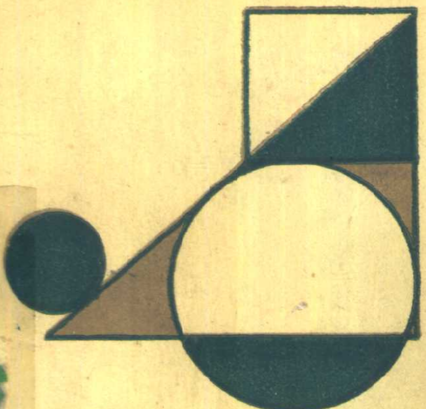
平面几何
基本图形与解题分析

傅佑珊 编著



地震出版社

平面几何基本图形
与解题分析

傅佑珊　编著

地震出版社

1985

内 容 提 要

为了帮助广大读者提高解答平面几何问题的能力，本书着重介绍了从分析认识基本图形的性质入手的一种“综合分析”的思维方法，以及从多方面进行解题探讨提高解平面几何问题能力的途径。全书共编辑了十二个典型的基本图形，对每个图形都比较全面地总结了它的性质以及基本辅助线，并且配备了一定数量的例题。通过例题，讲明了从基本图形入手的解题思路，以及如何进行解题探讨的具体方法。

本书可作为在校学生、自学青年和职工文化补习的补充读物，也可作为平面几何总复习的参考资料，对教师的数学也有参考价值。

平面几何基本图形
与解题分析
傅佑珊 编著
责任编辑：姚家榴

地震出版社出版
北京复兴路63号
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

787×1092 1/32 8.5 印张 190 千字
1985年12月第一版 1985年12月第一次印刷
印数：0001—19000

统一书号：7180·302 定价：1.30元

目　　录

第一章　绪　论

学完平面几何的青年学生，怎样通过短时间的复习，进一步提高平面几何解题能力呢？

通常对这个问题有两种方法，一种方法是按照现行课本的章节顺序纵向复习；另一种方法是根据传统的"证题术"把问题分类归纳进行横向总结。这两种方法，分别从不同的角度加深对基础知识的理解，提高对基本技能的训练，从而达到提高平面几何解题能力的目的。

为了探讨提高平面几何解题能力的方法，笔者根据多年的教学实践，分析了影响青年学生提高平面几何解题能力的多种因素，认为以下三个方面是最重要的：第一是基础知识的牢固掌握和基本技能的熟练应用，这是先决条件；第二是掌握科学的思维方法，养成良好的分析问题的习惯，这是关键；第三是善于进行解题探讨，从中总结解题规律，加深对问题理解的深度和广度，达到通过一道典型例题学会处理一类问题的目的，这是提高解题能力的重要途径。

为了做到以上三个方面，笔者提出另一种复习平面几何的思路和方法，即从基本图形入手的"综合分析法"。

本书通过对典型的基本图形的分析和研究，总结平面几何主要的基础知识，归纳这些基本图形的基本辅助线，并在此基础上，将复杂的图形分解为基本图形，介绍从基本图形入手的"综合分析方法"。为了便于读者掌握这种方法并能通过解题总结规律，加深对问题理解的深度和广度，掌握进行解题探讨的方法，本书还给出了一些例题供大家学习。

下面着重介绍综合分析法和解题探讨的具体方法。

一、从分析基本图形人手的“综合分析法”

在平面几何中，通常采用综合法和分析法这两种科学的思维方法寻求定理论证和解题思路。

综合法就是“由因导果”的方法，分析法则是“执果索因”的方法。青年学生在解题过程中比较重视运用分析法寻求解题思路，即“欲证……，只须……”。这无疑是正确的，但却忽视了一个事实：思考很多问题虽然以分析法为主，但也有些是以综合法为主的。在实际中，往往两种方法结合起来使用效果较好。因此，在思考解题过程时，一般来说应采取“两法结合、互相接近”的所谓“综合分析法”，即既要追溯结论成立所必须的各种条件，又要探求条件必然产生的种种可能结果，逐步找出条件和结论之间的内在联系，使问题得到解决。

为了帮助青年学生正确地运用“综合分析法”，养成分析问题的习惯，根据平面几何问题都离不开基本图形这个特点，把这种分析问题的方法具体化为以下两个主要步骤：

[分解图形、据图导性]

所谓“分解图形、据图导性”，就是先将问题所给出的图形分解为若干个基本图形，并在此基础上逐个分析和推导出它们的性质(推导要全)，以及组合之后还有哪些性质；然后根据问题的需要和基本图形的特征，试探性地添设一些基本辅助线，从而产生新的基本图形，再推导出新的性质。

[分析结论、据性索图]

所谓“分析结论、据性索图”，就是对结论进行分析，寻找出结论所在的基本图形，在上述推导性质的基础上，通过比较，挑选出一些有用的性质，综合起来进行逻辑推理。

必须指出，分解图形这一过程是比较复杂的，分解为几个基本图形不是唯一的。所以分解图形这个过程必须同第二步联系起来考虑，否则容易造成盲目性。从这个意义上说，这两步没有绝对的界限，二者相辅相成。

下面举例说明运用“综合分析法”分析几何问题的全过程。

例 1 $\triangle ABC$ 的内角平分线 BD 和 CE 交于 I，$\angle A=60^\circ$，则 $EI=ID$。

[分解图形、据图导性]

所给图形可分解为下列基本图形(图 1-1)：

(1) $\triangle ABC$，$\angle A=60^\circ$；

(2) $\triangle ABC$ 及其内角平分线 BD 和 CE；

(3) $\triangle BIC$；

(4) 四边形 $AEID$，$\angle A=60^\circ$。

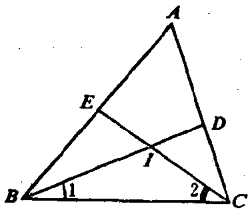


图 1-1

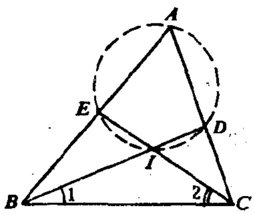


图 1-2

由(1)可推得$\angle ABC+\angle ACB=120^\circ$，结合(2)又可推得$\angle 1+\angle 2=60^\circ$，结合(3)又可推得$\angle BIC=120^\circ$，结合(4)又可推得$\angle A+\angle EID=180^\circ$，于是出现“圆及内接四边形 $AEID$”这个新的基本图形(图 1-2)，从而又可推得更多的性质。

又由(2)还可推得 I 为内心，如果连结 AI，则 AI 平分

$\angle BAC$(图 1-3)。

[分析结论、据性索图]

由于所要证明的两条线段 EI 和 DI 分别是 $\triangle AEI$ 和 $\triangle ADI$ 的两边，所以欲证 $EI=DI$，只须证明 $\triangle AEI\cong\triangle ADI$，但据直观分析，显然这两个三角形不全等，因此可考虑其它方法。由（图 1-3）可见，EI 和 DI 是辅助圆的两条弦，因此欲证 $EI=DI$，只须证明 $\overset{\frown}{EI}=\overset{\frown}{DI}$，即证 $\angle EAI=\angle DAI$，这可由 AI 的性质得到证明，于是目的达到。

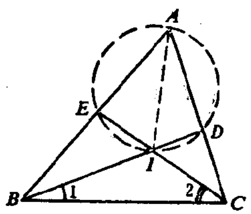


图 1-3

从例 1 的分析过程可见，运用“综合分析法”分析问题时，不要先考虑结论，并从“欲证……，只须……”入手，而是强调先将复杂的图形分解为若干个基本图形，在推导性质的基础上，再去寻求结论所在的基本图形，然后考虑“欲证……，只须……”，这就是运用“综合分析法”分析几何问题的特点和基本要求。为了正确地运用“综合分析法”去分析几何问题，必须明确以下问题，并掌握三方面的基本技能。

1. 了解基本图形，掌握分解图形的方法和基本图形的性质

什么样的图形是基本图形呢？一般来说，现行平面几何教科书中的定义和定理所对应的图形是基本图形，本书从第二章开始给出了十二个典型的基本图形，平面几何就是研究这些基本图形及其性质的科学。虽然一般所遇到的平面几何问题，它的图形往往是比较复杂的，但经过仔细观察、分析

和比较，就可发现它们都是由一个或几个基本图形组成的，而且其中至少有一个是对问题起决定作用的，如果能正确地运用这个基本图形的性质，问题就能顺利地得到解决。因此，善于将一个复杂的几何图形分解为若干个基本图形，往往就成为解决问题的突破口。

一个定义或定理对应一个基本图形；反之一个基本图形所对应的性质不是唯一的。例如，勾股定理对应一个直角三角形，但给出一个 Rt$\triangle ACB$，$\angle C=90°$，它所对应的性质除了 $c^2=a^2+b^2$外，还有$\angle A+\angle B=90°$，$c>a$，$c>b$（a，b，c 均为边）等。在解题过程中，如果只会将复杂的图形分解为基本图形，而对它的性质认识不够，也有可能寻找不到解题方法，或者使解法既不简便也不灵活，所以熟悉和灵活应用基本图形的性质，就成为提高平面几何解题能力的重要环节。

2. 明确添加辅助线的目的和意义，掌握基本图形的基本辅助线

运用“综合分析法”分析问题时，直接运用分解出的基本图形的性质去解决问题往往是比较困难的，因此，一般是根据问题的需要，结合基本图形的特征，试探性地添设一些基本辅助线，从而产生新的基本图形，然后再综合运用它们的性质去勾通条件和结论之间的因果关系，寻找到解题的方法。

例如，“AB 是$\odot O$ 的直径，C 为$\odot O$ 上任一点，$CD\perp AB$ 于 D”这个图形是由两个基本图形组成：一是“$\odot O$ 及其直径 AB”，二是“两条互相垂直的直线 CD 和 AB”。由于直接应用它们的性质去解决问题比较困难，故一般有两种添线产生新的基本图形的方法(图 1-4)：

(1) 连结 AC 和 BC，从而出现“Rt$\triangle ACB$ 及其斜边上的

高 CD"和"$\odot O$ 及其圆周角$\angle CAB$"等新的基本图形；

(2) 延长 CD 交$\odot O$ 于 E，从而出现"$\odot O$ 及其直径 $AB \perp CE$ 弦"这个新的基本图形。

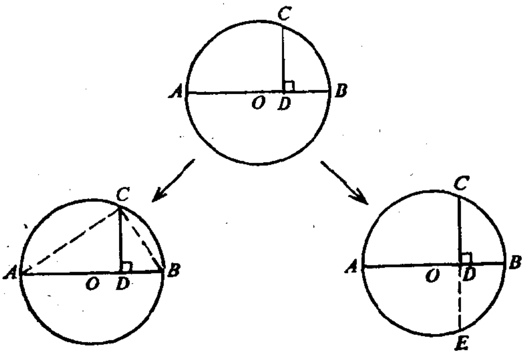


图 1-4

辅助线的添设虽然千变万化，似乎没有固定的模式可循，但如果从"添线产生新的基本图形"这一认识去考虑，还是有一定的规律性的。例如两圆相交时，可考虑作出它的公共弦；两圆相切时，可考虑过切点作出它的公切线或作连心线。在明确添线的目的和意义的基础上，熟悉甚至记住一些基本图形的基本辅助线，对提高添线的能力是有所裨益的。

必须强调指出，辅助线的添设不能死记硬背，一般都是在分析的基础上根据问题的需要逐一添加上去的。添设哪一条辅助线，既要想到基本图形的基本辅助线，更要想到问题的特殊性和复杂性，具体情况具体分析。

最后要明确添设辅助线的依据。添设辅助线既要考虑需要，又要考虑可能，例如"过 A 点作线段 BC 的垂直平分线 EF"，这种作法是错误的，毫无根据的，为此必须明确，辅助线的添设应该以基本作图法为依据，没有基本作图法保证

的辅助线是绝对不允许的。

3．明确定理的作用，学会对定理分类归纳的方法

"分析结论、据性索图"这一步骤要求明确定理的作用，如果作不到这一点，就不能迅速而又准确地找出解决问题的根据。例如，在例1中，最后为什么能选用"在同圆中，弧等则所对的弦也相等"这一定理去证明这个问题呢？除了图形的直观因素外，关键在于已经明确了这个定理是证明两线段相等的依据之一，因此在"分解图形、据图导性"的基础上，问题就能迎刃而解。

为了更好地明确定理的作用，就必须按照定理的结论进行分类归纳。例如：

（1）同位角相等（或内错角相等，或同旁内角互补），则两直线平行；

（2）两直线同时垂直于（平行于）第三条直线，则两直线平行；

（3）平行四边形对边平行；

（4）三角形中位线平行于第三边；

（5）梯形中位线平行于两底；

（6）一直线截三角形两边所得的对应线段成比例，则这直线平行于第三边；

（7）圆内两条弦所夹的弧相等，则这两弦所在的直线平行。

以上七条同属一种类型，它们都是证明两直线平行问题的主要根据。如果这种分类清楚了，当拿到一道证明"平行"的问题时，就可以在"分解图形、据图导性"的基础上，根据两条直线所在图形的特征，从这类定理中选出最合适的定理去解决这个问题。

关于定理的分类归纳，一般平面几何复习参考书都有，本书不再作详细叙述。

二、进行解题探讨的方法

目前有些青年学生做了很多平面几何题，但收效不大，题的形式或内容稍微改变就束手无策了。其原因之一就是只管做，但做了以后不再思考、分析和探讨；不善于分类、归纳和总结。要改变这种状况，方法和措施是多方面的，其中认真做好解题探讨，从中总结解题规律，是提高平面几何解题能力的重要途径。

解题探讨可围绕以下六方面进行：

1．是否一题多解；

2．所使用的方法或解题思路是否具有普遍的适用性；

3．是否有特殊情况（一般指推论），一般情况如何，是否可以推广；

4．条件变化是否引起结论变化；

5．逆命题是否成立；

6．命题是否有应用。

下面举例说明做好解题探讨的具体方法。

例 2 $\triangle ABC$，一直线交 BC 延长线于E，交 AC 于F，交 AB 于 G，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1.$$

略证：如图 1-5，作 $CD\parallel EG$交 AB于 D，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=\frac{BG}{GD}\cdot\frac{GD}{AG}\cdot\frac{AG}{GB}=1.$$

［解题探讨］

1．一题多解

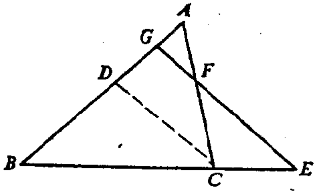


图　1-5

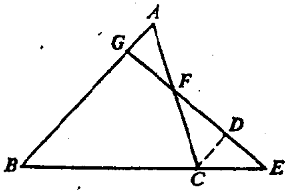


图　1-6

证②：

如图 1-6，作$CD \parallel AB$交EG于D，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=\frac{BG}{CD}\cdot\frac{CD}{AG}\cdot\frac{AG}{GB}=1\ .$$

证③（射影法）：

如图 1-7，作 $AA' \perp EG$ 于 A'，$CC' \perp EG$ 于 C'，$BB' \perp EG$ 于 B'，则 $BB' \parallel AA' \parallel CC'$，

$$\therefore\quad \frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BB'}=1$$

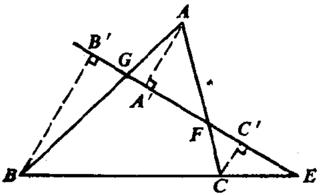


图　1-7

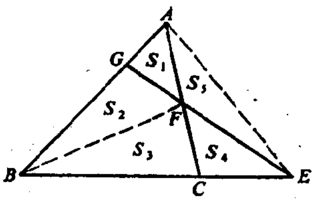


图　1-8

证④：

如图 1-8（据两三角形等高，面积比等于底之比），连结AE、BF，设$\triangle AFG$、$\triangle BFG$、$\triangle BCF$、$\triangle CEF$、$\triangle AEF$的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4、S_5，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}\cdot\frac{GF}{EF}\cdot\frac{EF}{GF}$$

$$=\frac{S_3+S_4}{S_4}\cdot\frac{S_4}{S_5}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S_2}{S_3+S_4}\cdot\frac{S_5}{S_1}=1.$$

2．证题思路对某些类型问题具有普遍的适用性

上述四种证法虽然不同，但从本质上看，它们有一个共同点，其基本思路是：将几个比都转化为等比（或保留 其中一个），使之两两约分之后得1。这种转化方法一般都是根据有关线段成比例定理和性质，或者利用面积比的某些性质(将线段比转化为相等的面积比)。

这种思路不仅适用于证明若干个比的乘积等于1(或其它常数)的问题，而且也适用于证明若干个比之和等于1(或其它常数）的问题。即：证明

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=K,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=K$$

等类型问题可以考虑运用这种思考问题的方法。

3．命题的特殊情况（图1-5）

（1）当 F 为 AC 的中点时

$\because\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$，$\therefore\frac{BE}{EC}=\frac{GB}{AG}$成立。

当 G 为 AB 中点时也作类似讨论。

（2）当 C 为 BE 中点时

$\therefore\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$，$\therefore\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=\frac{1}{2}$成立。

（3）当 $AG=AF$ 时

$\because\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$，$\therefore\frac{BE}{EC}=\frac{GB}{CF}$成立。

类似可以讨论其它的特殊情况。

4. 命题的一般叙述形式

对条件中直线与三角形各边相交的不同情况进行分析和研究发现：当直线和三角形各边以下列形式相交时，命题仍然成立(图 1-9)。

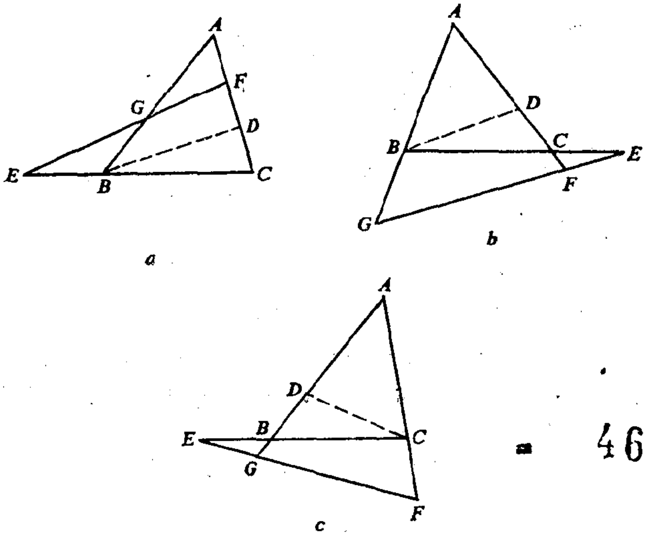


图 1-9

由此得到命题的一般叙述形式为：

$\triangle ABC$，一直线截BC、CA、AB或其延长线于E、F、G，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1.$$

5. 逆命题成立

$\triangle ABC$，E、F、G分别是 BC、CA、AB 三边或其延长线上的点，且$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$，则$E$、$F$、$G$ 共线。

略证：如图 1-10，设E 在 BC 的延长线上，F 在 AC

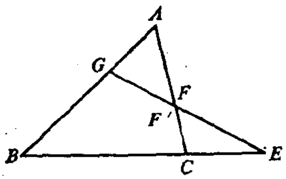


图 1-10

上，G在AB上。连结GE交AC于F'，则

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF'}{F'A}\cdot\frac{AG}{GB}=1, \quad ①$$

但
$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1, \quad ②$$

比较① 和② 可得$\frac{CF'}{F'A}=\frac{CF}{FA}$，

$\therefore\frac{CF'+F'A}{F'A}=\frac{CF+FA}{FA}$，即$\frac{CA}{F'A}=\frac{CA}{FA}$，

$\therefore F'A=FA$，$\therefore F$和F'重合，

$\therefore E$、F、G共线。

6．*原命题及其逆命题应用举例*

原命题和逆命题合起来叙述为："设E、F、G分别是$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上的点，则它们共线的充分必要条件是$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GB}=1$。"此命题称为梅涅劳斯定理。

梅氏定理在初等几何、近世几何、球面三角中有广泛的应用。例如在解决初等几何中关于共线点问题、线段相等问题、比例线段、面积、甚至某些作图问题都可事半功倍，并在大多数情况下不需作辅助线，下面举两例加以说明。

(1) 在□$ABCD$中，$EF\parallel BC$交AB于E，交CD于F；$HG\parallel AB$交AD于H，交BC于G，则EG、AC、HF共点。

略证：如图 1-11，设AC和EG交于K，只须证明H、F、K共线。

设EGK是$\triangle ABC$的截线，则

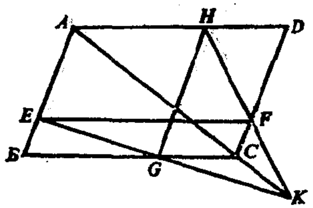


图 1-11

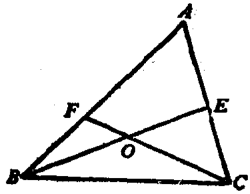


图 1-12

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CK}{KA}=1.$$

但 $AE=DF$, $BE=CF$, $BG=AH$, $CG=DH$,

所以对于$\triangle ACD$：$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AH}{HD}=1$，

$\therefore H$、F、K 共线，AC、EG和HF共点。

(2) $\triangle ABC$，E和F分别在AC和AB上，且$\angle CBE=\angle BCF=\frac{1}{2}\angle A$，$BE$和$CF$交于$O$，则$CE=BF$。

略证：如图 1-12，设 BOE为$\triangle AFC$之截线，$\because OC=OB$，

$$\therefore\quad \frac{AB}{BF}\cdot\frac{FO}{OC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{CE}{BF}\cdot\frac{FO}{OB}\cdot\frac{AB}{EA}=1.$$

又 $\angle BOF=\angle CBE+\angle BCF=\angle A$，$\angle FBO=\angle ABE$，

$\therefore$ $\triangle BOF\backsim\triangle ABE$，$\therefore \frac{FO}{OB}=\frac{EA}{AB}$，

代入上式可得 $CE=BF$.

7. 命题的推广

原命题可以推广为 n 边形的情况。

(1) 当 $ABCD$是四边形时(图 1-13)

设直线 l 交 AB 于L，交 CB 延长线于 M，交 CD 于