

990887

张建海 范景伟 胡定 著

刚体弹簧元 理论及应用

THEORY AND APPLICATION
OF RIGID BODY-SPRING ELEMENT

2.21
3

成都科技大学出版社

990867

刚体弹簧元理论及应用

张建海 范景伟 胡定

江苏工业学院图书馆
藏书章

成都科技大学出版社

(川)新登字 015 号

责任编辑 宗 年

封面设计 罗 光

刚体弹簧元理论及应用

张建海 范景伟 胡定 著

成都科技大学出版社出版发行

成都科技大学出版社激光照排

西南交通大学印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张:9

1997 年 11 月第 1 版 1997 年 11 月第 1 次印刷

印数:1-600 字数:222 千字

ISBN7-5616-3557-5/O·280

定价:12.00 元

目 录

第一章 绪论	(1)
1.1 引述	(1)
1.2 刚体弹簧元背景及发展现状	(1)
1.3 本书的主要工作	(3)
第二章 刚体元插值函数	(5)
2.1 位移分解式	(5)
2.2 刚体元插值函数	(7)
2.3 插值点变换	(9)
第三章 刚体元基本列式	(11)
3.1 刚体元平衡方程	(11)
3.2 二维面力转换关系	(11)
3.3 三维面力转换关系	(12)
3.4 本构关系	(13)
3.5 单元离散	(15)
3.6 变温应力问题	(17)
3.7 插值点变换时的刚体元矩阵方程	(18)
3.8 刚体元质量阵的物理意义	(19)
3.9 对二维刚体元几何形状任意性的处理	(21)
3.9.1 主要思路	(21)
3.9.2 “虚”“实”三角形集的形成	(23)
3.10 二维刚体单元几何参数	(25)
3.11 六面体三维刚体元	(25)
3.12 刚体元材料常数的确定	(28)
3.13 二维刚体元由面力反求节点应力	(30)
3.14 三维刚体元由面力反求节点应力	(31)
3.15 对刚体元交界面面力的讨论	(32)
3.16 几个二维及三维刚体元静力问题算例	(34)
第四章 刚体元弹塑性分析原理与算法	(44)
4.1 前言	(44)
4.2 刚体元应力转移法	(44)

4.3	广义虎克定律	(45)
4.4	弹塑性增量理论	(46)
4.5	刚塑性增量理论	(47)
4.6	增量型本构关系的推求	(47)
4.7	弹塑性有限元方程的求解	(50)
4.7.1	弹塑性区域的确定	(50)
4.7.2	非线性增量方程的求解	(51)
4.8	刚体元弹塑性分析公式	(52)
4.8.1	二维刚体元弹塑性分析公式	(52)
4.8.2	三维刚体元弹塑性分析公式	(54)
4.9	刚体元弹塑性分析网格相关性	(55)
第五章	刚体元动力分析原理与算法	(59)
5.1	刚体元动力方程	(59)
5.2	刚体元动力方程的求解	(60)
5.3	振型叠加法	(60)
5.4	Newmark 积分法	(62)
5.5	非线性弹性动力方程的求解	(64)
5.5.1	非线性弹性动力方程	(64)
5.5.2	梯形率变分列式	(64)
5.5.3	非线性弹性动力方程的求解	(67)
5.6	动力问题的显式积分法	(69)
5.7	显式——隐式积分法	(70)
5.8	瑞雷阻尼比例系数 α 和 β 的确定	(72)
5.9	刚体元动力问题算例	(73)
第六章	刚体元在边坡、坝肩静动稳定性分析中的应用	(83)
6.1	前言	(83)
6.2	常用稳定安全系数计算方法	(83)
6.2.1	点超载安全系数	(84)
6.2.2	点强度储备安全系数	(84)
6.2.3	整体强度储备安全系数	(85)
6.2.4	滑动面抗滑稳定安全系数	(86)
6.3	动力抗滑安全系数	(86)
6.4	算例及讨论	(87)
第七章	有限元、刚体元、块体元、离散元的统一列式方法	(91)
7.1	虚功原理	(91)

7.2	虚功率原理	(92)
7.3	虚功率增率原理	(93)
7.4	有限元、刚体元、块体元、离散元控制方程	(94)
7.4.1	位移型有限元矩阵方程的推导	(94)
7.4.2	刚体元矩阵方程的推导	(95)
7.4.3	块体元(DDA)矩阵方程的推导	(96)
7.4.4	离散元基本方程的推导	(98)
第八章	锦屏普斯罗沟高边坡静动力稳定性分析	(100)
8.1	引言	(100)
8.2	研究方案	(100)
8.2.1	静力分析部分研究方案	(101)
8.2.2	动力分析部分研究方案	(101)
8.3	静力计算结果及讨论	(102)
8.3.1	计算条件	(102)
8.3.2	构造应力场分析	(104)
8.3.3	拉应力的分布区域及特征	(106)
8.3.4	点超载及点强度储备安全系数分布	(106)
8.3.5	天然边坡整体强度储备安全系数	(108)
8.3.6	滑动面抗滑安全系数	(110)
8.4	地震动力分析结果及讨论	(111)
8.4.1	锦屏水电站地震安全性概况	(111)
8.4.2	计算条件及输出量	(112)
8.4.3	地震作用下的位移、速度、加速度	(112)
8.4.4	地震作用下的交界面面力	(115)
8.4.5	动力抗滑安全系数	(115)
8.5	小结	(117)
第九章	溪洛渡高拱坝坝肩稳定性分析	(119)
9.1	引言	(119)
9.2	研究方案	(119)
9.2.1	静力分析部分研究方案	(119)
9.2.2	动力分析部分研究方案	(119)
9.3	静力计算结果及讨论	(120)
9.3.1	计算条件	(120)
9.3.2	双曲拱坝滑动体静力抗滑安全系数	(122)
9.4	动力稳定分析结果及讨论	(124)
9.4.1	溪洛渡水电站地震安全性概况	(124)

9.4.2 计算条件及输出量	(124)
9.4.3 地震作用下的位移、速度、加速度	(124)
9.4.4 动力抗滑稳定安全系数	(125)
9.5 对岩土介质阻尼效应的讨论	(127)
9.6 小结	(128)
第十章 结论	(129)
10.1 本书主要工作	(129)
10.2 对刚体元研究工作的展望	(129)
致谢	(136)
关于作者	(137)
参考文献	(131)

第一章 绪论

1.1 引述

电子计算机的出现和 Courant(1943)^[29]有限元思想的提出,极大拓展了人们的视野,使人们得以处理以往很难解决、甚至是无法解决的大型结构计算。目前,有限元法在固体、流体及各类场问题中的理论研究和应用仍处于蓬勃发展的势头。与此同时,基于有限元法的“离散—→分片插值—→组集”的思维模式的其它各种计算方法则层出不穷。各种各样的“元”被提出来,如离散元、边界元、刚体—弹簧元、块体元、流行元等等。这些方法有些已广泛应用于工程研究,有些则尚处于发展和完善阶段,而未被工程界所认知。

本书较系统阐述了二维及三维刚体—弹簧元的基本理论以及笔者及其同事们使用该方法在工程应用上所作的尝试。本书内容是笔者博士后研究工作的一部分。

下面首先简要回顾一下刚体—弹簧元的发展历程。

1.2 刚体弹簧元背景及发展现状

刚体弹簧元模型(RBSM: Rigid Body—Spring Model)最早由日本东京大学 Kawai 教授在 1976 年提出^[1]。其提出之初是用于解决计算机容量小的问题。由于该方法独特的思路,现已发展成为一种新的数值计算方法,称为刚体有限元法(Rigid Finite Element Method,简记为 RFEM)。该法同传统有限元一样,首先对研究域进行单元离散,但与有限元节点插值不同,刚体有限元在单元形心处插值,以单元形心位移为基本未知量,用分片的刚体位移模式去逼近实际整体位移场。结构内部弹塑性变形通过单元间相对变形来体现。结构内部应力则通过单元交界面面力来表现。应注意的是:由于刚体弹簧元单元间有相对变形,故刚体弹簧元位移是不协调的。简言之,刚体弹簧元的基本思想是:把结构划分为一些由分布在单元接触面上的弹簧系统连接在一起的刚体单元的集合。刚性单元本身不发生弹性变形,因此结构的变形能完全储存在接触面的弹簧系统中。

刚体弹簧元目前有许多不同译法,如称之为刚体有限元、刚体元、刚性有限元、刚性元、界面元等等,本书暂称之为刚体元。

与有限元法相比,刚体元法一直未得到充分发展,也未引起广泛的重视。这是由于传统有限元法在处理连续介质问题时具有很强的优点。除某些情况下(如板元、壳元等),传统有限元较易构造位移协调的单元插值函数。并可通过增加节点,提高插值阶次的方法,使计算精度大大提高,而刚体元由于单元交界面位移不协调,将其应用于连续介质力学问题时,则可能产生单元间开裂、互相压入等“不允许”位移形式。

随着工程实践的发展和认识领域的扩大,人们发现许多材料亦会发生不连续的变形。

例如:岩石材料在大区域研究时往往可视为连续介质,利用传统协调位移有限元进行弹塑性分析便可得到满足工程要求的计算结果,但当岩体发生错动、断裂、崩落、失稳时,岩体材料又表现出非连续介质的特点。这时,在协调位移元中被认为非法的单元位移方式,如单元间互相开裂、错位、滑移均变成了合理的了。因此传统协调位移元在处理此类非连续介质变形时,就不方便了。刚体元则由于其位移不协调的特点,而较适用于断裂控制的岩体等脆性材料应力分析。

对非连续介质而言,其应力——应变关系及其破坏过程是极为复杂的,已不能简单地套用连续介质理论。基于连续性假设的数值方法如何有效地模拟岩体中实际存在的大量裂隙、节理等不连续面,一直是岩体力学中重要的研究课题。Kyoya⁽⁴⁰⁾提出用损伤力学的方法处理节理岩体问题。损伤力学是70年代后期发展起来的力学一个新分支⁽⁷⁶⁾⁽⁷⁷⁾,它不同于断裂力学之处在于:认为材料内存在着分布性缺陷,这些原始缺陷(损伤)在材料内是连续分布的。文⁽⁴⁰⁾应用损伤力学的原理建立了节理岩体的损伤有限元法。但由于岩体的复杂性,应用损伤力学方法仍然存在着确定有关参数的困难。例如:损伤张量取决于节理分布状态、密度、节理面之间的应力传递情况等因素。对具体的工程而言,要完全查明上述因素仍然是十分困难的。关于损伤的扩展规律以及致损的原因更是有待研究的问题。

对不连续岩体的传统有限元分析中,常用基于 Goodman 单元⁽⁴¹⁾的节理单元和夹层单元来模拟岩体中的不连续面,但若岩体中存在着大量的走向各异的软弱面时,势必为上述单元的使用带来很大的困难。目前均采用地质概化的方法,在计算中仅仅考虑那些对结构受荷最不利的几组节理,往往几组节理相互交织,对有限元网格剖分很不利。另外,上述单元中都采用了至今还不能很好确定的法向和切向刚度系数 K_n 和 K_t ,从而为计算带来很多的不确定性。

模拟不连续介质性态的较有效和功能较强的方法——离散单元法及块体单元法,是解答多节理岩体的另一类重要方法。在这类方法中通常把岩体看作是由节理切割的岩块组成的结构体。一种最简单的理想化模型是把岩体看作是彼此相互接触的一系列刚性块体。离散元法(Cundall, 1971),刚体—弹簧元法(Kawai, 1976)和块体理论(Goodman 和 Shi, 1985)是三种有代表性的不连续块体方法。

离散单元法(Distinct Element Method, 简称 DEM⁽⁷⁸⁾)最初是由 Cundall 提出,用以模拟岩石边坡的渐进性破坏,该方法把岩体结构看成是由软弱结构面切割而成的一系列刚性岩块所组成,采用动态松弛法求解牛顿运动方程,以确定各离散刚性元之间边界的相互作用状态,体现了节理岩体变形和受力的不连续性。离散单元法自 1971 年提出以后,已得到了较大的发展,并被应用于各种离散体结构的分析和模拟中。应指出,离散元法中关于块体之间阻尼系数、运算的时间步长等参数的确定带有较大的随意性和盲目性,缺少可靠准确的方法来确定这些参数。

刚体弹簧元在单元内只有一个插值点,因此对单元形状无限制。单元可为任意凸、凹多面体或多边形。单元间也不要求节点接触,因此可以方便地模拟不规则形状块状物,如岩石等的自然形状。刚体元刚阵是沿单元交界面进行积分的,而传统有限元则在单元域内积分。因此刚体元刚阵积分阶次比传统有限元低一阶,故而计算简捷,单刚计算效率提高。由于传统有限元加强了几何协调性,常常不易用于模拟断裂等失效过程跟踪。将岩石、混

凝土等材料视为由可动界面连接的刚性单元的组合,则使断裂极限分析更为方便。故而近年来对刚体元的理论研究和工程应用都有了长足的发展^[1~17]。Y. Toi 等^[5~7]将损伤力学的思想引入刚体元,分析了多结晶体及其它脆性材料的微观、细观断裂,并已扩展至三维实体分析。Y. Q. Liu, H. Hikosaka^[8]采用刚体元研究混凝土材料的细观断裂。我国钱令希、张雄等^[15,16]开展了刚体元的二维弹塑性分析,并将其应用于边坡稳定性评价。河海大学卓家寿、赵宁等人^[13,14]开展了刚体元二维动力分析。但也应看到,刚性元与传统有限元相比,亦存在几个明显的缺点:(1)由于插值函数为线性,仅有一阶近似性,因而位移精度较低;(2)未考虑单元自身变形;(3)不能直接求得单元应力张量全部分量,应力张量须由交界面面力间接求得。

80 年代末,石根华初步考虑了各单元的变形,提出了 DDA (Discontinuous Deformation Analysis) 块体模型^[68]。在文^[68]模型中,每个单元的未知量不仅为插值点处的刚体位移,还有块体的常应变。各块间放松了协调性要求,并通过在泛函中引入罚函数以保证块与块间的不可贯入条件。

应该看到,有限元法(FEM)、离散元法(DEM)、刚体元法(RFEM)及块体元(DDA),均是对客观世界从不同视角,在不同近似程度上的描述方法,且目前均仍限于连续介质的范畴,故而均遵从连续介质力学的基本运动规律。即质量守恒方程、运动平衡方程及物性本构关系。由本书第七章可见,由连续介质一般方程出发可方便地推出以上各种不同数值方法的基本方程。

1.3 本书的主要工作:

本书较系统地推证了二维及三维刚体元法的理论基础,并对笔者及其合作者们应用刚体元法在工程应用中的探索作了汇报。主要内容包括以下几个方面:

1. 从位移函数的 Taylor 级数展开式出发,推证了二维及三维刚体元的位移插值函数。进而由连续介质运动方程出发建立了二维及三维刚体元的 Galerkin 有限元列式。

2. 将以上模型和方法,应用于二维及三维弹性力学问题,热应力问题和弹塑性问题,以众多算例验证了刚体元法的有效性。

3. 成功地考虑了二维刚体单元几何形状任意凸凹性。这对于非连续岩体及任意形状结晶体开裂、错动等变形问题的研究具有重要意义。

4. 在二维及三维刚体元静力分析的基础上,将刚体有限元的研究拓展到动力分析领域。实例表明,刚体有限元在动力学问题的计算分析工作中,有着良好的工程应用前景。

5. 利用刚体元可直接推求交界面面力的特点,将刚体元法应用于边坡稳定分析,克服了传统位移型有限元法在单元间的应力跃动缺陷和位移有限元法难以直接推求任意交界面抗滑安全系数的缺点,从而使得最危险滑移面的搜索成为可能。

6. 在地震动力分析中,利用刚体元在地震波作用下各时刻的瞬时面力推求边坡、坝基(坝肩)的动力安全系数,从而得到各可能滑动面组合下,各滑动体的动力安全系数波动曲线。这使人们不仅可以在空间位置上,也可以从地震时间历程上,对结构或建筑物进行稳定性评价。该方法与工程中常用的刚体极限平衡法动力安全系数推求方法,以及与传统

有限元动力分析推求动安全系数的方法的显著差别在于该方法是实时分析方法,得到的动力安全系数是一条波动曲线,而不是某一个定值。由于该方法反应了动应力在地震发生各时刻对安全系数的影响,故而是一种更为合理的动力安全系数推求方法。

第二章 刚体元插值函数

2.1 位移分解式

物体在外力作用下发生运动和变形,设物体上各点位移为其空间坐标的函数,即:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) \quad (2.1)$$

其中: $\vec{u}$ 为物体上某点位移矢量;

$\vec{x}$ 为该点空间位置矢量。

则某点 $\vec{x}_0$ 处任一微小邻域内任意点的位移可由 $\vec{x}_0$ 点处位移依据 Taylor 级数近似表为:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \vec{x}^2} d\vec{x}^2 + \dots \quad (2.2)$$

在小变形分析中,忽略二阶以上微量,可得:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} \quad (2.3)$$

或展开为分量形式:

$$u_i = u_{0i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.4)$$

式(2.3)或式(2.4)即可视为以 $\vec{x}_0$ 点为插值点的 $\vec{x}_0$ 点邻域内任意点的位移表达式。

定义位移梯度张量为:

$$\underline{\underline{g}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = u_{k,l} \vec{i}_k \otimes \vec{i}_l \quad (2.5)$$

或

$$g_{kl} = u_{k,l} \quad (2.6)$$

易知,位移梯度张量 $\underline{\underline{g}}$ 可分解为对称部分 $\underline{\underline{S}}$ 和反对称部分 $\underline{\underline{A}}$ 之和,即:

$$g_{kl} = S_{kl} + A_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}) \quad (2.7)$$

其中对称部分:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{g}} + \underline{\underline{g}}^T) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

反对称部分:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{1}{2}(\underline{g} - \underline{g}^T) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

由张量分析可知,反对称张量可由一轴矢量表示,即:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

其中轴矢量 $\vec{\theta}$ 为:

$$\vec{\theta} = \frac{1}{2} \text{Curl } \vec{u} = -\frac{1}{2} \epsilon_{klm} A_{lm} \vec{i}_k \quad (2.11)$$

或

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

可见,位移梯度张量 $\underline{g}$ 的对称部分 $\underline{S}$ 即为 Euler 应变张量 $\underline{\epsilon}$, 而其反对称部分 $\underline{A}$ 反映了转动变形。

将(2.7)代入(2.4)式可得:

$$u_i = u_{0i} + S_{ij} dx_j + A_{ij} dx_j \quad (2.13)$$

或

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \underline{S} d\vec{x} + \underline{A} d\vec{x} \quad (2.14)$$

(2.13)或(2.14)式即为小变形分析一般形式的位移分解式。该式表明:小变形情况下,物体上任意一点的位移由刚体平动、变形位移和转动位移组成。

2.2 刚体元插值函数

若物体满足刚体位移条件,则由(2.14)知

$$\underline{S}=0 \quad (2.15)$$

或

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{i\ i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{见注释})^{\textcircled{1}} \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

故(2.14)式简化为:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + A d \vec{x} \quad (2.20)$$

利用式(2.16)~(2.19)。轴矢量 $\vec{\theta}$ 化为:

$$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

本书中,为叙述方便,有时也将转角矢量 $\vec{\theta}$ 记为:

$$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\text{故} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_3 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & \theta \\ \varphi & 0 & -\psi \\ -\theta & \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

将上式代入(2.20)式,得

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_3 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

展开,得

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + (x_3 - x_3^0)\theta_2 - (x_2 - x_2^0)\theta_3 \\ u_2 = u_2^0 - (x_3 - x_3^0)\theta_1 + (x_1 - x_1^0)\theta_3 \\ u_3 = u_3^0 + (x_2 - x_2^0)\theta_1 - (x_1 - x_1^0)\theta_2 \end{cases} \quad (2.25)$$

^① 注:带下划标表示不进行下标求和。

以插值点处位移和转角为基本未知量,则(2.25)式可写为矩阵形式为:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underline{N} \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

其中插值函数阵

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_3^0 & -(x_2 - x_2^0) \\ 0 & 1 & 0 & -(x_3 - x_3^0) & 0 & (x_1 - x_1^0) \\ 0 & 0 & 1 & (x_2 - x_2^0) & -(x_1 - x_1^0) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

记

(1) $\underline{I}$ 为三阶单位阵;

(2) $\underline{\Omega}_0$ 为以 $\vec{x}_0$ 为插值点的转动阵,且

$$\underline{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & (z - z_0) & -(y - y_0) \\ -(z - z_0) & 0 & (x - x_0) \\ (y - y_0) & -(x - x_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

易见, $\underline{\Omega}_0$ 为质点坐标的函数,且为反对称;

(3) $\underline{q}_0^*$ 为插值点处平动位移

$$\underline{q}_0^* = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0\}^T \quad (2.29)$$

(4) $\underline{q}_0^e$ 为插值点处转动位移

$$\underline{q}_0^e = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3\}^T = \{\psi \quad \theta \quad \varphi\}^T \quad (2.30)$$

(5) $\underline{q}_0$ 为插值点处广义位移

$$\underline{q}_0 = \begin{Bmatrix} \underline{q}_0^* \\ \underline{q}_0^e \end{Bmatrix} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 : \psi \quad \theta \quad \varphi\}^T \quad (2.31)$$

故插值点函数阵(2.27)化为:

$$\underline{N} = [\underline{I} \quad \underline{\Omega}_0]$$

(2.26)化为

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{q}_0 = [\underline{I} \quad \underline{\Omega}_0] \begin{Bmatrix} \underline{q}_0^* \\ \underline{q}_0^e \end{Bmatrix} = \underline{q}_0^* + \underline{\Omega}_0 \underline{q}_0^e \quad (2.32)$$

上式将刚体元上任一点的位移 $\vec{u}$ 通过插值函数阵 $\underline{N}$ 与插值点广义位移 $\underline{q}_0$ 联系了起来。

在二维情况下,刚体单元仅作面内平动及垂直平面的转动,故由(2.26)(2.27)可得二

维刚体元插值函数为：

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -(y-y_0) \\ 0 & 1 & \vdots & (x-x_0) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

由式(2.32)可见,刚体元仅在单元内一点 o 处插值,但对 o 点具体位置及单元边界形状无限制,故而刚体元单元形状可为任意形状体。对于单元插值点,一般取在形心处。

2.3 插值点变换

由于刚体元插值点也可取为非形心点,故有必要探讨插值点发生变化时,插值函数的变化规律。

如图 2.1 所示任一刚体单元内两点 m, n 。分别以 m, n 为插值点据式(2.32)写出单元位移函数如下：

$$\underline{u} = \underline{q}_m^* + \underline{\Omega}_m \underline{q}_m^{\prime} \quad (2.34)$$

及
$$\underline{u} = \underline{q}_n^* + \underline{\Omega}_n \underline{q}_n^{\prime} \quad (2.35)$$

将 n 点坐标代入(2.34)可知：

$$\underline{q}_n^* = \underline{q}_m^* + \underline{\Omega}_m \underline{q}_m^{\prime} \quad (2.36)$$

其中 $\underline{\Omega}_m$ 表示以 m 点为插值点时, n 点的转动阵,据式(2.28)可知：

$$\underline{\Omega}_m = \begin{bmatrix} 0 & (z_n - z_m) & -(y_n - y_m) \\ -(z_n - z_m) & 0 & (x_n - x_m) \\ (y_n - y_m) & -(x_n - x_m) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

将(2.36)代入(2.35)式,得：

$$\underline{u} = \underline{q}_m^* + \underline{\Omega}_m \underline{q}_m^{\prime} + \underline{\Omega}_n \underline{q}_n^{\prime} \quad (2.38)$$

对比(2.34)及(2.38)可知：

$$(\underline{\Omega}_n - \underline{\Omega}_m) \underline{q}_m^{\prime} = \underline{\Omega}_n \underline{q}_n^{\prime} \quad (2.39)$$

据式(2.28)易证：

$$\underline{\Omega}_n - \underline{\Omega}_m = \underline{\Omega}_n \quad (2.40)$$

故有

$$\underline{q}_m^{\prime} = \underline{q}_n^{\prime} \quad (2.41)$$

上式表明,刚体上任一点的转角矢量相等。

利用公式(2.36)及式(2.41)可写出 n 点与 m 点广义位移变换公式：

$$\underline{q}_n = \begin{Bmatrix} \underline{q}_n^* \\ \underline{q}_n^{\prime} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{q}_m^* + \underline{\Omega}_m \underline{q}_m^{\prime} \\ \underline{q}_m^{\prime} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{\Omega}_m \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_m^* \\ \underline{q}_m^{\prime} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

或记为

$$\underline{q}_n = \underline{p}_{nm} \underline{q}_m \quad (2.43)$$

其中广义位移变换阵：

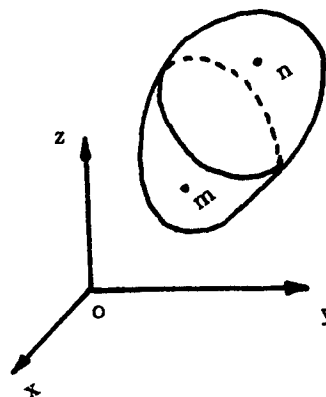


图 2.1 刚体元插值点变换

$$\underline{p}_{nm} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{\Omega}_m^n \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

故单元位移矢量可表为:

$$\underline{u} = \underline{N}_n \underline{q}_m = \underline{N}_n \underline{q}_n = \underline{N}_n \underline{p}_{nm} \underline{q}_m \quad (2.45)$$

$$\therefore \underline{N}_m = \underline{N}_n \underline{P}_{nm} \quad (2.46)$$

上式即为单元内不同插值点插值函数间的变换式。