	(104)
3.12 壳体在分布法向载荷作用下的解	(104)
3.13 高压容器的分析	(107)
参考文献	(109)
第四章 加筋薄壁结构计算的工程梁理论	(110)
4.1 基本假设与定义	(110)
4.2 正应力的求法	(111)
4.2.1 减缩系数	(111)
4.2.2 正应力的计算	(112)
4.3 剪流的求法	(116)
4.3.1 剪流的计算公式	(116)
4.3.2 开剖面剪流的计算	(118)
4.3.3 开剖面的剪心和弯心	(121)
4.3.4 单闭室剖面剪流的计算	(122)

4.3.5 多闭室剖面由弯曲和扭转引起的剪流	(127)
4.4 确定剖面弯心的一般方法	(134)
4.5 加筋锥形壳的计算	(135)
4.6 锥形机翼的计算	(140)
参考文献	(142)
习 题	(142)
第五章 板杆组合型加筋薄壁结构的计算	(144)
5.1 定义与假设	(144)
5.2 加筋薄壁结构的理想化	(145)
5.3 杆和板的相互作用	(146)
5.3.1 具有等剖面杆的平面加筋板	(147)
5.3.2 具有等剖面杆且两端自由的平面加筋板	(151)
5.3.3 具有变剖面杆的平面加筋板	(152)
5.3.4 具有有限刚度横向加强件的加筋板	(154)
5.4 带纵向加强件的盒形梁	(157)
5.4.1 具有单长桁平直蒙皮的盒式梁	(157)
5.4.2 只有端部横向加强件的情况	(160)
5.4.3 具有几个隔板的盒式梁	(164)
5.5 限制弯曲与限制扭转	(166)
5.5.1 位移法	(168)
5.5.2 分析板杆结构的有限元素法	(173)
5.6 有限自由度的大开口问题	(177)
5.6.1 开口壳体的弯曲应力计算	(177)
5.6.2 开口壳体的扭转应力计算	(181)
5.7 根部斜支持效应	(184)
参考文献	(189)
习 题	(190)
第六章 结构的振动	(191)
6.1 结构振动的基本原理	(191)
6.2 梁的振动方程	(193)
6.2.1 变分列式	(193)
6.2.2 结构参数对振型及频率的影响	(194)
6.2.3 结构各阶振型的正交性	(195)
6.3 固有振动问题的有限元表述	(196)
6.4 结构的强迫振动	(200)
6.4.1 有阻尼的强迫振动	(200)
6.4.2 结构有阻尼强迫振动的数值解	(202)
6.4.3 中心差分解法	(202)
参考文献	(203)

第一章 弹性力学基础及变分原理

1.1 变分原理

在这一章中将讨论结构力学的数学和力学基础,即“弹性力学基础”和“变分原理”。

经典力学沿着两条不同的途径发展。一条是直接从牛顿定律出发,后来称之为向量力学(vectorial mechanics);另一条则起源于过去称为虚速度原理(principle of virtual velocities)的静力学定律,现在则称为虚功原理(principle of virtual work)或者虚位移原理(principle of virtual displacements)。这一原理的雏形是由达芬奇(Leonardo da Vinci, 1452—1519)提出的,它的起源则可以追溯到古代。伯努利(Jean Bernoulli, 1667—1748)首次给出虚功原理的一般数学表达形式,这种形式几乎适用于所有的力学系统。同时,在18世纪,应用虚功原理所需的数学工具也取得了长足进步。法国科学家拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)在这方面作出了很大贡献,提出了以位移为自变函数的最小势能原理;他所写的《分析力学》一书是关于力学中的能量原理的经典著作^[1]。1873—1879年间,意大利的A. Castigliano建立了弹性力学中的最小余能原理。本教材将以能量原理作为全部讲授内容的基础。

变分原理是许多理论研究和近似方法的根据和出发点。由于变分原理涉及弹性力学的许多基本问题,因此,变分原理是弹性力学的重要组成部分,变分法则是弹性力学的重要数学基础之一。变分原理是许多理论研究和近似方法的根据和出发点。经典变分原理是指最小势能原理和最小余能原理。最小势能原理以位移为自变函数,事先要精确满足连续条件和本构关系,在弹性体的总势能取驻立值时满足平衡条件;最小余能原理以应力为自变函数,事先要精确满足平衡条件和本构关系,在弹性体总余能取驻立值时满足连续条件。如果求得了某一力学问题的近似泛函驻立值,也就得到了该问题的一个近似解。这种求近似解的方法要比直接求微分方程(即原问题的数学模型)的近似解要容易、可行得多。著名的Rayleigh-Ritz法(1877—1908)就是在此基础上发展起来并通过泛函驻立值条件求解未知函数的最早的一种近似方法。

在高等数学中已经讲述过求函数的极值问题。但是,在弹性力学中,要用到一类更广泛的极值问题,即泛函的极值问题。举一个简单的例子,设有一安放在弹性地基上的梁,承受横向分布载荷 $q(x)$ 的作用。已知梁的一端($x=0$)是固定的,另一端($x=L$)是自由的。问:梁取怎样的挠度 $w(x)$ 才能使这个系统(系统是指梁、地基和载荷的总和)的总势能 Π 取最小值?设梁的弯曲刚度为 EJ (E 为材料的弹性模量, J 为主惯性矩),于是,由材料力学可知,梁的弯曲应变能 Π_b 为

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx$$

再设弹性地基的刚度为 κ ,于是,地基中由于梁的挠度而贮存的能量 Π_i 为

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa [w(x)]^2 dx$$

由于梁的挠度,载荷随之下降而使载荷的势能有了变化。载荷势能 Π_q 的变化可以写成

$$\Pi_q = \int_0^L q(x)w(x)dx$$

系统的总势能 Π (即上列 3 者之和)为

$$\Pi = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EJ \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 + \frac{1}{2} \kappa [w(x)]^2 - q(x)w(x) \right\} dx$$

现在,上述力学问题已经转化为如下数学问题:在 $0 \leq x \leq L$ 的区间内,寻找一个函数 $w(x)$,使它满足边界条件:在 $x=0$ 处, $w(0)=0$, 一阶导数 $w'(0)=0$,并使由上述积分定义的泛函 Π 取最小值。但是,什么是泛函?

显然,梁的挠度 w 是随坐标 x 而变化的,即 $w=w(x)$,其中坐标 x 是自变量,挠度 w 则是在一定范围内可变化的函数,称 w 为自变函数。而梁的弯曲应变能 Π_b 、地基中贮存的能量 Π_t 、载荷的势能 Π_q 以及总势能 Π ,它们都是依赖于自变函数(挠度) $w=w(x)$ 的量。把这些依赖于自变函数的量称做泛函(functional)。在弹性力学中涉及的泛函,都是能用积分表达的,而且绝大多数被积函数(如 Π, Π_b)是自变函数及其导数的二次整式。人们称这一类的泛函为二次泛函。

要严格区分微分和变分本质上的差异。

我们知道,能够满足边界条件 $x=0$ 处 $w(0)=0$ 和它的一阶导数 $w'(0)=0$ 的自变函数 $w(x)$ 可以有无穷多个,但同时满足使泛函 Π 取最小值的 $w(x)$ 却只有一个,记为 $w^*(x)$ 。设在 $w^*(x)$ 的附近有另一曲线 $w(x)$,并令

$$w(x) = w^*(x) + \delta w(x)$$

式中: $\delta w(x)$ 是一无穷小量。称 $\delta w(x)$ 是自变函数 $w(x)$ 的变分。

因此,把约束条件所容许的各种可能的位移 $w(x)$ 与同时满足平衡条件和约束条件的位移 $w^*(x)$ 之间的偏差 $\delta w(x)$,或者更一般地, $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$,称做虚位移。实际上,它们就是真实位移状态的变分。以后在虚力原理和最小余能原理等的介绍中,还将研究真实应力状态的偏差 $\delta \sigma_{ii}, \delta \gamma_{ij}$ 以及真实内力状态的偏差 $\delta M^*, \delta Q^*$ 。实际上,它们就是真实应(内)力状态的变分。现在,将直接应用变分法来研究如何把求泛函驻立值(极值)的问题转化为求解微分方程的问题。变分法的早期研究都是属于这一类问题,经过欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)和随后的许多数学工作者的努力,对这一类问题已经建立起一套比较成熟的系统解法。本教材的第五章中,在求解弹性结构的应力和位移问题时,采用的就是这种方法。

1.1.1 定积分 $\int_a^b F(x, y, y') dx$ 的驻立值问题^[1]

研究如下的问题:在自变量的区间 $a \leq x \leq b$ 内,确定函数 $y(x)$,使它满足边界条件:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (1-1)$$

并使泛函

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

取极值。在图 1.1 中, $G(a, \alpha)$ 和 $H(b, \beta)$ 是已知两点,并在 G, H 两点间连一曲线 $y(x)$ 。该曲线使泛函 I 取极

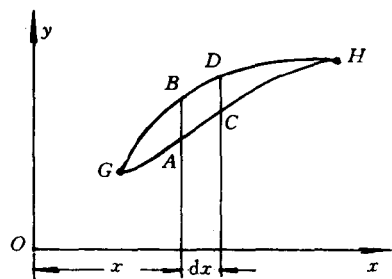


图 1.1 两端边界都给定的情况

值。显然,通过 G, H 两点的曲线(即满足边界条件式(1-1)的函数 $y(x)$)可以有无限多条。我们的任务是要在这无限多条曲线 $y(x)$ 中确定一条,使 I 达到极小或极大。

设想曲线 $GACH$ 就是所求的曲线 $y(x)$,它能使泛函 I 取极值。在曲线 $GACH$ 的邻近有另一条曲线 $GBDH$,它同样满足边界条件式(1-1)。命这条曲线的函数为 $y(x) + \delta y(x)$,其中 $\delta y(x)$ 是一无穷小量,称为自变函数的变分。于是,相应于这两条曲线,可以求得两个泛函值:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$I + \Delta I = \int_a^b F[x, y + \delta y, y' + (\delta y)'] dx$$

式中: ΔI 表示泛函的增量。

自变函数的变分 δy 是指自变量 x 不变,而仅仅由于函数(曲线)的无穷小变化而引起的纵坐标 y 的增量。变分 δy 与微分 dy 的区别在于,微分 dy 是指由于自变量 x 的变化 dx 而引起的纵坐标的增加。这样,图 1.1 中 A, B, C 3 点的纵坐标各为

A 点: y

B 点: $y + \delta y$

C 点: $y + dy = y + y'dx$

现在来看 D 点的纵坐标。可以有两种算法来获得 D 点的纵坐标,一种是从 B 点算过去,有

$$(y + \delta y) + \frac{d}{dx}(y + \delta y)dx = y + \delta y + [y' + (\delta y)']dx$$

另一种是从 C 点算过去,为

$$y + y'dx + \delta(y + y'dx) = y + \delta y + (y' + \delta y')dx$$

不论从哪一点算过去,得到的点的纵坐标应该一致。于是

$$(\delta y)' = \delta y' \quad (1-2)$$

它说明,函数的微分运算与变分运算的顺序是可以交换的。附带说一句,在上面假设两条曲线无限接近,不仅指 y 与 $y + \delta y$ 无限接近,而且在泛函 I 中出现的各阶导数 $y', (y + \delta y)' = y' + \delta y', y'', (y + \delta y)'' = y'' + \delta y''$ 等也都无限接近。或者说,不仅 δy 是无穷小量,而且 $\delta y', \delta y''$ 等都是无穷小量。

利用式(1-2), $I + \Delta I$ 可以写成

$$I + \Delta I = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \quad (1-3)$$

或者

$$\Delta I = \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \quad (1-4)$$

被积函数 F 是 x, y, y' 的连续可导函数,当 $\delta y, \delta y'$ 是无穷小量时, ΔI 也是无穷小量。如果取出等式两端的一阶小量,则有

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (1-5)$$

式中: δI 称做 I 的一阶变分, 简称变分, 它是泛函增量中的一阶小量部分。利用分部积分

$$\int_a^b uv' dx = - \int_a^b u' v dx + [uv]_a^b \quad (1-6)$$

且令

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad v = \delta y$$

则式(1-5)的右端第2项可改写为

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b \quad (1-7)$$

将式(1-7)代入式(1-5), 得

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b \quad (1-8)$$

前面已规定 $y + \delta y$ 曲线必须通过 G, H 两点, 即在 $x = a$ 和 $x = b$ 处, $\delta y = 0$, 故式(1-8)最后一项必等于零。现在, 式(1-8)又可进一步简化为

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (1-9)$$

如果上式方括号内的值不等于零, 则总能找到一个 δy 使 δI 增大或减小, 这时的 I 不是极值。因此, 能使 I 取极值的 $y(x)$, 其必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1-10)$$

通常称微分方程(1-10)为欧拉方程。解此方程, 并汇同边界条件式(1-1), 即可确定 $y(x)$ 。

但是, 由于式(1-10)只是必要条件, 而不是充分条件, 因此, 还必须辅以其它考虑才能确定由式(1-10)求得的函数 $y(x)$ 是否真能使泛函 I 取极值。但不管怎样, 即使方程(1-10)提供的解未必能使泛函 I 取极值, 但总能使 I 取驻立值。因此, 如果原来的问题只要求决定泛函 I 的驻立值, 那么欧拉方程(1-10)就成为充分而又必要的条件了。

1.1.2 自然边界条件

在1.1.1小节中给定了待求函数 $y(x)$ 必须满足的边界条件式(1-1), 即在边界处, 函数的变分必须等于零。于是, 式(1-8)等式右端最后一项中的 $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 可以取任意值而都能满足

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0 \quad (1-11)$$

但在许多情况中, 问题的边界条件并未给定。图1.2中表示了边界条件一端给定, 而另一端不定的情况。本节中则考虑边界可以随意变动的情况。要研究的问题是: 在区间 $a \leq x \leq b$ 内, 确定一个函数, 使泛函

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1-12)$$

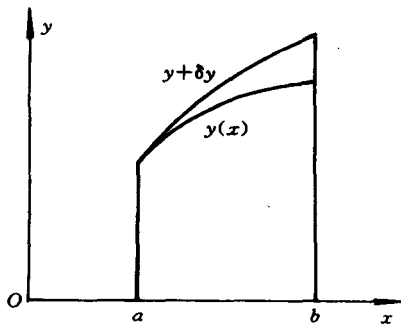


图 1.2 只给定一端边界的情况

取驻立值。问题的求解步骤与 1.1.1 小节相同。根据式(1-8)求泛函的变分。为了使泛函 I 取驻立值, 欧拉方程(1-10)仍然必须成立; 否则, 还是能找到一个 δy 使 δI 大于或小于零。对于边界条件, 即式(1-8)中的边界值, 则必须有

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=b} = 0 \quad (1-13)$$

否则, 总能找到一个 δy 使 δI 大于或小于零。由于边界条件式(1-13)是根据取驻立值的要求推导出来的, 而不是事先指定的, 所以这类边界条件就称做自然边界条件。

还可以用类似的方法研究更为普遍的问题。在区间 $a \leq x \leq b$ 内确定一个函数 $y(x)$, 使泛函

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx + Py(a) + Qy(b) \quad (1-14)$$

取驻立值。式中: P, Q 为已知值, $y(a), y(b)$ 为 $y(x)$ 在边界处的值。求 I 的变分, 得

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_a^b F(x, y, y') dx + P\delta y(a) + Q\delta y(b) = \\ & \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[P - \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=a} \right] \delta y(a) + \\ & \left[Q + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=b} \right] \delta y(b) \end{aligned} \quad (1-15)$$

由此, 除仍可得到欧拉方程(1-10)外, 还可得到自然边界条件如下:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=a} = P, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=b} = -Q \quad (1-16)$$

如果 $P=0, Q=0$, 则自然边界条件退化为式(1-13)的形式。

1.1.3 涉及高阶导数的定积分的驻立值问题

先研究下列泛函 I 的驻立值问题, 即

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad (1-17)$$

现在把这个问题化为微分方程和相应的边界条件。求 I 的一阶变分, 得

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right] dx \quad (1-18)$$

前已证明, 利用分部积分公式可把上式右端的第 2 项变为

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b \quad (1-19)$$

类似地, 连用两次分部积分公式, 可把式(1-18)中的第 3 项化为

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx &= - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y' dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b = \\ & \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \right]_a^b + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b \end{aligned} \quad (1-20)$$

将式(1-19)和式(1-20)代入式(1-18), 归并同类项后, 得

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right] \delta y dx + \\ & \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right] \delta y \right\}_a^b + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b \end{aligned} \quad (1-21)$$

由上式的第 1 项可推得欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad (1-22)$$

由式(1-21)的第 2 项,如果问题的边界条件事先给定,则 $\delta y(a), \delta y(b)$ 都等于零;否则, $\delta y(a)$ 和 $\delta y(b)$ 可取任意值,就应该使

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad (1-23)$$

最后,由式(1-21)的第 3 项,如果 $\delta y'$ 在边界处并非已知,则应有

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

因此,总起来说,驻立值问题式(1-17)的边界条件为:在 $x=a$ 及 $x=b$ 处,有

$$\begin{cases} \delta y \text{ 已知, 否则 } \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \\ \delta y' \text{ 已知, 否则 } \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \end{cases} \quad (1-24)$$

上面的结果可以很方便地推广至任意高阶的情况。设

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (1-25)$$

式中: $y^{(n)}$ 代表 y 的第 n 阶导数。求 δI , 得到

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \delta y^{(k)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right] dx \quad (1-26)$$

接连应用 k 次分部积分公式,式(1-26)中的代表项可化为

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \delta y^{(k)} dx = & (-1)^k \int_a^b \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \delta y^{(k-1)} \right]_a^b - \\ & \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \delta y^{(k-1)} \right]_a^b + \dots + \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \delta y \right]_a^b \end{aligned} \quad (1-27)$$

因此, δI 可以写成

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] \delta y dx + \\ & \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] \delta y \right\}_a^b + \\ & \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(3)}} \right) + \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] \delta y' \right\}_a^b + \\ & \dots + \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \right]_a^b \end{aligned} \quad (1-28)$$

由此得到为了使泛函 I 取驻立值而使函数 $y(x)$ 满足的微分方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0 \quad (1-29)$$

相应的边界条件为：在 $x=a$ 及 $x=b$ 处，有

$$\begin{cases} y \text{ 已知} & \text{或} & \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0 \\ y' \text{ 已知} & \text{或} & \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(3)}} \right) + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0 \\ \vdots & & \\ y^{(n-1)} \text{ 已知} & \text{或} & \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \end{cases} \quad (1-30)$$

下面举一简单的例子。

例题 1-1 研究下列泛函的极值问题。图 1.3 所示的梁一端简支，另一端为滑动支持，承受任意分布载荷 $q(x)$ 的作用。

解 在泛函 Π 的表达式中，被积函数

$$F(x, w, w', w'') = \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{N}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - qw$$

代表单位长度梁的总势能。按照式(1-23)给出的欧拉方程，可得

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + N \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (1-31)$$

式中： EJ 为梁截面的弯曲刚度。取梁的左支点为坐标原点（图 1.3），相应的边界条件为，在 $x=0$ 和 $x=L$ 处，有

$$w=0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

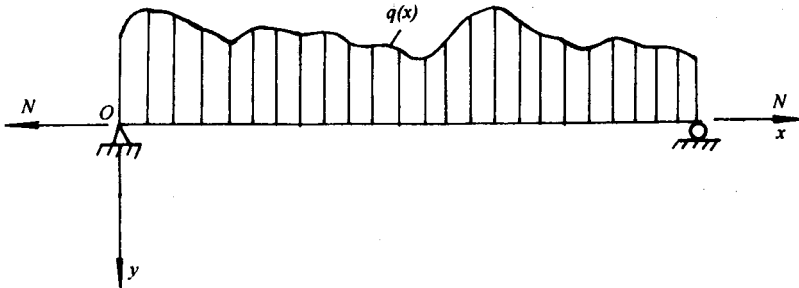


图 1.3 一端简支、另一端滑动支持并受任意分布载荷 $q(x)$ 作用的梁

在这一问题中，系统的总势能为

$$H = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2} N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - qw \right] dx \quad (1-32)$$

令已知载荷及问题的解均化为三角级数形式：

$$q(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1-33a)$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1-33b)$$

$$\text{式中} \quad q_n = \int_0^L q(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1-34)$$

代入总势能表达式并积分, 即得

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi^4 n^4}{4L^3} EJ + \frac{\pi^2 n^2}{4L} N \right) a_n^2 - q_n a_n \right]$$

式中: 系数 a_n 应使 Π 取最小值。于是

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = \frac{L}{2} \left(\frac{n^4 \pi^4}{L^4} EJ + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} N \right) a_n - q_n = 0$$

由此得到

$$a_n = \frac{2q_n}{L} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^4 EJ}{L^4} n^4 + \frac{\pi^2 N}{L^2} n^2}$$

代入式(1-33b), 即得问题的解为

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_n}{L} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^4 EJ}{L^4} n^4 + \frac{\pi^2 N}{L^2} n^2} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

1.2 弹性力学的基本方程

在求解任何弹性结构的力学问题时, 必须满足 3 个基本方程, 这就是平衡方程、几何方程和材料的本构方程。于是, 为了确定结构在给定外载荷作用下的位移和应力分布, 就必须用到这 3 个方程。

令 u_x, u_y, u_z 为弹性体中一点 $P(x, y, z)$ 在坐标轴 x, y, z 方向的位移分量, 则有

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z) \\ u_y = u_y(x, y, z) \\ u_z = u_z(x, y, z) \end{cases} \quad (1-35)$$

一般来说, 它们是位置 $P(x, y, z)$ 的函数。又令 P 点的 6 个应变分量和 6 个应力分量分别为

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

和

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

于是, 几何方程(即位移-应变方程)为

$$\begin{cases} e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{cases} \quad (1-36)$$

应变-应力方程为