科学版

大学物理习题精解系列

大学基础物理习题精解

金仲辉　主编

科学出版社
www.sciencep.com

大学物理习题精解系列

大学基础物理习题精解

金仲辉 主编

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是为农、林、水类院校学生编写的一本普通物理学习指导书，全书共有20章，涵盖普通物理的基本内容．每章均先给出了主要内容和主要公式，再给出典型习题及其详细解答．书后还附有三份模拟试卷及参考答案．

本书可供农、林、水类院校学生使用，也可供一般工科院校学生参考．

图书在版编目(CIP)数据

大学基础物理习题精解/金仲辉主编．一北京：科学出版社，2002
(大学物理习题精解系列)

ISBN 7-03-009347-X

Ⅰ．大… Ⅱ．金… Ⅲ．物理学-高等学校-解题 Ⅳ．O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第23240号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2002年7月第一版 开本：B5(720×1000)
2002年7月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1-3 000 字数：358 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

物理学是一切自然科学的基础，高新科技无不以物理学为依托，大学基础物理课程是农、林、水类高等院校的一门重要的基础理论课程．它在培养学生的科学素质和科学思维方法、提高学生的科学研究能力方面，起着其他课程不能替代的作用．在大学基础物理课程的教学中，做习题是一个必不可少的环节．通过它可以更正确地、深入地理解大学基础物理的基本概念、基本定理和定律，培养分析问题的习惯和提高解决问题的能力．在综合性大学、师范院校和理工科院校的物理课程中，一般都设有"物理习题讨论课"，而农、林、水类高等院校由于种种原因，物理课程学时数很少，没有"物理习题讨论课"，于是学生在学习物理课程中遇到了不少的困难，尤其在物理课程各类考试(期中和期末考试、研究生入学考试、物理竞赛和地区统考等)面前缺少合适的复习资料．为了弥补这个缺陷，我们编写了这本适合于农、林、水类高等院校物理教学的习题集．为了使这本习题集既适合于农学、林学类各专业使用，又适用于农、林、水类院校中工科类专业使用，基本上根据工科类专业的教学要求(工科类专业的物理课程学时数多于农、林类专业)编写的．本习题集共20章，为了读者使用方便，在每章习题及其解答前均列出该章教材的主要内容和主要公式；也为了使读者进一步测试自已解题的能力，书中还附有三份模拟试卷及其答案．本书共收集了477道习题．在书后还列出有关的物理常量表等资料．

本书第一章至第五章的习题解答由中国农业大学(东校区)戴允玢副教授编写，第六章至第十章的习题解答由北京林业大学张文杰教授编写，第十一章至第十四章的习题解答由中国农业大学(东校区)左淑华副教授编写，第十五章至第十八章的习题解答由北京林业大学程艳霞副教授编写．中国农业大学(西校区)金仲辉教授编写了每章内容的要点、第十九章和第二十章的习题解答及模拟试卷，并负责全书的定稿．限于编者的水平，书中难免有疏漏和错误之处，请读者批评指正．

本书可供高等农、林、水类院校各专业的师生使用．

编　者

2001.8

目　　录

第一部分　力　学

第二部分　热　学

第三部分　电磁学

第四部分　光　学

第五部分　近代物理

第一部分　力学

第一章　质点运动学

一、本章内容要点

1. 力学的研究对象是机械运动，即宏观物体之间的相对位置变动；而运动学只描述物体的运动.

2. 质点　物体的形状和大小在研究问题时可以忽略，即可将物体视为只有质量而无形状和大小的几何点.质点是物体在一定条件下的一种物理模型.

3. 参考系　研究物体运动时所参照的物体.

坐标系　参考系的数学抽象.如直角坐标系(x,y,z)、球坐标系(r,θ,φ)、圆柱面坐标系(r,φ,z)、自然坐标系等.

4. 位置矢量　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$.

位移矢量　$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

5. 速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

6. 匀加速直线运动

$$v=v_0+at,\quad x=v_0t+\frac{1}{2}at^2,\quad v^2-v_0^2=2ax$$

7. 处理曲线运动的基本方法是选取适当的坐标，将运动加以分解，例如对于平面运动，

$$\text{直角坐标}\begin{cases}a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex]a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\end{cases}$$

$$\text{自然坐标}\begin{cases}\text{切向}\quad a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\text{法向}\quad a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases}$$

其中ρ为曲率半径.

若是圆周运动，

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{R},\quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt},\quad a_t=\frac{dv}{dt}=R\beta$$

8. 伽利略速度变换

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

二、习题详解

1.1　已知 $\boldsymbol{r}=(3+t)\boldsymbol{i}+(5t+t^2)\boldsymbol{j}$(SI),求

(1) $t=1$ s时及 $t=2$ s时的径矢;

(2) $t=1$ s到 $t=2$ s的位移;

(3) $t=1$ s时和 $t=2$ s时的速度;

(4) $t=1$ s时和 $t=2$ s时的加速度;

(5) 运动轨迹.

解　(1) $t=1$ s时,$\boldsymbol{r}(1)=(3+1)\boldsymbol{i}+(5\times1+1^2)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$(m),径矢 $\boldsymbol{r}(1)$的大小和方向为

$$|\boldsymbol{r}(1)|=\sqrt{4^2+6^2}=7.21(\text{m})$$

$\alpha_1=\arctan\frac{6}{4}=56.31°$($\alpha_1$ 为 $\boldsymbol{r}(1)$与 x 轴正向的夹角)

$t=2$ s时,$\boldsymbol{r}(2)=5\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}$(m),径矢 $\boldsymbol{r}(2)$的大小和方向为

$$|\boldsymbol{r}(2)|=14.87(\text{m})$$

$\alpha_2=\arctan\frac{14}{5}=70.35°$($\alpha_2$ 为 $\boldsymbol{r}(2)$与 x 轴正向的夹角)

(2)位移　$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(2)-\boldsymbol{r}(1)=\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$(m),位移大小和方向分别为

$|\Delta\boldsymbol{r}|=8.06$(m)

$\alpha=\arctan\frac{8}{1}=82.87°$($\alpha$ 为 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正向夹角)

(3)由速度定义,得$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{i}+(5+2t)\boldsymbol{j}$(SI).

$\boldsymbol{v}(1)=\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$(SI),其大小和方向为

$|\boldsymbol{v}(1)|=\sqrt{1^2+7^2}=7.07$(m/s)

$\theta_1=\arctan\frac{7}{1}=81.87°$($\theta_1$ 为$\boldsymbol{v}(1)$与 x 轴正向的夹角)

$\boldsymbol{v}(2)=\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}$(SI),其大小和方向为

$|\boldsymbol{v}(2)|=\sqrt{1^2+9^2}=9.06$(m/s)

$\theta_2=\arctan\frac{9}{1}=83.66°$($\theta_2$ 为$\boldsymbol{v}(2)$与 x 轴正向的夹角)

(4)由加速度定义得 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s^2})$(与 t 无关),

$$\boldsymbol{a}(1)=\boldsymbol{a}(2)=2\boldsymbol{j}(\mathrm{m/s^2})$$

(5)由$\begin{cases}x=3+t\\y=5t+t^2\end{cases}$,消去参数 t,得轨迹方程 $y=x^2-x-6$.

1.2 汽车以初速度 v_0 沿平直道路开始滑行,设汽车滑行时所受阻力而产生的加速度与车速 v 成正比,求 t 时间后车行距离及车速.

解 本题是一维问题,故选平直道路为 x 轴,并设初始时刻质点处于坐标原点,即 $x_0=0$.由题意知 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}t$$

两边同时取积分,得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\mathrm{d}t$$

$$\ln v/v_0=-kt$$

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

又 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$\mathrm{d}x=v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$,两边同时取积分得

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

$$x=\frac{v_0}{-k}(\mathrm{e}^{-kt}-1)=\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

1.3 质点作直线运动,初速度为零,初始加速度为 a_0,质点出发后,每经过 τ 时间,加速度均匀增加 b.求经过 t 时间后,质点的速度和位移.

解 由题意知,加速度和时间的关系为

$$a=a_0+\frac{b}{\tau}t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t\left(a_0+\frac{b}{\tau}t\right)\mathrm{d}t$$

$$v=a_0t+\frac{b}{2\tau}t^2$$

由于 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,设 $t=0$ 时,$x_0=0$,有

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x=\frac{1}{2}a_0t^2+\frac{b}{6\tau}t^3$$

1.4 已知质点作直线运动,其速度 $v=3t-t^2(\mathrm{m/s})$,求质点在 0~4 s 时间

内的路程.

解 在求解本题中要注意,在 0～4 s 时间内,速度有时大于零,有时小于零,因而使运动出现往返,如果简单按 $\int_0^4 v\mathrm{d}t$ 处理,求出的是位移,而不是路程.

需先确定 $t=?$ 时,$v=0$;由 $v=3t-t^2=0$,解得 $t=3$ s;再求出位移 x,由于 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$有

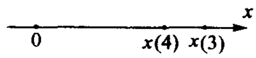

图 1.1

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t (3t - t^2)\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3(\mathrm{m})$$

设质点在 0～4 s 时间内的路程为 S.由 $v=3t-t^2$ 知,$t<3$ s时,$v>0$;$t=3$ s 时,$v=0$;而 $t>3$ s 时,$v<0$.如图 1.1 所示.

$$\begin{aligned} S &= |x(3)-x(0)| + |x(3)-x(4)| \\ &= \left|\frac{3}{2}\times 3^2 - \frac{1}{3}\times 3^3\right| + \left|\frac{3}{2}\times 3^2 - \frac{1}{3}\times 3^3 - \left(\frac{3}{2}\times 4^2 - \frac{1}{3}\times 4^3\right)\right| \\ &= \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = 6\frac{1}{3}(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

1.5 在离船的高度为 h 的岸边,一人以恒定的速率 v_0 收绳,求当船头与岸的水平距离为 x 时,船的速度和加速度.

解 建坐标系如图 1.2 所示,船沿 x 轴方向作直线运动,欲求速度,应先建立运动方程,由图 1.2,可得出

$$x^2 = r^2 - h^2$$

两边求微分,则有

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

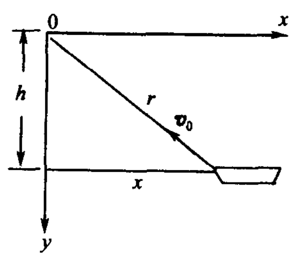

图 1.2

船速为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{x}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

因为$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0$(负号表示绳随时间 t 缩短),

所以,船速为

$$v = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

负号表明船速与 x 轴正向反向,船速与 x 有关,说明船作变速运动.

将上式对时间求导,可得船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{h^2v_0^2}{x^3}$$

负号表明船的加速度与 x 轴正方向相反,与船速方向相同,加速度与 x 有关,说明船作变加速运动.

1.6 一路灯高为 H,身高为 h 的行人以匀速 v_0 在灯下行走.求(1)人影中头顶的速度;(2)人影增长的速度.

解 (1)建立如图 1.3 所示的坐标系,设人从 O 点开始行走,则 t 时刻人在 C 点,坐标 $x_1=v_0t$,人及人影的脚坐标均为 x_1,人影头坐标为 x_2.

由$\triangle ADO\backsim\triangle BDC$ 知$\dfrac{x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{H}{h}$,即

$$x_2=\frac{H}{H-h}x_1$$

将 $x_1=v_0t$ 代入,得

$$x_2=\frac{H}{H-h}v_0t$$

所以人影头顶的速度为

$$v_{头}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}v_0$$

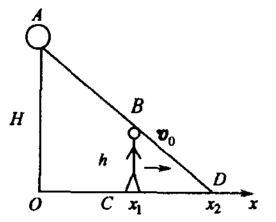

图 1.3

(2)t 时刻人影长度为

$$x_2-x_1=\frac{H}{H-h}v_0t-v_0t=\frac{h}{H-h}v_0t$$

所以人影增长速度即人影长度随时间 t 的变化率为 $v_{影}=\dfrac{\mathrm{d}(x_2-x_1)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{h}{H-h}v_0$.

1.7 一质点从倾角为 $\alpha=30°$的斜面上的 O 点被抛出,初速度的方向与水平线的夹角为 $\theta=30°$,初速度的大小 $v_0=9.8$ m/s.若忽略空气阻力,试求(1)质点落在斜面上距抛出点的距离,(2)在 $t=1.5$ s 时,质点的速度、切向加速度和法向加速度.

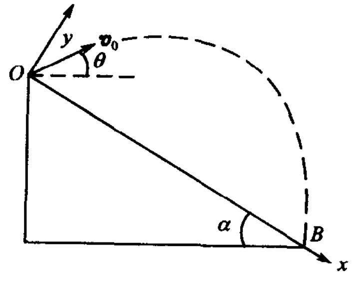

图 1.4(a)

解 (1)建立如图 1.4(a)所示的坐标系,设抛出点为坐标原点,落在斜面 B 点.质点的运动可以看作是 x 方向的匀加速直线运动($g_x=g\sin\alpha$)和 y 方向的上抛运动($g_y=g\cos\alpha$)的合成:

$$v_{x_0}=v_0\cos(\theta+\alpha),\quad v_x=v_{x_0}+g_xt,$$

$$x=v_{x_0}t+\frac{1}{2}g_xt^2 \qquad (1)$$

$$v_{y_0} = v_0\sin(\theta + \alpha), \quad v_y = v_{y_0} - g_y t, \quad y = v_{y_0}t - \frac{1}{2}g_y t^2 \tag{2}$$

将 B 点坐标(x, O)代入(2)式得

$$t = \frac{2v_0\sin(\theta + \alpha)}{g\cos\alpha} \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式，得

$$x = \frac{2v_0^2\sin(\theta + \alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha} = \frac{2 \times 9.8^2 \times \sin(30^\circ + 30^\circ)\cos30^\circ}{9.8 \times \cos^2 30^\circ} = 19.6(\text{m})$$

(2) $t = 1.5$ s 时，

$$\begin{aligned} v_x &= v_0\cos(\theta + \alpha) + g\sin\alpha t \\ &= 9.8 \times \cos(30^\circ + 30^\circ) + 9.8 \times \sin30^\circ \times 1.5 \\ &= 12.25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_0\sin(\theta + \alpha) - g\cos\alpha t \\ &= 9.8 \times \sin(30^\circ + 30^\circ) - 9.8 \times \cos30^\circ \times 1.5 \\ &= -4.24 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

所以，此时速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12.25^2 + (-4.24)^2} = 13.0 \text{ (m/s)}$$

速度与 y 轴负方向夹角为 $\beta' = \arctan\dfrac{v_x}{v_y} = \arctan\dfrac{12.25}{(-4.24)} = 70^\circ54'$. 由题设可知速度与重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的夹角为

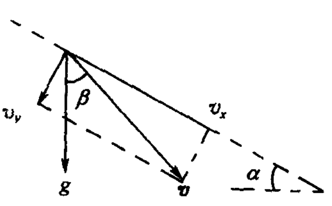

图 1.4(b)

$$\beta = \beta' - 30^\circ = 70^\circ54' - 30^\circ = 40^\circ54'$$

欲求 $t = 1.5$ s 时的切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 时，需要一点技巧，由图 1.4(b)，质点运动的总加速度就是重力加速度 $\boldsymbol{g}$，而 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 是它的两个分量，由于 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 v 的方向平行，所以 $\boldsymbol{a}_\tau$ 与 $\boldsymbol{g}$ 之间的夹角正是$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 之间的夹角，即图中的 β 角，于是得

$$a_\tau = g\cos\beta = 9.8 \times \cos40^\circ54' = 7.4 \text{ (m/s)}$$

$$a_n = g\sin\beta = 9.8 \times \sin40^\circ54' = 6.4 \text{ (m/s)}$$

1.8　以初速$\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{v}_0$ 与水平夹角为 θ_0，斜上抛出一小球(见图 1.5)，试求：(1)任一时刻 t 的切向、法向加速度 a_τ、a_n 各等于多少？(2)轨道最高点的曲率半径 ρ 等于多少？

解　(1)解法一：任意时刻 t 的速度分量为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\theta_0 \\ v_y &= v_0\sin\theta_0 - gt \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

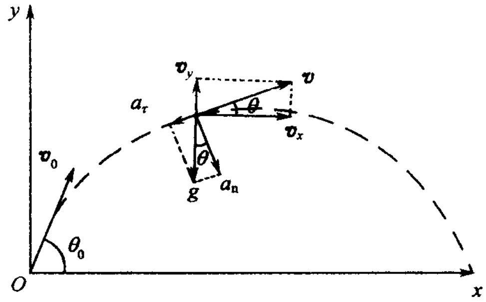

图 1.5

所以,速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2v_0\sin\theta_0 gt+g^2t^2}$$

由切向加速度定义,得

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_0^2-2v_0\sin\theta_0 gt+g^2t^2}$$

$$=\frac{-(v_0\sin\theta_0-gt)}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}g$$

由于小球的总加速度恒为 g,所以法向加速度为

$$a_n=\sqrt{g^2-a_\tau^2}=g\sqrt{1-\left(\frac{a_\tau}{g}\right)^2}=\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}g$$

解法二:设任意时刻 $\boldsymbol{v}$ 与水平夹角为 θ,由(1)式知

$$\sin\theta=\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_0\sin\theta_0-gt}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}$$

速度、切向加速度均沿曲线切向,

$$a_\tau=-g\sin\theta=\frac{-(v_0\sin\theta_0-gt)}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}g$$

$$a_n=g\cos\theta=\frac{v_0\cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}}g$$

(2)在轨道最高点,$v_y=0$,$v=v_x=v_0\cos\theta_0$,且 $a_\tau=0$,$a_n=g$.由于 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$,所以曲率半径 $\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$.

1.9 在炮兵射击训练中,通常要求考虑这样的问题,以给定的出口速度 v_0,击中已知距离为 R 的靶,需要多大的发射仰角 θ_0? 设靶和炮在同一水平高度(忽略空气阻力).

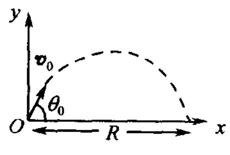

图 1.6

解 建坐标如图 1.6 所示,

$$R = x = v_0\cos\theta_0 t \tag{1}$$

$$y = v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

令(2)式中的 $y=0$,可解出飞行时间 t,即

$$t = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g}$$

将上式代入(1)式,得

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

所以

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v_0^2}$$

只要 R 小于最大射程 $\frac{v_0^2}{g}$,则发射角 θ_0 在 0—90°之间有两个解. 例如,取 $R=500$ m,$v_0=100$ m/s,则

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{Rg}{v_0^2} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{500\times 9.8}{100^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(0.49)$$

$$\theta_{0_1} = 14.67°, \qquad \theta_{0_2} = 75.33°$$

炮弹以这两个仰角发射时,得到相同的射程,都能击中靶子. 但若以大发射角 θ_{0_2} 发射时,飞行时间长,射高也较大,故实际不取此角.

1.10 一质点沿半径为 0.1 m 的圆周运动,其角位移 $\theta=2+4t^3$(SI 制)(见图 1.7). 求(1)$t=2$ s 时,质点的法向加速度和切向加速度;(2)θ 为何值时,该质点的加速度与半径成 45°角.

解 选用自然坐标系.

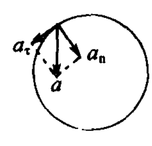

图 1.7

(1)由角速度定义,有 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}(2+4t^3)=12t^2$,所以

法向加速度 $a_n=\omega^2R=(12t^2)^2\times 0.1=14.4t^4$

切向加速度 $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(R\omega)=2.4t$

将 $t=2$ s,代入以上两式,分别得到

$$a_n = 230.4\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a_\tau = 4.8\ \mathrm{m/s^2}$$

(2)当合加速度与半径成 45°角时,应有 $a_n=a_\tau$,即 $14.4t^4=2.4t$,解得 $t^3=$

$\frac{1}{6}$,代回运动方程,得 $\theta=2+4t^3=2+4\times\frac{1}{6}=2.67(\mathrm{rad})$.

1.11　一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $S=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动,v_0、b 都是常数.求(1)t 时刻质点的总加速度;(2)t 为何值时,总加速度在数值上等于 b?(3)当加速度达到 b 时,质点已沿圆周运行了多少圈?

解　(1)因为速率 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$,所以

切向加速度　$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$

法向加速度　$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$

t 时刻质点的总加速大小　$a=\sqrt{a_\mathrm{n}^2+a_\tau^2}=\frac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^4+R^2b^2}$

设加速度 $\boldsymbol{a}$ 与切向夹角为θ,如图 1.8 所示,

$$\theta=\arctan\frac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}=\arctan\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}\right]$$

(2)设在 t 时刻时 $a=b$,即$\frac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^4+R^2b^2}=b$,

解得 $t=\frac{v_0}{b}$.

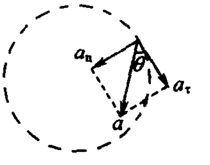

图 1.8

(3)将(2)中 $t=\frac{v_0}{b}$代入运动方程,得

$$S=v_0t-\frac{1}{2}bt^2=v_0\frac{v_0}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{v_0^2}{2b}$$

质点沿圆周运行圈数

$$N=\frac{S}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

1.12　在河水流速 $v_0=2\ \mathrm{m/s}$ 的地方有小船渡河,如果希望小船以 $v=4\ \mathrm{m/s}$ 的速率垂直于河岸横渡,问小船相对于河水的速度的大小和方向应如何?

解　图 1.9 给出了水的流速、船相对水及船相对岸的速度三者间的关系.

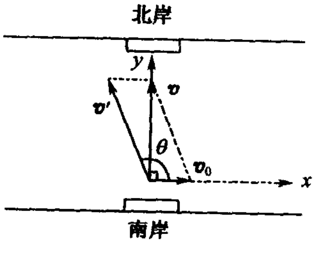

图 1.9

设小船相对河水的速度为$\boldsymbol{v}'$

$$\boldsymbol{v}_{船-岸}=\boldsymbol{v}_{船-水}+\boldsymbol{v}_{水-岸}$$

即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0$$

船相对水的速度为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{v}'=-v_0\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$$

其速度大小为

$$v' = \sqrt{v_0^2 + v^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47\ (\mathrm{m/s})$$

设$\boldsymbol{v}'$与水流方向$\boldsymbol{v}_0$间的夹角为θ,则

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{v_0}{v} = \frac{\pi}{2} + 26.6° = 116.6°$$

1.13 升降机以 1.2 $\mathrm{m/s^2}$ 的加速度上升,当速度达 2.4 m/s 时,一钉子从升降机天花板上落下.天花板与地板相距 2.7 m.试计算钉子从天花板落到地板上所用的时间.

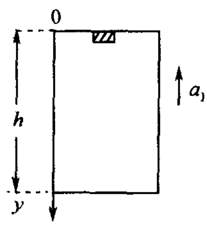

图 1.10

解 选升降机作参考系(见图 1.10),钉子相对升降机初速为 0,设钉子相对升降机的加速度为$\boldsymbol{a}'$,则

$$a' = g + a_1 = 9.8 + 1.2 = 11(\mathrm{m/s^2})$$

$$h = \frac{1}{2}a't^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a'}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.7}{11}} = 0.7(\mathrm{s})$$

1.14 飞机 A 以 $v_A = 1000$ km/h 的速率(相对地面)向南飞行,同时另一架飞机 B 以 $v_B = 800$ km/h 的速率(相对地面)向东偏南 30°方向飞行.求 A 机相对于 B 机的速度与 B 机相对于 A 机的速度.

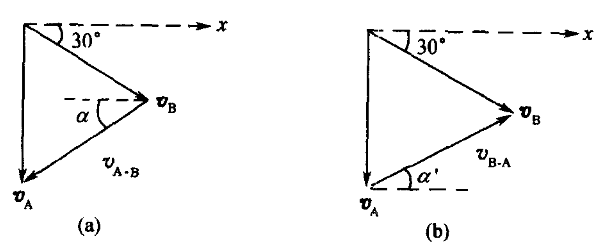

图 1.11

解 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$ 和 A 机相对 B 机速度$\boldsymbol{v}_{A-B}$如图 1.11(a),三者关系为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{A-B} + \boldsymbol{v}_B$$

$$\boldsymbol{v}_{A-B} = \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B$$

$$v_{(A-B)x} = -v_B\cos 30° = 693\ \mathrm{km/h}$$

$$v_{(A-B)y} = v_A - v_B\sin 30° = 600\ \mathrm{km/h}$$

A 机相对 B 机速度大小和方向为

$$v_{A-B} = \sqrt{v_{(A-B)x}^2 + v_{(A-B)y}^2} = \sqrt{693^2 + 600^2} = 917\ (\mathrm{km/h})$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_{(A-B)y}}{v_{(A-B)x}} = 40°53'(西偏南)$$

同理,可求得 B 机相对 A 机速度[见图 1.11(b)]大小和方向:

$$v_{B-A} = 917\ \mathrm{km/h}, \alpha' = 40°53'(东偏北)$$