平行四邊形和梯形

承 方 著

中国青年出版社

1700

平行四邊形和梯形

承 方 著

中国青年出版社
一九五四年·北京

書號587 數理化60

平行四邊形和梯形

著者 承方

青年·開明聯合組織

出版者 中國青年出版社

北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京中國青年出版社印刷廠

開本787×1092 1/32　一九五四年十一月北京第一版

印張1 5/8　一九五四年十一月北京第一次印刷

字數30,000　印數1—35,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第086號

定價1,700元

內 容 提 要

初中三年級上學期的幾何一科，從學習平行四邊行和梯形開始。本書把這一部分的知識作了系統的整理，並加以重要的補充。對證題、作圖、軌跡和計算四方面，都詳舉典型例題，反覆說明，藉以啓發讀者能把定理和解題方法靈活運用。

目　　次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一　平行四邊形和梯形的概念

中國有一種古老的玩意兒，名叫七巧板，諸位也許都玩過．我們用厚紙做成七塊板，可以排成各式各樣的圖形，其中最有趣的是有許多活像人，而且個個姿態活潑，神氣十足．像圖1所示的兩個人形，一個鼓起肚子，一個彎腰曲背，像在做着踢毽子的遊戲．圖2的兩個人，中間隔着一張桌子，像在聚精會神地打乒乓球．這樣每一個人或一張桌子，都是從七塊一定形狀的板排成的．

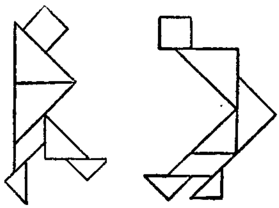

圖 1.

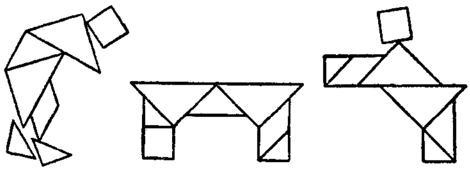

圖 2.

看一看這七塊紙板的形狀，知道其中有五塊都是三角形，兩塊最大，兩塊最小，一塊不大不小．我們在幾何學裏已經學過，知道它們都是等腰直角三角形．又有一塊是正方形，諸位也早已認識了．另外一塊的形狀却很特別，它是斜的四邊形．仔細考察一下，知道它的每兩條相對的邊是互相平行的．這叫做什麽形呢？這就是我們要繼續學習的一種特殊四邊形，名叫平行四邊形，可用記號▱表示．

諸位如果要問，這七塊板是怎樣做成的？它們之間的大小比例怎樣？那末你只要看一看圖 3 所示的一個大正方形，其中各部分的形狀恰和前面每一個人形中的七塊紙板一樣。可見我們只要先取一塊厚紙剪成一個大正方形，再照圖 3 剪開，就可做成這樣的一副七巧板。

如果我們把這樣做成的七塊紙板重新改排，可得圖 4 的一個矩形（就是長方形），或圖 5 的一個大平行四邊形⊖．所

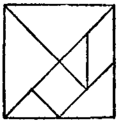

圖 3.

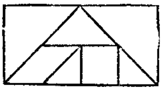

圖 4.

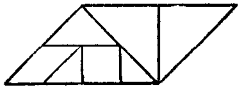

圖 5.

以取一塊如圖式樣的矩形或平行四邊形的厚紙，也可剪開而成一副七巧板。

正方形和矩形的兩雙對邊也分別互相平行，所以它們都是特殊的平行四邊形，即矩形是各角都成直角的平行四邊形，正方形是四邊相等而又各角都成直角的平行四邊形。

另外還有一種特殊的平行四邊形，是僅僅四邊相等的，叫做菱形，用七巧板排不出來，形狀像圖 6 所示．

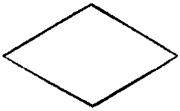

圖 6.

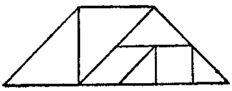

圖 7.

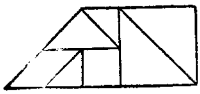

圖 8.

⊖ 圖 4 所示矩形的長二倍於闊；圖 5 所示平行四邊形的一銳角是 45°，而且一條較短的對角綫垂直於兩條較短的邊，這兩形都是特殊的。

我們用七巧板再來排排看，又可得圖 7 和圖 8 的兩種四邊形，它們都只有一雙對邊互相平行，這叫做梯形．在梯形中，兩條平行的邊都叫做底，有時分別稱在上的是上底，在下的是下底．兩條不平行的邊都叫做腰．又在上底兩端的角叫‘上底角’，在下底兩端的角叫‘下底角’．

因爲圖 7 的梯形的兩條腰相等，所以叫做等腰梯形；圖 8 的梯形的一腰垂直於二底，叫做‘直角梯形’．可見這兩種梯形都是特殊的梯形．

如果梯形的二腰不相等，而任何一腰又不垂直於底，那末就是普通的梯形，像圖 9 的 $ABCD$，用七巧板也排不成．

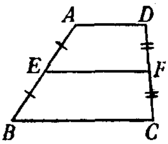

圖 9.

在圖 9 中，取兩腰的中點 E 和 F，那末聯 E、F 所得的綫段叫做梯形的中綫．

二　平行四邊形的特性

平行四邊形有許多重要的特性，除掉根據定義，知道它有兩雙對邊分別互相平行外，其他的特性都可利用平行綫和全等三角形的定理加以證明．現在把各種平行四邊形的特性分類列舉出來，但須注意所有普通平行四邊形的特性，矩形、菱形或正方形也都具有；而所有矩形和菱形的特性，正方形也都具有．

一般平行四邊形的特性：

(1) 兩雙對邊分別互相平行．

(2) 兩雙對邊各相等．

(3) 兩雙對角各相等．

(4) 每兩個鄰近的角互爲補角．

(5) 兩條對角綫互相平分．

(6) 有一個對稱中心，就是兩條對角綫的交點．

矩形的特性，除了上面的六個，還有：

(1) 四角都是直角．

(2) 兩條對角綫相等．

(3) 有兩條對稱軸，就是通過對稱中心而平行於兩雙對邊的兩條直綫．

菱形的特性，除了上面平行四邊形的六個，還有：

(1) 四邊相等．

(2) 兩條對角綫互相垂直平分.

(3) 對角綫平分各角.

(4) 另外兩條對稱軸,就是它的兩條對角綫.

正方形的特性,除了上面的平行四邊形的六個,還有:

(1) 四邊相等,而四角又都是直角.

(2) 有四條對稱軸,兩條是過對稱中心而平行於邊的直綫,另外兩條是對角綫.

以上許多定理,都是幾何學上的重要基礎,我們必須牢記,並熟練它們的應用.下面便是兩個應用的例子.

例題一 等腰三角形底邊上的任意點到二腰距離的和,等於腰上的高.

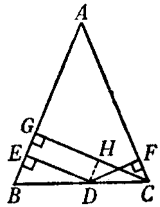

圖 10.

假設 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是BC上的任意點,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,$CG\perp AB$(如圖10).

求證 $DE+DF=CG$.

〔思考〕 要證二綫段的和等於第三綫段,通常有兩種證法,即 (1) 分第三綫段成二部分,證這二部分各等於題設二綫段之一(分解法);(2) 把題設二綫段相加而成一綫段,證它等於第三綫段(合成法).

現在先設法用分解法來證.因爲DE和CG都是AB的垂綫,故互相平行,試從D作$DH \parallel BA$,造成$\square GEDH$,則CG被分成二部分,而其中的HG等於DE.以下只須再證$CH=DF$就得.

易證$\triangle DCH \cong \triangle CDF$,於是本題獲得解決.

合成證法的'思考'跟上面的類似.

證明 (一) 1. 從D作$DH \parallel BA$,交CG於H.因$DE\perp AB$,$CG\perp AB$,故$DE \parallel CG$.於是由定義知$GEDH$是$\square$,它的對邊相等,即DE

$=HG$。

2. 因 $DH \parallel BA$，故 $\angle DHC = \angle BGC = 90°$，$\angle HDC = \angle B$（同位角）。又 $\angle C = \angle B$（等腰△的底角），故 $\angle HDC = \angle C$。

3. 因 $\angle DHC = \angle CFD$（直角），$\angle HDC = \angle C$，$DC = DC$，故 $\triangle DCH \cong \triangle CDF$（s.a.∠R = s.a.∠R.），$DF = CH$。

4. 把 1.3. 的兩個結果相加，得 $DE + DF = CG$。

證明（二）1. 從 C 作 $CH \parallel AB$（如圖 11），交 ED 的延長線於 H。同前，知 $GEHC$ 是▱，$HE = CG$，即 $DE + DH = CG$。

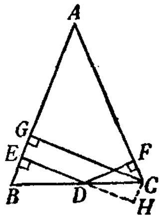

圖 11.

2. 因 $CH \parallel AB$，故 $\angle CHD = \angle BED = 90°$，$\angle DCH = \angle B$（內錯角）。又 $\angle DCF = \angle B$，故 $\angle DCH = \angle DCF$。

3. 因 $\angle CHD = \angle CFD$，$\angle DCH = \angle DCF$，$DC = DC$，故 $\triangle DCH \cong \triangle DCF$，$DH = DF$。

4. 以 3. 的結果代入 1. 的結果，得 $DE + DF = CG$。

例題二 **假設** 在矩形 $ABCD$ 中（圖 12），$AE \perp BD$，$BE : ED = 1 : 3$，從二對角線的交點 O 作 $OF \perp AD$，$OF = 2$ 米。

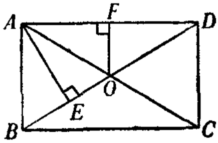

圖 12.

求 BD 的長。

〔思考〕 由題設的比例式，易知 $BE = \frac{1}{4}BD$。但因矩形的對角綫互相平分，故 $BO = \frac{1}{2}BD$，$BE = \frac{1}{2}BO$，即 $BE = EO$。

在 $\triangle ABO$ 中，已知高平分底邊，則 $\triangle ABO$ 必爲等腰三角形，即 $AB = AO$。又因矩形對角綫相等，它們的一半也相等，即 $AO = BO$，故 $\triangle ABO$ 是正三角形，$\angle BAO = 60°$，$\angle OAF = 30°$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在$R\triangle OAF$中，已知一銳角是$30°$，則可由已知的OF求AO，從而得所求的BD。

解 1. 因 $BE=\frac{1}{4}BD$，$BO=\frac{1}{2}BD$，故 $BE=\frac{1}{2}BO$，即 $BE=EO$。

2. 既知AE垂直平分BO，則$AB=AO$。又$AC=BD$，折半得$AO=BO$，故$\triangle ABO$是正三角形，$\angle BAO=60°$。

3. 在$R\triangle AOF$中，$\angle OAF=90°-60°=30°$，故$AO=2\,FO=4$米。

4. $\therefore\quad BD=2\,BO=2\,AO=8$米。

研究題一

1. 從等腰三角形底邊上的任意點引二腰的平行綫，則所成平行四邊形的周等於三角形二腰的和。

2. 如圖13，$AB \perp\!\!\!\!= CD$⊖，作MN的垂綫AE、BF、CG、DH，則$EF=GH$。

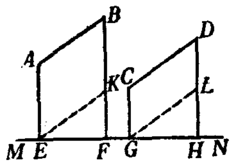

圖 13.

〔提示〕 仿例題一，添作補助綫，造成平行四邊形。但所添的綫不一定要在圖示的位置。

3. 等腰三角形底邊的延長綫上的任意點到二腰距離的差，等於腰上的高。

4. 正三角形內任意一點到三邊距離的和，等於這三角形的高。

〔提示〕 過這點引底的平行綫，再根據例題一。

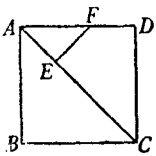

圖 14.

5. 如圖14，在正方形$ABCD$的對角綫AC上取$CE=CD$，作

⊖ $\perp\!\!\!\!=$是旣平行而又相等的記號。

$EF\perp AC$，則 $AE=EF=FD$。

〔提示〕 先計算$\angle CAD$的度數，從而證$\triangle AEF$等腰。繼續設法添一補助綫，造成全等三角形，或造成等腰三角形，證 $EF=FD$。

6. 如圖 15，$\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 是直角，$ACFH$、$BCED$ 都是正方形，HM、DK 都垂直於 AB，則 $HM+DK=AB$。

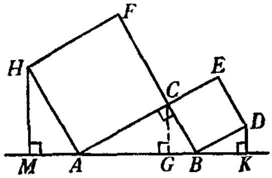

圖 15.

〔提示〕 作 $CG\perp AB$，設法證 $\triangle AHM\cong\triangle CAG$。

7. 如圖 16，在正方形 $ABCD$ 的 CD 邊上任取一點 E，延長 BC 到 F，使 $CF=CE$，則 $BE\perp DF$。

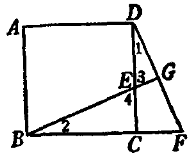

圖 16.

〔提示〕 先利用全等三角形證$\angle 1=\angle 2$，再設法證 $\angle DGE=\angle BCE$。

8. 在$\square ABCD$中，$AB=3$米，$AD=8$米，$\angle A$、$\angle D$ 的平分綫各交BC於 E、F，求 BE、EF、FC 的長。

9. 在$\square ABCD$ 中，從一頂點 B 作 $BE\perp AD$，$BF\perp CD$，已知$\angle EBF=1\frac{1}{2}\angle R$，求$\square ABCD$的四個角。

〔提示〕 先在四邊形 $BEDF$ 中求$\angle D$。

10. 在矩形$ABCD$ 的 BC 邊上取中點 M，若 $\angle AMD=90°$，矩形的周長 24 米，求各邊。

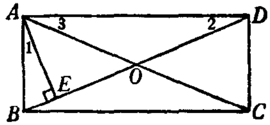

圖 17.

〔提示〕 由$\triangle ABM\cong\triangle DCM$，可證這兩個三角形都是等腰直角三角形，於是知矩形的周長是AB的 6 倍。

11. 如圖 17，在矩形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$，$\angle DAE:\angle EAB=3:1$，求$\angle EAC$。

〔提示〕 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 1$的度數易於求得。

12．如圖18，等腰直角三角形ABC的斜邊$BC=45$厘米，內接矩形$DEFG$的一邊DE在BC上．若矩形二鄰邊的比是$5:2$，求它的邊長。

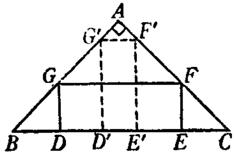

圖 18.

〔提示〕 如果長邊在BC上，則$BD:2=DE:5=EC:2$，否則$BD:5=DE:2=EC:5$，可用配分比例解。

13．在菱形$ABCD$中，作$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，若E、F各是BC、CD的中點，求菱形的各角。

14．如圖19，正方形$ABCD$的邊長1米，以BD爲邊作正方形$BDEF$，求$BDEF$的對角綫。

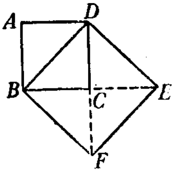

圖 19.

〔提示〕 因BD平分$\angle ABC$，故$\angle DBC=45°$，於是BC平分$\angle DBF$，但BE也平分$\angle DBF$，故BC合於BE。

三　平行四邊形的決定

根據定義，如果已知一個四邊形的兩雙對邊各平行，就可決定它是平行四邊形，在上節的例題一裏已經應用過。除此以外，用來決定一個四邊形是平行四邊形的定理還多，其中的大部分是上節所舉表示平行四邊形性質各定理的逆定理。現在就各種平行四邊形分別舉示如下：

一般平行四邊形的決定：

(1) 四邊形的兩雙對邊各相等，則爲平行四邊形。

(2) 四邊形的兩雙對角各相等，則爲平行四邊形。

(3) 四邊形的一雙對邊平行而且相等，則爲平行四邊形。

(4) 四邊形的二對角綫互相平分，則爲平行四邊形。

矩形的決定：

(1) 平行四邊形的一角是直角，則爲矩形（因易知其他三角都是直角）。

(2) 平行四邊形的二對角綫相等，則爲矩形。

(3) 四邊形的四角都是直角，則爲矩形（因爲由兩雙對角各相等，可先決定它是平行四邊形，再由各角爲直角，決定它是矩形）。

菱形的決定：

(1) 平行四邊形的二鄰邊相等，則爲菱形（因易知四邊都相等）。

(2) 平行四邊形的二對角綫互相垂直，則爲菱形。

(3) 平行四邊形的一對角綫平分一內角，則爲菱形。

(4) 四邊形的四邊相等，則爲菱形（因爲由兩雙對邊各相等，可先

決定它是平行四邊形，再由各邊相等決定它是菱形)。

正方形的決定：

(1) 平行四邊形有一角是直角，且二鄰邊相等，則為正方形。

(2) 平行四邊形的二對角綫相等，且互相垂直，則為正方形。

關於正方形的決定，實際不限於上舉的兩種情形。我們只要先證決定矩形的任一條，再證決定菱形的任一條就得。

我們以前要證二直綫平行，常先證等角，或證它們分別跟第三綫平行；現在學過了平行四邊形，就有了新的證法。利用上舉決定平行四邊形的四定理之一，證得一形是平行四邊形，就可斷定其中的一雙對邊平行。

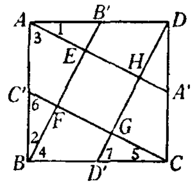

圖 20.

例題三　假設　如圖 20，A'、B'、C'、D' 是正方形 $ABCD$ 各邊的中點，AA'、BB'、CC'、DD' 分別相交於 E、F、G、H。

求證　$EFGH$ 是正方形。

〔思考〕 要證 $EFGH$ 是正方形，須分三步手續：(1) 先證它是平行四邊形；(2) 再證它是矩形；(3) 後證它是菱形。

要解決(1)，須證 $EF \parallel HG$，$EH \parallel FG$，最簡易的證法是證 $BB'DD'$ 和 $AA'CC'$ 各是平行四邊形。要解決(2)，可證 $EFGH$ 有一角是直角。要解決(3)，可證二鄰邊 $EF=FG$。

證明　1. 因 $AD \perp\!\!\!\!= BC$，故它們的一半 $B'D \perp\!\!\!\!= BD'$，$BB'DD'$ 是 ▱，$EF \parallel HG$。同理，$EH \parallel FG$，故 $EFGH$ 是▱。

2. 在$\triangle ABB'$、$\triangle DAA'$ 中，$AB=DA$，$AB'=DA'$，$\angle A=\angle D$，故 $\triangle ABB' \cong \triangle DAA'$，$\angle 1=\angle 2$。

3. 因 $\angle FEH$ 是$\triangle ABE$ 的外角，故$\angle FEH=\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3$

$=90^\circ$，$EFGH$ 是矩形。

4. 在$\triangle ABE$、$\triangle BCF$ 中，$\angle 2=\angle 5$（仿 2. 可證），$\angle 3=\angle 4$（等角的餘角），$AB=BC$，故$\triangle ABE\cong\triangle BCF$，$BE=CF$。

5. 在 $\triangle BC'F$、$\triangle CD'G$ 中，$\angle 2=\angle 5$，$\angle 6=7$（因平行綫間的同位角相等，故 $\angle 6=\angle 3$，$\angle 7=\angle 4$），$BC'=CD'$，故 $\triangle BC'F\cong\triangle CD'G$，$BF=CG$。

6. 由 4.5. 的兩個結果相減，得 $EF=FG$，故 $EFGH$ 是菱形。

7. 綜合 3.6. 可知 $EFGH$ 是正方形。

例題四 已知一角，二對角綫的和，求作菱形。

假設 如圖 21，二對角綫的和是 S，一角的大小是A_1。

求作 一菱形。

〔解析〕 假定$A'B'C'D'$是所求的菱形；$\angle A'=A_1$，$A'C'+B'D'=S$。因$A'O'=\frac{1}{2}A'C'$，

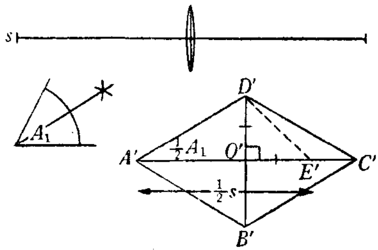

圖 21.

$D'O'=\frac{1}{2}B'D'$。若取 $O'E'=D'O'$，則 $A'E'=\frac{1}{2}S$。又因$D'B'\perp A'C'$，故 $\triangle O'D'E'$ 是等腰直角三角形，$\angle A'E'D'=45^\circ$。又因 $A'C'$ 平分$\angle A'$，故$\angle D'A'E'=\frac{1}{2}A_1$。於是可先作$\triangle A'D'E'$，繼續再作其他部分㊀.

作法 1. 先作 $\triangle ADE$（如圖 22），使 $AE=\frac{1}{2}S$，$\angle DAE=\frac{1}{2}A_1$，$\angle DEA=45^\circ$。

2. 從 D 作 DO，交 AE 於 O，使$\angle EDO=45^\circ$。

㊀ 這種作圖法叫做‘奠基法’，讀者可參閱‘三角形’一書（承方著，中國青年出版社出版）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com