中等师范学校数学课本

代数与初等函数

第三册

$(a+b)^1$ — — — — — — — — 1 1

$(a+b)^2$ — — — — — — — 1 2 1

$(a+b)^3$ — — — — — — 1 3 3 1

$(a+b)^4$ — — — — — 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ — — — 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6$ — — — 1 6 15 20 15 6 1

人民教育出版社

封面设计：胡茂林

中等师范学校数学课本

（试 用 本）

代数与初等函数

第 三 册

蒋华辅 夏炎炎 邓国扬 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张4.75 字数 96,000

1983年1月第1版 1986年1月第4次印刷

印数 682,001--892,000

书号 K7012·0394 定价 0.53 元

目　录

第十一章　排列、组合和二项式定理

在生产实际和科学实验中，经常遇到象下面这样的一些问题：在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上，需要使用多少种不同的飞机票？有二十个乒乓球代表队参加比赛，采用单循环制，一共要比赛多少场？回答这些问题，就要用到排列和组合的知识．排列与组合是二项式定理的预备知识，也是进一步学习概率论、数理统计和高等代数的基础．

一　排列与组合

11.1　基本原理

我们先看下面的问题：

例 1　从甲地到乙地，可以乘火车，可以乘汽车，也可以乘轮船．一天中，火车有 5 班，汽车有 4 班，轮船有 2 班．那么从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

解： 因为乘火车有 5 种走法，乘汽车有 4 种走法，乘轮船有 2 种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地，因此，从甲地到乙地共有

$$5+4+2=11$$

种不同的走法．

一般地说，有如下原理：

加法原理 做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法．

例2 由 A 小学去 B 小学的道路有 3 条，由 B 小学去 C 小学的道路有 2 条(图 11-1)．从 A 小学经 B 小学去 C 小学，共有多少种不同的走法？

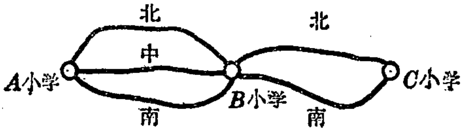


图 11-1

解：这里，从 A 小学到 B 小学有 3 种走法，按这 3 种走法中的每一种走法到达 B 小学后，再从 B 小学到 C 小学又有 2 种走法．因此，从 A 小学经 B 小学去 C 小学共有

$$3\times2=6$$

种不同的走法．

一般地说，有如下原理：

乘法原理 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法．

例3 一个电报号码用四位数字代表一个字，最多可以代表多少个不同的字？

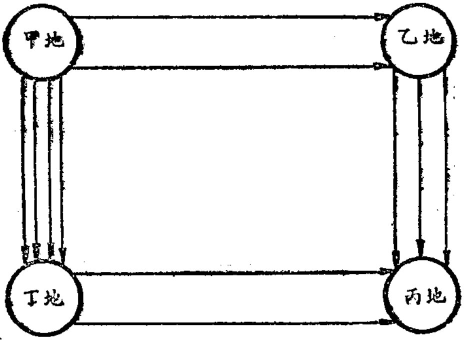
解：任意一个四位数字的电报号码，例如，2756，是在四个位置上，每个位置填写从 0 到 9 这十个数字中的一个而得的.

在左边第一个位置上，可以从 0 到 9 这十个数字中任选一个，有 10 种方法. 第二个位置上，由于可以重复取，仍然可从十个数字中选一个，也有 10 种方法. 其余两个位置上也一样. 由乘法原理，共可代表的总字数是 10^4 个.

练　习

1. 一件工作可以用两种方法完成. 有 5 人会用第一种方法完成，另有 4 人会用第二种方法完成. 任选一个人来完成这件工作，共有多少种选法？
2. 在读书活动中，一个学生要从 2 本不同的科技书、2 本不同的政治书、3 本不同的文艺书里任选一本，共有多少种不同的选法？
3. 一名儿童做加法游戏. 在一个红口袋中装着20张分别标有数目1, 2, …, 19, 20的红卡片，从中任抽一张，把上面的数作为被加数；在另一个黄口袋中装着10张分别标有数目1, 2, …, 9, 10的黄卡片，从中任抽一张，把上面的数作为加数. 这名儿童一共可以列出多少个加法式子？
4. 乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项？
5. 有 5 个小电灯排成一排，每个电灯有亮和不亮两种状态，总共可以表示多少种不同信号？
6. 如图，从甲地到乙地有 2 条路可通，从乙地到丙地有 3 条

路可通；从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通．从甲地到丙地共有多少种不同的走法？



（第 6 题）

7. 有不同的中文书 9 本，不同的英文书 7 本，不同的法文书 5 本，由其中取出不同文字的书 2 本，共有几种不同的取法？

11.2 排列

我们看下面的问题：

例 1 北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线，需要准备多少种不同的飞机票？

解： 这个问题就是从北京、上海、广州三个民航站中，每次取出两个站，按照起点站在前、终点站在后的顺序排列，求一共有多少种不同的排法．

首先确定起点站，在三个站中，任选一个站为起点站，有 3 种方法；其次确定终点站，当选定起点站以后，终点站就只能在其余的两个站中去选，因此，有 2 种方法．那么，根据乘法

原理，在三个民航站中，每次取两个，按起点站在前、终点站在后的顺序排列的不同方法共有

$$3\times2=6$$

种．也就是说，需要准备如下 6 种不同的飞机票：

起点站	终点站	飞机票
北京	上海	北京——上海
	广州	北京——广州
上海	北京	上海——北京
	广州	上海——广州
广州	北京	广州——北京
	上海	广州——上海

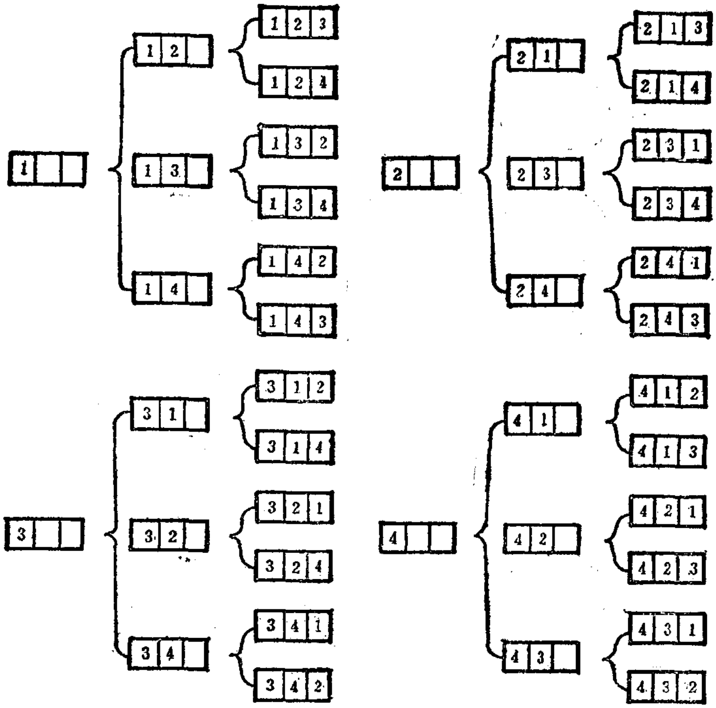
例 2 由数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解： 这个问题就是从 1, 2, 3, 4 这四个数字中，每次取出三个，按照百位、十位、个位的顺序排列起来，求一共有多少种不同的排法．第一步，先确定百位上的数字，在 1, 2, 3, 4 这四个数字中任取一个，有 4 种方法；第二步，确定十位上的数字，当百位上的数字确定以后，因为数字不能重复，十位上的数字只能从余下的三个数字中去取，有 3 种方法；第三步，确定个位上的数字，当百位、十位上的数字都确定以后，个位上的数字只能从余下的两个数字中去取，有 2 种方法．根据乘法原理，从四个不同的数字中，每次取出三个排成一个三位数的方法共有

$$4\times3\times2=24$$

种．也就是说，可以排成 24 个不同的三位数．具体排法

如下：



我们把被取的对象(如上面问题中的民航站、数字)叫做**元素**．上面第一个问题，就是从3个不同的元素中，任取2个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法；第二个问题，就是从4个不同的元素中，任取3个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法．

一般地说，从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个（在本章中，只研究被取出的元素各不相同的情况），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**．

从排列的定义知道，如果两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序也必须完全相同．如果所取的元素不完全相同，如例1中的飞机票“上海——北京”和“上海——广州”，它们是两个不同的排列．即使所取的元素完全相同，但排列顺序不同，也不是相同的排列．如例2中的三位数“213”和“231”，虽然它们的元素相同，但排列顺序不同，也是两个不同的排列．

11.3 排列数公式

象上节那样，掌握了排列的方法，我们就可以把所有的排列都写出来．能够把所有的排列写出来，当然也就知道所有排列的个数是多少了．但是，由于在生产实际中遇到的问题，往往有很多的元素，如从100件不同的成品里，每次抽取5件来排列，所有不同的排列数就很大（实际共有9,034,502,400种）．即使你排的速度很快，一分种能排成100种，一天工作8小时，也需要500多年的时间才能排完．因此，在实际问题中，一般就不可能也不需要写出所有的排列来，而只需给出计算所有排列的个数的公式就可以了．

从 n 个不同元素中取出 m $(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m 表示*.

例如，从5个元素里，每次取出2个元素的排列，排列数是多少？

因为在每一种排列里都有两个元素，把这两个元素所排

* *P*是英文 Permutation(排列)的第一个字母.

列的位置划分为第 1 位、第 2 位．第 1 位可从这 5 个元素里任意取出一个来排，有 5 种方法；第 2 位只能在剩下的5－1个元素里任意选取一个来排，有5－1种方法，如图 11-2 所示．

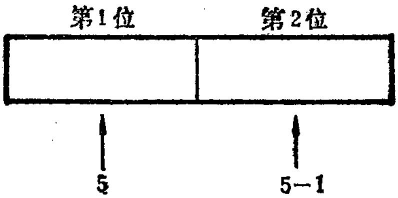


图 11-2

两个位置排完，事件完成，根据乘法原理，得 $P_5^2=5\times4=20$，即有 20 种不同的排列．

又如，从 6 个元素里，每次取出 3 个元素的排列，排列数是多少？

因为在每一种排列里都有3个元素，把这3个元素所排列的位置划分为第 1 位、第 2 位、第 3 位．第 1 位可以从这 6 个元素里任意取出一个来排，有 6 种方法；第 2 位从剩下的6－1个元素里任选一个来排，有6－1种方法；第 3 位从剩下的6－2个元素里任选一个来排，有6－2种方法，如图 11-3 所示．三个

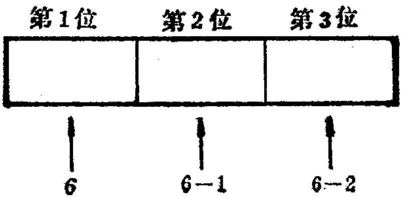


图 11-3

位置排完，事件完成，根据乘法原理，得到 $P_6^3=6\times5\times4=120$，

即有 120 种不同的排列。

现在问：从 n 个元素里，每次取出 $m(m\leq n)$ 个元素的排列，排列数 P_n^m 是多少？

对于求排列数 P_n^m 可以这样来考虑：假定有排好顺序的 m 个空位（图 11-4），从 n 个不同元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，任意取 m 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由一种填法得到，因此，所有不同填法的种数就是排列数 P_n^m.

第 1 位	第 2 位	第 3 位		第 m 位
			……	
n	$n-1$	$n-2$		$n-m+1$

图　11-4

如图 11-4 所示，我们把填入 m 个空位分成 m 个步骤来完成：第一步填入第 1 位，第二步填入第 2 位，……，第 m 步填入第 m 位．第 1 位从 n 个元素中任选一个填入，共有 n 种填法．第 2 位只能从余下的 $n-1$ 个元素中任选一个填入，共有 $n-1$ 种填法．第 3 位只能从余下的 $n-2$ 个元素中任选一个填入，共有 $n-2$ 种填法．依此类推，当前面的 $m-1$ 个空位都填入后，第 m 位只能从余下的 $n-(m-1)$ 个元素中任选一个填入，共有 $n-m+1$ 种填法．根据乘法原理，全部填入 m 个空位共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

种填法．所以得到公式

$$\boxed{P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).}$$

这里 n,m 是自然数，并且 $m\leqslant n$. 这个公式叫做**排列数公式**。

在排列数公式中，当 $m=n$ 时，有

$$P_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

这个公式指出，n 个不同元素全部取出的排列数，等于自然数 1 到 n 的连乘积.

一般地，n 个不同元素全部取出的排列，叫做 n 个不同元素的**全排列**.

自然数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的**阶乘**，用 $n!$ 表示. 所以 n 个不同元素的全排列数公式可写成

$$\boxed{P_n^n=n!.}$$

排列数公式可作如下变形：

$$\begin{aligned}P_n^m&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\\&=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-m)!},\end{aligned}$$

因此，排列数公式还可写成

$$\boxed{P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.}$$

注意 为了使这个公式在 $m=n$ 时也能成立，我们规定

$$0!=1.$$

例 1 计算 P_7^4, P_{100}^2 和 P_n^3.

解： $P_7^4=7\times6\times5\times4=840$;

$P_{100}^2=100\times99=9900$;

$$P_n^3=n(n-1)(n-2).$$

例 2 有五面不同颜色的旗，每次可取一面、两面或三面按不同顺序挂在旗杆上表示信号，一共可以表示多少种不同的信号？

解： 用一面旗作信号有 P_5^1 种，用两面旗作信号有 P_5^2 种，用三面旗作信号有 P_5^3 种．根据加法原理，所求的信号的种数是

$$P_5^1+P_5^2+P_5^3=5+20+60=85(\text{种}).$$

答： 一共可以得到 85 种不同的信号．

例 3 用 0 到 9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解法一： 要组成的是没有重复数字的三位数，就是要排好这个三位数的百位、十位和个位上的数字．分两步来排：先排百位上的数字，因为百位上的数字不能为 0，只能从 1 到 9 这九个数字中任选一个，有 P_9^1 种选法．再排十位和个位上的数字，当百位数字确定后，十位和个位上数字的选法，可以从余下的九个数字中任选两个，有 P_9^2 种选法．这样，每一种排法对应的是一个三位数．根据乘法原理，所求的三位数的个数是

$$P_9^1\cdot P_9^2=9\times9\times8=648.$$

解法二： 从 0 到 9 这十个数字中任取三个数字的排列数为 P_{10}^3．在这些排列里包括两类：一类是 0 在百位的排列，有 P_9^2 种；另一类是 0 不在百位的排列，这些排列组成的没有重复数字的三位数是符合要求的三位数．因此，所求的三位数的个数是

$$P_{10}^{3}-P_{9}^{2}=10\times9\times8-9\times8=648.$$

这种解法的特点是：先不考虑"限制条件"，求出排列总数；然后，把这些排法分为两类或几类，即符合条件的与不符合条件的；然后求出不符合条件的排列数，根据加法原理，就可以间接地求出符合条件的排列数了．

解法三：因为百位数不能为 0，先把数字 0 放在一边，每一位都不含有 0 的三位数有 P_9^3 个，这些数是符合要求的一部分，另外一部分是 0 在十位或个位上的三位数．这一部分可以这样计算：在不含有数字 0 的两位数的中间或末尾放上数字 0，使它构成三位数（如 102 或120 等），而不含有数字 0 的两位数共有 P_9^2 个，因此这部分三位数共有 $2\times P_9^2$ 个．由此我们得到所求的三位数一共有

$$P_9^3+2P_9^2=9\times8\times7+2\times9\times8=648.$$

这种解法是从直接求出符合条件的排列出发，把它分成含有数字 0 和不含有数字 0 这两类，再根据加法原理把它们相加而得．

答：可以组成 648 个没有重复数字的三位数．

例 3 的三种解法是比较常用的方法，并不一定都是简捷的方法，关键在于掌握这种分析问题和解决问题的方法，能够按照实际问题灵活运用．

练　习

1. 判断下列问题，哪些属于排列问题（不必计算）：

(1) 从三个连续的自然数里每次取出两个相加，最多可以得到几个不同的和；

(2) 从三个不等差的自然数里每次取出两个相减，最多可以得到几个不同的差；

(3) 从三个连续的自然数里每次取出两个相乘，最多可以得到几个不同的积；

(4) 从三个连续的自然数里每次取出两个相除，最多可以得到几个不同的商；

(5) 从大于 2 的三个连续的自然数里每次取出两个：一个为幂底数，一个为幂指数，最多可以得到几个不同的幂；

(6) 从三个连续的自然数里（不包括 1）每次取出两个，一个为被开方数，一个为根指数，最多可以得到几个不同的方根；

(7) 一个班级里选出两位同学分别担任正、副班长，有多少种选法；

(8) 一个班级里选出两位同学参加一项科技活动，有多少种选法。

2. 写出：

(1) 从四个元素 a, b, c, d 中任取两个元素的所有排列；

(2) 从四个元素 a, b, c, d 中任取三个元素的所有排列.

3. 计算：

(1) P_5^2；　(2) P_{15}^4；　(3) P_{100}^3；　(4) P_7^7；

(5) P_6^3；　(6) $P_8^4-2P_8^2$；　(7) $\frac{P_{12}^8}{P_{12}^7}$；

(8) $P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4$.

4. 计算出各阶乘数，填写下面的阶乘表：

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

5. 求证：

(1) $n!=\frac{(n+1)!}{n+1}$;

(2) $(n+1)!-n!=n\cdot n!$;

(3) $P_{n+1}^{n+1}-P_n^n=n^2P_{n-1}^{n-1}$;

6. 某一段铁路共有25个车站，需要为这段铁路准备多少种普通客票？

7. 某种产品加工时需要经过五个工种：

(1) 加工顺序共有多少种排法？

(2) 其中一个工种必须最先开始加工，工序有几种排法？

(3) 其中一个工种不能在最后加工，工序有几种排法？

(4) 其中有两个工种必须连续加工，而且这两个工种只能一个在前另一个在后，工序有几种排法？

8. 从4种蔬菜品种中选出3种，分别种植在不同土质的3块土地上进行对比实验，有多少种种植方法？

9. 用1, 2, 3, 4, 5这五个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位数？其中有多少个是偶数？

10. 用0, 1, 2, 3, 4, 5这六个数字不许数字重复，排成能被5整除的三位数有多少个？