数学与数学机械化

林东岱　李文林　虞言林　主编

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路321号　邮编：250001）
电　　话：(0531)2023919　传真：(0531)2050104
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂潍坊厂
版　　次：2001年3月第1版
2001年3月第1次印刷
印　　数：1—2000
规　　格：850mm×1168mm　32开本
印　　张：15.625印张
字　　数：360千字
书　　号：ISBN 7—5328—3390—9/G·3059
定　　价：27.00元

吴文俊研究
工作介绍

吴文俊先生在代数拓扑学方面的工作简介

虞言林　胡作玄

中国科学院数学与系统科学研究院

代数拓扑学的形成与发展是20世纪数学中最辉煌、最激动人心的一部分。在这短短的100年中，研究代数拓扑学的名家如云，所得成果琳琅满目，成为20世纪数学发展中的一大奇观。在这一奇观中，吴文俊先生既是参与者又是一名导演。他作出了基本的、创造性的成果，已载入史册。他的一些看法还将会继续影响好几代人。

欧氏空间及其中平直二次子图形的研究有着2000多年的历史，但自19世纪中叶Riemann之后，受到了“流形研究”的挑战。流形的观念来自于解析函数元的Riemann面、欧氏空间中的弯曲子图形以及一些代数方程或微分方程的解空间和预解空间。在一些实例中的重要进展表明，流形应成为数学的一个新的研究重点。流形与欧氏空间的最根本区别为Riemann提出的“高阶连通数”所显示。高阶连通数的观念经Poincaré等人的制作，形成了一个同调理论，它标志着代数拓扑学的真正问世。同调理论把流形(或更一般的空间)粗糙地理解为一个群(被称为同调群)及其上一系列代数结构(如乘法、Steenrod平方、

上同调运算等)。正如欧氏几何需要研究特殊子图形一样,同调群中某些特殊元素的研究跟着提上了日程。这些特殊元素是从流形上各种纤维丛结构导出的,人们称之为示性类。Stiefel, Whitney, Pontrjagin, Chern 等以不同的方式引进一些基本的示性类,就是分别以他们的名字命名的示性类。

吴文俊先生开始工作时,同调理论已初具规模,而示性类研究则起步不久。他顺应潮流,在代数拓扑学方面做出了一系列基本的、意义深远的开创性工作。现分别简述如下。

1 示性类

(1)现今有一个为人们所熟知的公式,即:若 E 是空间 M 上的一个复向量丛,E_R 是它的实化,那么有

$$(-1)^k P_k(E_R)=\sum_i(-1)^i C_i(E)C_{2k-i}(E),$$

其中 $P_k(E_R)$, $C_i(E)$分别是 Pontrjagin, Chern 示性类。这是吴文俊在 1949 年他的博士论文[1]中首先提出并证明的。

(2) Stiefel-Whitney 示性类原先是对可微的流形定义的,Thom 引进了一个 Thom 类来处理它的拓扑不变性。与此同时,吴文俊更进一步用同调理论中的观念将 Stiefel-Whitney 示性类表示出来,得到一个非常漂亮的吴公式[2]。具体来讲,设 M 是一个紧微分流形,则由对偶定理,保证存在一个上同调类 $V\in H^*(M,Z_2)$,使得对所有上同调类 X,有

$$V\cup X=SqX。$$

这时若记 W 为全 Stiefel-Whitney 示性类,则有下面的吴公式

$$W=SqV,$$

上面的 Sq 是 Steenrod 平方,出现的上同调类 V 被称为吴示性

类。吴公式是拓扑学中的经典公式之一。

(3)在一篇论文[3]中,吴文俊证明了一条 Stiefel-Whitney 示性类间的关系式

$$Sq^k(W_m) = W_k W_m + \binom{k-m}{1} W_{k-1} W_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} W_0 W_{m+k},$$

其中,$\binom{p}{q}$为模 2 二项系数。我们不妨把上式称为吴关系式。有意思的是,在 1956 年,Dold 证明:吴关系式乃是 Stiefel-Whitney 示性类之间的惟一关系式。吴文俊的工作事实上完满地为 Stiefel-Whitney 示性类理论画上了句号。

(4)Pontrjagin 示性类自问世之后,它的拓扑不变性一直困扰着几何学界。在这一课题上的第一批进展是由吴文俊和 Thom 作出的。吴文俊证明了 $P_k \pmod 3$和 $P_k \pmod 4$是拓扑不变的[4,5],特别是导出了对定向 M^4 的 $P_1[M^4]$的断言:它必是 3 的倍数。这一结果是几何学中一场大风暴的先兆。

2 示嵌类

用同调理论处理几何问题是代数拓扑学的核心,其中之一是嵌入问题。流形观念的来源途径之一是将欧氏空间中的弯曲子图形“拿出来”;反过来的问题是,当给定一个流形之后,考虑能否放到欧氏空间中去。这里讲的反过来的问题,就是嵌入问题。对空间与放入方式的不同要求,嵌入问题就有多种类型的准确提法(例如浸入就是其中的一种提法)。在吴文俊之前,人们已作出了下列一系列结果:

(1)易知 n 维复合形可嵌入在 R^{2n+1} 中。1934 年, van Kampen 和 Flores 证明:存在 n 维复合形,它不能嵌入在 R^{2n} 之中。van Kampen 还给出 n 维复合形嵌入在 R^{2n} 中的充要条件,但是他的证明是错误的。

(2)对于微分流形, Whitney 证明了下列定理:

①n 维微分流形都可以嵌入在 R^{2n} 中。

②n 维微分流形都可以浸入在 R^{2n-1} 中。

③如果 M^n 浸入在 R^{n+k} 中,则 M^n 的法丛的 Stiefel-Whitney 示性类 $\overline{W}_i(M^n)$ 满足: $\overline{W}_i(M^n)=0(i>k)$。

④如果 M^n 嵌入在 R^{n+k} 中,则

$$\overline{W}_i(M^n)=0(i\geqslant k)。$$

(3)Thom 对于紧局部连通的拓扑空间在 R^N 中的嵌入,给出了必要条件。

吴文俊从 1953 年起,把以上表面上互不相关、方法上也迥异的理论融合成一个统一的示嵌类理论[6]。他首先用 Smith 周期变换定理定义示嵌类,即考虑一个空间 X 的 p 重约化积 X_p,它是 $\tilde{X}=X^p-\Delta X$ 关于 t 的商空间,其中 ΔX 为对角集, t 为 $\tilde{X}$ 上的循环置换。于是可定义一组被称为示嵌类的上同调类 $\varphi_{(p)}^i(X)\in H^i(X_p, Z$ 或 $Z_p)$,其中系数取 Z 或 Z_p 视 i 为偶或奇而定。类似地,他还定义了示浸类、示痕类。然后借助于这些示嵌类、示浸类、示痕类,得到下列的定理:

定理 1 X 可嵌入到 R^N 中,则

$$\varphi_{(p)}^i(X)=0,\ i\geqslant N(p-1)。$$

定理 2 当 $n\geqslant 2$ 时, n 维复合形 K^n 可在 R^{2n} 中嵌入的充要条件为:

$$\varphi_{(2)}^{2n}(K^n)=0。$$

定理 3 当 $n>3$ 时，K^n 可浸入到 R^{2n} 中的充要条件为示浸类为零，即

$$\Psi_{(2)}^{2n-1}(K^n)=0。$$

定理 4 当 $n>1$ 时，K^n 到 R^{2n+1} 中的两个嵌入 f,g 同痕的充要条件是示痕类为零，即

$$\Theta_{f,g}^{2n}(K^n)=0。$$

上述四个定理包括前面提到的所有定理为其特例，且大大超越，有许多新的推论极富创造性。还值得一提的是，吴文俊的独创性方法提供了许多非同伦的拓扑不变量，脱出了拓扑学的同伦风尚。"文革"期间，吴文俊将定理 2 推进到 $n=1$ 的情形，所得结果包含了 Kuratowski 的经典结果，特别是给出了可以直接计算的模 2 方程作为嵌入的判据。这在集成电路的布线问题上起着指导作用，其计算效率远超过国际上流行的算法。1976 年美国数学会访华团来访时，著名应用数学家、沃尔夫奖获得者 J. Keller 当即指出，"这是真正的应用数学"。

3 其他具有深刻影响的工作

在吴文俊先生的某些工作中，令人惊叹的不仅在于结果本身，而且在于它们所显示出的影响和导演数学发展的气度。现举例如下：

(1)基于对 Grassmann 流形的上同调中 Steenrod 运算的深刻理解，吴文俊提出了一个 Steenrod 运算的 Cartan 公式。这个想法可能影响该公式的诞生。需知 Cartan 公式在代数拓扑学中占着重要的地位。

(2)Pontrjagin 配边想法刚刚问世，吴文俊便独具慧眼，靠一

本俄文字典逐字研读 Pontrjagin 的文章,并介绍给 Thom。从而影响 Thom 作出配边理论的基本定理,它是 Thom 获 Fields 奖的一个主要原因。

(3)基于他关于 Pontrjagin 示性类的工作,对四维定向流形 M^4,吴文俊猜测了一个公式

$$\tau(M^4)=\frac{1}{3}P_1(M^4),$$

其中 $\tau(M^4)$是 M^4 的符号差。吴文俊的这个猜测被写在 Hirzebruch 的一本著作[7]中。它直接影响了 Hirzebruch 作出 Signature 定理和高维的 Riemann-Roch 定理。Hirzebruch 的这项成就最终导致 Atiyah-Singer 指标定理的问世。这一套理论是 20 世纪数学中最重要的进展之一,而吴文俊则是先锋。

(4)吴文俊深以在代数拓扑学中的同调群、乘法、上同调运算、示性类、同伦群等观念与理论间缺乏一个统一的公理式刻画为憾,当他得知 Sullivan 的极小模型后,便全力以赴对代数拓扑学作了一次较大规模的整理与改造[8],并以 I^* 函子和测度这些名词表达了他寻求统一刻画的希望。同时,他也作出了一些新结果,如 Brues-Lemaire 猜想的解决等。然而,在目标尚未达到时,他便转战他方了。吴文俊的这部分工作可能对拓扑学的发展有革命性的作用,他给出的新的研究启示将影响以后的若干代人。

吴文俊先生是中国最有国际声誉的数学家之一。他的成就曾奇迹般地大大缩短了中国近代数学与国际的差距,大长了中国人的志气。20 世纪 60 年代初,他曾一针见血地指出:“中国数学与国外的差距只在于‘传统’。”并要建立中国的 Bourbaki。为此他身体力行,为在中国建立数学传统上付出了大量辛劳。

他对同行,对学生给予了非常多的影响。他的这些影响和他所建立的传统,将是中国数学的宝贵财富。吴文俊先生是中国近代数学的一位开拓者。他学风严谨,谦虚谨慎,兢兢业业,只管耕耘,不计得失。他又是一位为人正直、平易近人、循循善诱的良师益友。他的高尚品德是我们学习的榜样,激励着我们为发展中国的数学事业奋斗不息。

参 考 文 献

[1]Wu Wentsün. Sur les espaces fibres et les varietes feuilletees. Actualites Sci Ind. Paris: Hermann & Cie, 1952(1183)

[2]Wu Wentsün. Classes caracteristiques et i-carres d' une variete. Paris: C R Acad Sci, 1950(230):508 ~ 511

[3]Wu Wentsün. Les i-carres dans une variete grassmannienne. Paris: C R Acad Sci, 1950 (230):918 ~ 920

[4]Wu Wentsün. On Pontrjagin classes II. Acta Math Sinica, 1954 (4):171 ~ 199

[5]Wu Wentsün. On Pontrjagin classes III. Acta Math Sinica, 1954 (4):323 ~ 346

[6]Wu Wentsün. A theory of imbedding, immersion, and isotopy of polytopes in a Euclidean space. Beijing: Science Press, 1965

[7] Hirzebruch F. Topological methods in algebraic geometry. Springer Verlag, 1966.7

[8]Wu Wentsün. Rational homotopy type: A constructive study via the theory of the I* -measure. Lect Notes in Math. Berlin: Springer Verlag, 1987 (1264)

吴文俊学术贡献的征引和评价

(代数拓扑部分)

胡作玄 石 赫

中国科学院数学与系统科学研究院

对数学家的学术成就进行评价是一件极为困难，也多少带有主观色彩的事情。但是，在学科发展的历史进程中，审视这些学术创造所产生的影响及其对整个学科发展的推动，对于认识这些学术贡献的历史地位将是重要的、具有借鉴意义的。

吴文俊教授的数学研究活动，前期自1946年至20世纪60年代中期，研究内容以代数拓扑为主，他的贡献主要有以下几个方面。

1 示性类研究

他对由瑞士数学家Stiefel,美国数学家Whitney,原苏联数学家Pontrjajin和陈省身等通过不同途径引入的示性类进行了系统的论述,探讨了相互之间的关系,给出了计算方法,并应用于流形的构造。吴文俊引入的上同调类,在文献中被称为吴示性类。他提出的蕴含拓扑不变性和同伦不变性的两个公式,都被称为吴公式。

这些研究成果包括：

(1)为示性类定名。Pontrjajin 和陈省身的论文中都引进了示性类的概念，但它们的内涵截然不同。吴文俊将它们分别定名为 Pontrjajin 示性类和 Chern 示性类。

(2)考虑示性类之间的关系。吴文俊证明：其他示性类都可由 Chern 示性类导出，反之则不然。从而明确了 Chern 示性类的基本重要性。

(3)引进吴示性类。吴文俊在微分流形上引入了一类示性类，国际上称之为吴示性类，是可具体计算的。

(4)建立示性类之间的关系。吴文俊证明 Whitney 示性类用吴示性类表示的公式，从而 Whitney 示性类也变为可具体计算的，国际上称此公式为吴(第一)公式。

(5)证明 Whitney 示性类之间的关系式。国际上称此公式为吴(第二)公式，从而使 Steenord 平方运算成为可具体计算的。

(6)给出了示性类计算的具体算法。

2 示嵌类研究

吴文俊引入具有非同伦拓扑不变量的一种一般构造方法，并系统地应用于嵌入问题，引入了复合形吴示嵌类。他还用同样的方法研究浸入问题与同痕问题，引入类似的吴示浸类与吴示痕类，解决了流形嵌入的基本问题。

他后来将关于示嵌类的成果用于电路布线问题，给出线性图平面嵌入的新判定准则，它与以往的判定准则在性质上完全不同，是可计算的。

吴文俊的开创性成果产生了重要影响。吴文俊在拓扑学中所取得的原始性创新成就，使他和同时代的几位著名数学家，如

J.P.Serre,R.Thom,A.Borel 等,共同推动拓扑学蓬勃发展,使之成为数学科学的主流之一。

吴文俊的这些成果在拓扑学中具有奠基性作用,半个世纪以来一直在发挥着重要作用,已成为拓扑学经典之作,引发了大量的后续性研究,在拓扑学多种问题的研究中被广泛引用。许多著名数学家从吴文俊的工作中受到启发或直接以他的成果为起始点之一,获得了一系列重大成果。

(1)Wolf 奖获得者、法国数学家 H.Cartan 在文章中谈到他证明的“Cartan 公式”时认为:这一公式冠以“Cartan 公式”的称谓欠妥。并指出,这一公式是由吴文俊的工作首先提出的[1]。

(2)法国数学家 R.Thom 因建立“配边理论”而获 Fields 奖。他在文章中讲到,是吴文俊向他介绍了 Pontrjajin 示性类的有关结果,即当某流形是另外一个流形的边界时,其 Pontrjajin 示性类必为零。这是配边理论的开端[2]。R.Thom 在建立“配边理论”的获奖工作中,在证明主要定理时,三次引用了吴文俊的工作,分别是吴第一公式、吴第二公式及吴发现的关于四维定向流形符号差和 Pontrjajin 示性类关系的公式[3]。

(3)美国数学家 J.Milnor 以解决“7 球问题”而获 Fields 奖。在他关于“7 球问题”的文章中,用到吴文俊关于 Pontrjajin 示性类和 Whitney 示性类的乘积定理的结果[4]。Milnor 在他的专著中,用了许多段落介绍吴示性类和吴公式[5]。

(4)美国数学家 S. Smale 因解决 Poincaré 猜想而获得 Fields 奖。在他的获奖工作中,引用了吴文俊关于示痕类的定理。并指出,吴文俊的结果比另一位数学家 H.Whitney 的结果有本质性改进,而这对于 Smale 证明有关定理是必不可少的[6]。

(5)Wolf 奖获得者、德国数学家 F.Hirzebruch 把前述吴文俊

发现的关于四维流形 Pontrjajin 示性类的公式写入专著中，这一公式直接影响了 Signature 定理和高维 Riemann-Roch 定理的证明[7]。

(6)英国数学家 M.F. Atiyah 因证明“指标定理”而获 Fields 奖。此定理与费尔马(Fermat)大定理一起被称为 20 世纪数学界最辉煌的成就。Atiyah 和 F.Hirzebruch 联名写的关于 Riemann-Roch 定理和 K - 理论的论文中，在不到两页半的引言部分，叙述吴文俊的工作之处多达 17 次。内容包括：吴多项式、吴关系式、吴方法和吴公式。在正文的章节中，多处使用了这些成果。可见，吴文俊的工作是这篇文章的出发点和基础。这篇论文是“Atiyah - Singer 指标定理”的前奏。两年后“指标定理”正式发表[6]。

(7)Fields 奖得者、美国数学家 E. Witten 在 1999 年的论文中使用吴示性类的概念。文中已不再引用吴文俊的原文，这说明，吴文俊关于示性类的工作发表半个世纪之后，已成为拓扑学的基础性内容[7]。

吴文俊通过自己的独创性工作而享有盛名，而且在强手如林的世界性数学研究中心——法国，以自己的学术思想影响了一大批学者，其中包括前述的多位著名数学家，这充分显示了吴文俊的研究成果的深刻性、奠基性。这也充分显示了吴文俊是一位具有战略眼光的数学家。在吴文俊的工作出现之前，孤立的同调和同伦计算有极大的困难，简直无法实现。正是吴文俊的工作将 Steenrod 运算和示性类巧妙地结合起来，使整个局面柳暗花明，呈现出蓬勃发展的新局面。由此使代数拓扑学和数学其他分支更加紧密结合，导致许多新的研究领域应运而生，如 Hopf 的代数理论，从而引向量子群及场论中的新兴领域，使流

形拓扑学和广义上同调以及代数拓扑学都取得了一系列新发展。

1989年,法国数学家J. Dieudonne出版了大部头的《代数拓扑学家和微分拓扑学史,1900—1960》。其中引述吴文俊的工作达17次之多,对吴文俊的贡献作了相当客观的介绍。例如,书中指出,吴文俊把Pontrjajin示性类由极为繁复的形式简化为现代的漂亮形式。

数学大师陈省身先生称赞吴文俊"对纤维丛示性类的研究做出了划时代的贡献"。

吴文俊因在拓扑学方面的杰出贡献,荣获首届"国家自然科学奖一等奖"(1956)。

1958年,吴文俊应邀在世界数学家大会上做示嵌类方面的报告。

致谢:在本文的写作过程中,吴文俊先生给予指导和帮助,高小山研究员提出许多积极建议和意见,作者谨致谢意。

参考文献

[1]Cartan H. Oeuvres Collected works. Berlin:Springer-Verlag, 1979.1254

[2]Thom R. Quelgues proprietes globales des varietes differentiables. Commentarii Math Helvetici, 1954(28)

[3]Thom R. IHES Puplications Math,1989 (70):200

[4]Milnor J W. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Math, 1956,64(2)

[5]Milnor J W, Stasheff J D. Characteristic classes. New Jersey:Princeton University Press and University of Tokyo Press.1974

[6]Smale S. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four.

Annals of Math, 1961, 74(2)

[7] Hirzebruch F. Neue Topologische Methoden inder Algebraischen Geometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1956

[8] Atiyah M F, Hirzebruch F. Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen. Math Zeit, 1961 (77): 149 ~ 87

[9] Witten E. Duality relations among topological effects in string theory. hep-th/9912086

吴文俊对机械化数学的贡献

高小山
中国科学院系统科学研究所

1 数学机械化的意义与起源

17世纪以来,人类经历了一场史无前例的技术革命,出现了以蒸汽机为代表的机器,以代替各种类型的体力劳动。如果说工业机器的出现所导致的产业革命,使人们逐渐实现了体力劳动的机械化,促进了社会生产力的发展,那么20世纪电子计算机的产生,则为人类实现脑力劳动的机械化创造了物质条件。与工业革命相适应,出现了解析几何与微积分这些数学上的伟大创新。在目前这一以计算机为标志的信息革命时代,数学上应该有什么样的创新与之相适应呢?正是基于这种考虑,吴文俊先生倡导数学机械化研究。

数学是典型的脑力劳动,因此在脑力劳动机械化过程中有其特殊地位。不仅如此,数学是自然科学与高科技的理论基础,数学方法的创新有可能带动科学发展与技术进步。因而,数学机械化又有其迫切性与优先权。此外,数学具有表达精确、论证严谨等特点,数学机械化在各类脑力劳动的机械化中又易于实现。事实也的确如此。初等几何定理证明被认为是典型的脑力