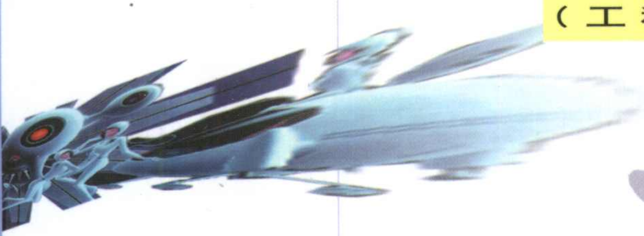
自考

高等教育自学考试应试宝典系列

高等数学应试指导与仿真模拟

（工科类）

刘有炳　编著



Advanced Mathematics Examination Guide & Simulated Tests

西北工业大学出版社

高等教育自学考试应试宝典系列

高等数学应试指导与仿真模拟

（工　科　类）

刘有炳　编著

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应试指导与仿真模拟(工科类)/刘有炳编著．西安:西北工业大学出版社,2001.2
(高等教育自学考试应试宝典系列)
ISBN 7-5612-1325-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 00564 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　**邮编**:710072　**电话**:029—8493844
网　　址:http://www.nwpup.com
印 刷 者:长安县第二印刷厂
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张:10.062 5
字　　数:255 千字
版　　次:2001 年 2 月　第 1 版　2001 年 2 月　第 1 次印刷
印　　数:1~5 000 册
定　　价:13.00 元

前　言

为了适应参加高等教育自学考试课程“高等数学”(工科类)考生的学习需要，编者编写了这本自学指导书。其内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、常微分方程、无穷级数。每章都包括如下 6 个部分：

(一)主要内容：用精练的语言列出本章主要内容，旨在使考生熟悉本章内容。

(二)自学考试基本要求：指出本章考试中应掌握什么?了解什么？理解什么？突出重点和难点。

(三)自学考试应记公式：列出参加自学考试应记公式，并指出必须熟记的公式。

(四)典型例题：针对性地举出一定数量的例题进行分析，以帮助考生理解基本概念，提高计算能力。

(五)自学考试题型：把过去多年全国和陕西省工科类“高等数学”考试题分类列出，并作出解答，以便考生熟悉自学考试题类型。

(六)自测练习题：每章都有反映本章内容的自测练习题，让考生参加自学考试前练习，并给出参考答案。

该书是根据全国高等教育自学考试“高等数学”(工科类)考核目标而编写。作者具有几十年“高等数学”教学经验，长期从事“高等数学”自学考试的命题、教学、辅导和改卷等工作，具有丰富的自学考试辅导经验。

作者对这本书的结构和编写形式，做了新的尝试，目的在于对“高等数学”考生有所帮助，本书初稿于 1998 年内部试用，经过三

年应用，今年又进行改进并正式出版。

本书的编写和出版，得益于西北工业大学出版社的大力支持，在此，谨向他们表示衷心的感谢。由于水平所限，书中在内容的取舍、结构的安排以及例题等方面如有不妥之处，诚望读者指正，以便进一步修改。

编　者

2001年1月

目　　录

第一章　函　　数

一、主要内容

（一）常量与变量

1. 常量

在某一过程中，保持不变的量．一般用 $a,b,c,\cdots$ 表示．

2. 变量

在某一过程中，可以取不同数值的量．一般用 $x,y,t,\cdots$ 表示．

3. 区间

介于某两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点．

i）$a \leqslant x \leqslant b$：闭区间 $[a,b]$；

ii）$a < x < b$：开区间 (a,b)；

iii）$a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$：半开区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$．

4. 邻域

开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 称为点 a 的 ε 邻域，ε 称为邻域半径．

（二）函数概念

1. 定义

设 x 与 y 是变量，如当变量 x 在某一范围内取一数值时，变量 y 按照一定的规律，总有确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$．

2. 函数的表示法

i) 解析法(公式法)

ii) 列表法

iii) 图像法

3. 函数的特性

(1) 函数的奇偶性　如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内的一切 x 满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数;满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于坐标原点.

(2) 函数的单调性　设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内任意两点 $x_1<x_2$:

i) 如有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

ii) 如有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少.

(3) 函数的有界性　设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义,对于任意 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$(M 为一正数),则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

(4) 函数的周期性　对函数 $y=f(x)$ 的定义域内的一切 x 值,若存在一个正数 T,使得 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数.满足上述关系的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

4. 反函数

函数 $y=f(x)$ 若将 y 当作自变量,x 当作函数,即 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.而 $f(x)$ 叫做直接函数.因为习惯上总是用 x 表示自变量,y 表示函数,所以通常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

5. 复合函数

如果 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,则称 y 是 x 的复合函数,记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中 u 叫做中间变量.

6. 基本初等函数

i) 幂函数:$y = x^{\mu}$(μ 为实数);

ii) 指数函数:$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$;

iii) 对数函数:$y = \log_{a}x(a > 0, a \neq 1)$;

iv) 三角函数:$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

v) 反三角函数:$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的并用一个式子表示的函数.

8. 分段函数

函数在定义域的不同的区间由不同的分析式子表示,这样的函数称为分段函数,分段函数是非初等函数.

二、自学考试基本要求

(1) 正确理解函数的定义:要弄清定义中的两个要素——定义域和对应法则;要能区分 $f(x)$ 与 $f(a)$;要会计算函数值(包括分段函数).

(2) 要牢记基本初等函数的定义域,会求比较简单的函数的定义域.

(3) 要弄清反函数的概念和它与原来函数在表示式上、几何图形上的关系;要牢记反三角函数的主值范围.

(4) 要弄清复合函数的概念,并能将几个函数正确地复合成一个函数,更为重要的是把一个函数分解成几个函数的复合.

(5) 能判定一些比较简单函数的单调性、有界性、奇偶性、周

期性（如果函数存在这些性质）

（6）要熟悉基本初等函数的图形与性态．

三、自学考试应记公式

（1）奇函数：$f(-x)=-f(x)$

（2）偶函数：$f(-x)=f(x)$

（3）幂函数：$y=x^{\mu}(\mu=1,2,3,-1,\frac{1}{2})$的图形

（4）指数函数：$y=a^{x},y=\mathrm{e}^{x},y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图形

（5）对数函数：$y=\log_{a}x$ 与 $y=\ln x$ 的图形

（6）三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$ 的图形

（7）反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,$
$y=\operatorname{arccot} x$ 的图形

四、典型例题

例 1　求下列函数的定义域．

（1）$y=\ln(x-3)+\sqrt{x^{2}-9}$　　（2）$y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$

（3）$y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　（4）$y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

解　（1）由$\begin{cases}x-3>0\\x^{2}-9\geqslant 0\end{cases}$得$\begin{cases}x>3\\|x|\geqslant 3\end{cases}$，定义域为$(3,+\infty)$．

（2）由$\begin{cases}1-\sqrt{1-x}\neq 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$得$\begin{cases}x\neq 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，　定义域为$(-\infty,0)$，$(0,1]$．

（3）由$\begin{cases}1-x\neq 0\\\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0\end{cases}$得$\begin{cases}x\neq 1\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，定义域为$[-1,1)$．

(4) 由 $\sin x - \cos x \neq 0$ 即 $\tan x \neq 1$ 得 $x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$，

定义域为 $x \neq \frac{\pi}{4} + n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的一切实数．

例 2 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数？

(1) $f(x) = \ln x$，$g(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$

(2) $f(x) = x$，$g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1,0) \\ x-1, & x \in (0,1) \end{cases}$，$g(x) = f^{-1}(x)$

(4) $f(x) = |x|$，$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

解 (1) $f(x) = \ln x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，

$g(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$，

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数．

(2) $f(x) = x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，

$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$；

而 $f(x) = x$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$，

$g(x) = \sqrt{x^2}$ 的值域是 $[0, +\infty)$，

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数．

(3) 由于 $g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in (0,1) \\ x+1, & x \in (-1,0) \end{cases}$，

它与 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1,0) \\ x-1, & x \in (0,1) \end{cases}$ 相同．

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数．

(4) $f(x) = |x|$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$；

$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ 的定义域是 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$．

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数．

例 3 设 $f(x) = x^2 2^x$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f(\frac{1}{x})$，$f(x_0)$．

解 $f(0)=0^2\cdot 2^0=0$

$$f(\frac{1}{x})=\left(\frac{1}{x}\right)^2 2^{\frac{1}{x}}=\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$f(-2)=(-2)^2\cdot 2^{-2}=1$$

$$f(x_0)=x_0^2 2^{x_0}$$

例 4 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, $x=t-1$

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$$

所以 $f(x)=x^2-5x+6$

【注意】 解此类题的一般思路是令 $t=1+x$,解出 x,再代入原式中,就可得到 $f(x)$.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$,求 $f(1),f(2),f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $f(1)=0$

$$f(2)=0$$

$$f(-\frac{\pi}{4})=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 6 设 $f(x)=2x-1,g(x)=\frac{1}{1+x^2}$,求 $f(x+1)$,$g\left(\frac{1}{x}\right)$,$f[g(x)]$ 和 $g[f(x)+2]$.

解 $f(x+1)=2(x+1)-1=2x+1$

$$g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f[g(x)]=2[g(x)]-1=2\left[\frac{1}{1+x^2}\right]-1=\frac{2}{1+x^2}-1$$

$$g[f(x)+2]=\frac{1}{1+[f(x)+2]^2}$$

$$\frac{1}{1+[(2x-1)+2]^2}=\frac{1}{1+(2x+1)^2}$$

【注意】 解此类题为求自变量取不同值所对应的函数值. 这

时只要搞清楚对应法则，问题就迎刃而解．这里 $f(\quad)=2(\quad)-1,g(\quad)=\dfrac{1}{1+(\quad)^2}$.

例 7 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$.

解 与例 4 类同，令 $\dfrac{x+1}{x}=t$，解得 $x=\dfrac{1}{t-1}$ 代入原式得

$$f(t)=\frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=1+(t-1)^2+(t-1)=$$
$$t^2-t+1$$

所以 $f(x)=x^2-x+1$

例 8 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2-\dfrac{1}{(-x)^2}=x^2-\dfrac{1}{x^2}=f(x)$

所以 $f(x)$ 为偶函数．

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=&\\ \ln(\sqrt{1+x^2}-x)=&\\ \ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=&\\ \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=&\\ -\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)&\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数．

例 9 求下列函数的反函数：

(1) $y=-\sqrt{x^2-1}\quad(x\geqslant1)$

(2) $f(x)=e^x+1\quad(x\in R)$

(3) $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$

解 (1) 两边平方：$y^2=x^2-1$

$$x^2=y^2+1$$

当 $x\geqslant 1$ 时，$y\leqslant 0$，故有 $x=\sqrt{y^2+1}\quad(y\leqslant 0)$，

因此所求的反函数为

$$y=\sqrt{x^2+1}\quad(x\leqslant 0)$$

(2) 由 $y=e^x+1$ 解出 $x=\ln(y-1)\quad(y>1)$，

故所求的反函数为

$$y=\ln(x-1)\quad(x>1)$$

(3) 当 $x\geqslant 0$ 时，由 $y=x^2$ 得 $x=\sqrt{y}\quad(y\geqslant 0)$；

当 $x<0$ 时，由 $y=x^3$ 得 $x=\sqrt[3]{y}\quad(y<0)$；

故所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ \sqrt[3]{x}, & x<0\end{cases}$$

例 10 某商店对某种商品根据购买量的大小规定了如下的价格，购买量在 10 kg 以下(包括 10 kg)部分，每公斤 20 元；购买量少于等于 100 kg 时，其中超过 10 kg 的部分，每公斤 15 元；购买量超过 100 kg 的部分，每公斤 10 元. 试求出购买量与费用之间的函数关系.

解 设购买量为 x kg，则费用函数为 $C(x)$.

由题意得

$$C(x)=\begin{cases}20x, & 0<x\leqslant 10\\ 200+15(x-10), & 10<x\leqslant 100\\ 200+1350+10(x-100), & x>100\end{cases}$$