$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

数制浅说

上海人民出版社

数制浅说

上海师范大学数学系计算数学组

上海人民出版社

内 容 提 要

本书通俗地介绍了几种常用的数制以及二进制与电子计算机的一些关系.

全书共分三个部分：第一部分从历史上叙述了数和数制概念的产生情况；第二部分较详细地讨论了十进制、二进制、八进制、十六进制以及它们之间相互转换的方法；第三部分介绍了二进制与电子计算机的一些关系.

本书可供中学生课外阅读，也可供需要了解数制知识的读者参考.

数 制 浅 说

上海师范大学数学系计算数学组

上海人民出版社出版

（上海绍兴路5号）

新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷

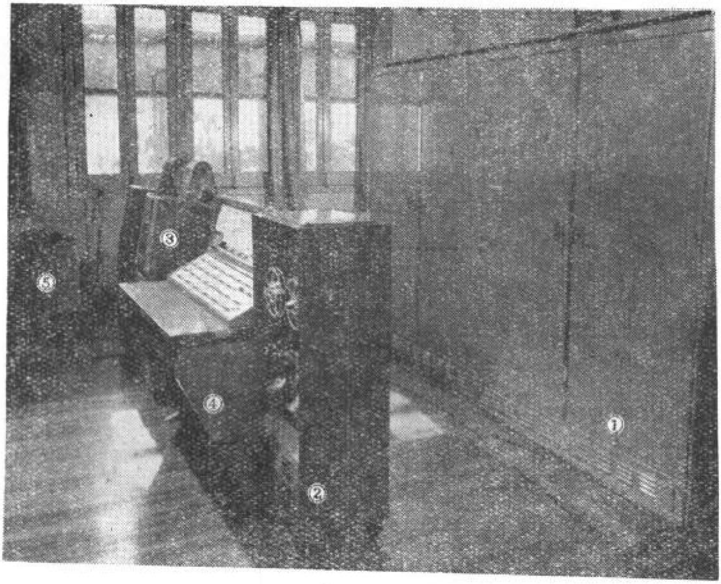
开本 787×1092 1/32　印张 2.5　字数 53,000

1974年6月第1版　1974年6月第1次印刷

印数 1—80,000

统一书号：13171·92　　定价：0.17元

在宽敞、明亮、整洁的电子计算机室中的
国产集成电路数字电子计算机



① 运算器、内存储器、控制器；
② 光电输入机；
③ 输出机；
④ 人工控制台；
⑤ 磁鼓(外存储器)

目　　录

前言 ……………………………………………………………1
一、数与数制 ……………………………………………………2
　1. 数的概念的产生 ……………………………………………2
　2. 数制的概念 …………………………………………………3
二、不同数制间的相互转换 ……………………………………8
　1. 数字的表达原理 ……………………………………………8
　2. 数制的转换…………………………………………………16
三、二进制与电子计算机…………………………………………33
　1. 为什么大多数电子计算机都采用二进制……………………35
　2. 怎样把十进数输入到电子计算机中去………………………56
　3. 怎样利用电子计算机来演算数学问题………………………63

前　言

你参观过电子计算机吗？当你走进宽敞、明亮、整洁的电子计算机室时，你一定会看到：一盘盘穿有不同小孔的纸带在计算人员的操作下，飞快地输入到机器中去；机器立刻迅速、准确地完成了成千上万次的运算；然后，在输出机上清晰地打印出一行行所需要的计算结果.

这时，你看着一台台运转着的国产精密电子计算机，一定会为我国工人阶级在毛主席的无产阶级革命路线指引下，坚持"**独立自主、自力更生**"的方针所取得的伟大胜利而感到无比自豪. 同时你还会想到，生产实际问题中的数字和计算公式是怎样告诉电子计算机的？它与这一盘盘穿了孔的纸带有什么关系呢？还有，我们平时所接触到的数字一般都是十进数，那么在电子计算机中是否也是用十进数进行计算呢？如果有人告诉你机器并不是用十进数进行运算的，而是用二进数进行运算的，那么你也许会问：什么叫二进数？二进数与十进数之间有什么关系？还有哪些常用的数制等等.

在这本书中，我们想通过介绍一些常用的数制和它们之间的相互转换关系，以及二进数与电子计算机之间的一些关系，来解答以上提出的一些问题.

一、数与数制

1. 数的概念的产生

在日常生活中，我们经常用到数及数的运算．在阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命斗争中也要注意事物的数量方面，才能把事情办好．目前，就一般人来说，即使是入学不久的儿童，都能认识一些简单的数，并且能进行简单的计算；然而数的概念的产生却是人类长期生产实践的结果，它经历了漫长的历史发展过程。

毛主席教导我们说："**人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西。**"恩格斯指出："**数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。**"(«反杜林论»第 35 页)人类在长期的生产实践活动中，在分析和概括大量实践经验的基础上，产生了自然数 1、2、3、4、…的概念．在原始社会中，人们从事狩猎和捕鱼活动，起初，他们只能判断捕获物的多少，也就是已有了数的感觉．随着人类社会生产活动的进一步发展，人们接触到各种物体的集合(我们将某种物体的全体称为由这种物体所组成的集合)，于是逐渐产生了与具体物体的集合相联系的数；用于不同种类的物体，数有不同的名称，一些是用来计算人的，另一些是用来计算船只的等等；这些"有名数"是分别属于一定种类的物体的，这里还不是抽象的"数"．恩格斯指出："**为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为**

依据的历史发展的结果。”(《反杜林论》第35页)人们对不少物体的集合进行比较，于是能够进一步由建立各个物体集合的元素(集合中每一个物体称为该集合的元素)之间的对应来判断集合所含物体数是否一样.例如,拿参加捕获的人与他们的捕获物进行比较，判断他们的个数多少.我国上古时代有“结绳而治”的说法,就是在绳子上挽成结子,以结子的个数来表示事物的件数.在此，人们认识到物体的数目是物体集合的一种性质,为了明显地分辨这种共同性质,就产生了抽象的“数”的概念,于是就有了自然数1、2、3、4、…. 分数是在度量中产生的.人们在丈量土地和测量容积中发现:一般说来,所选用的单位不能在被测量的量上置放整数次，所以在测量时不能满足于简单计算有多少个单位.这时必须把单位加以分划,以便利用单位的一部分来更准确地表示量,这样就产生了分数.至于无理数刻划了不可通约的量，正负数表示具有相反意义的量等等,在此就不多述了.

2. 数制的概念

随着生产工具的改进和生产力的逐步提高，人们需要对较多量的事物进行计数，因而需要用到较大的数.对于这样大量的数，人们怎样给出它们的名称和怎样书写呢?为了解决这个问题,就产生了进位的方法和各种不同的数制.

在古代社会，人们已经使用了十进制计数法.在殷代遗留下来的甲骨文字中，自然数的记法已经毫无例外地用着十进制.我们现在习惯使用的也是十进制.由于人们生来有十个指头，古代人类就用这十个指头计数，于是就创造了一、二、三、四、五、六、七、八、九、十这十个数字.当他们对较大量的物体进行计数时,先将十个物体放在一堆,算作一个单

位；将所有的物体分成这样一堆一堆的，得到若干堆，可能还剩下不足十个物体的零头；在堆数超过十时，又将每十堆算作一个单位，依次继续进行下去．在这样的计数过程中，就有了“百”、“千”、“万”等等．这就是十进制计数法．

与十进制计数法相配合的是十进制记数法．人们用阿拉伯数码1、2、3、4、5、6、7、8、9表示前九个自然数，数码0在书写数字时起着“填空作用”．满了十个，就在第二位上写上1，在第一位上写上0，即写成10；同样，十个十（即百）就在第三位上写上1，在第二位和第一位上写上0，即写成100等等．并排写着的数码374表示三个“百”、七个“十”与四个“一”的和．一般来说，并排写着的几个数码，它的最右面一个数码表示第一位（个位）上的单位“一”的个数，紧靠着它的左面的一个数码表示第二位（十位）上的单位“十”的个数，再左面的一个数码表示第三位（百位）上的单位“百”的个数等等．在十进制记数法里，首先我们有了十个数码：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9；再注意到各个数位间的关系：第一位（最右面一位）上的一个单位是一；任何两个紧靠着的数位，左面一位上的一个单位是右面一位上的一个单位的十倍．利用十个数码和位置法则——并排写着的数码，不仅是数码本身，而且它所在的位置也具有意义——就可写出任意大的整数了．

回顾一下历史，人们也并不是一开始就使用阿拉伯数字和掌握用进位法来记数的．我国古代采用十进制记数法，很早就有了一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等方块字，用它们来记数．到唐代，有了代表一、二、三、四、五、六、七、八、九这九个数字的数码，写法如下：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

横式　𝍩　𝍪　𝍫　𝍬　𝍭　𝍮　𝍯　𝍰　𝍱

到明、清时代，又演化成：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	零
纵式	〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩	〇
横式	一	二	三	〤	〥	〦	〧	〨	〩	〇

但是，我国古代的数字计算是用筹算，到十四世纪以后又发明了珠算，它们分别是用算筹和算珠进行计算的，而不用笔算．因此，当时虽有数码，但并不用它进行计算．

十三世纪以前，欧洲各国盛行罗马数码．用七个符号

I　V　X　L　C　D　M

分别代表数

一　五　十　五十　百　五百　千

将这些符号按照下面的规则组合起来，就能够表示任何整数．

(1) 用"重复书写几次"的方法，表示某一符号代表的数出现几次．

例如符号 I 表示数一，于是二和三就写成：

II、III.

符号 X 表示数十，于是二十、三十就写成：

XX、XXX.

用同样的方法可以写出二百、三百、二千、三千．

(2) 用"右加左减"的法则可写出另一些数．若在一个数码的右边附着一个较小的数码，就表示大数加小数的和．

例如，五、六、七、八分别写成：

V、VI、VII、VIII.

而十、十一、十二，则分别写成：

X、XI、XII.

若在一个数码的左边附着一个较小的数码，就表示大数

减去小数的差.

例如,四、九、四十、九十、九十九等分别写成:

IV、IX、XL、XC、IC.

(3) 用"加一横线"的方法表示千以上的数. 若在某数上加一横线,就表示这个数的一千倍.

例如,一万九千七百二十六写成:

$\overline{\text{XIX}}\text{DCCXXVI}$;

也可写成:

$\text{XIX}_{\text{m}}\text{DCCXXVI}$.

在这里,写得小一些的字母 m 表示千.

在罗马数字记数法中,虽然只有七个不同的符号,但是对于不太大的数目就要写得很长,并且用于计算也很不方便,因此现在已很少使用,在有的钟表和书上还可见到罗马数字.

我们现在所用的"阿拉伯"数字,最先是在印度发明使用的, 以后传入阿拉伯. 在十二世纪再从阿拉伯转输入欧洲各国,而被称为"阿拉伯"数字.

以上我们讲到十进制计数法和十进制记数法. 在日常生活中或在通常情况下, 我们采用十进制记数法进行计算很为方便. 但是,除了十进制以外,还有其他的进位制. 在商业上用到十二进制. 例如,十二支铅笔叫做一"打";十二"打"叫做一"箩". 特别,时间和角度的单位是采用六十进制. 古代人类由于生产劳动的需要, 从事天文和历法的研究. 他们观测地球的自转,研究昼夜的变化,自转的角度和经历的时间密切相关. 为了提高观测结果的精确程度, 以适应制定历法的需要, 人们将计算时间的单位"小时"和计算角度的单位"度"进一步划分: 以一小时作为六十分钟, 一分钟作为六十秒钟; 相应地以一度作为六十分,一分作为六十秒,这就是沿用至今的

六十进制．虽然我们在日常生活中用得最多的是十进制，但六十进制在某些方面也有方便的地方．例如，在不足一小时时，$\frac{1}{2}$小时＝30分，$\frac{1}{3}$小时＝20分，$\frac{1}{4}$小时＝15分，$\frac{1}{5}$小时＝12分，$\frac{1}{6}$小时＝10分等等，都得到较小的单位"分"的整数倍．而在十进制里，$\frac{1}{3}$则是无限小数了．

还有一种很有用的进位制，就是二进制．在二进制里，只需要两个数码：0与1．数"一"是个位上的一个单位，用数码1表示；数"二"就构成第二位上的一个单位，记作10；数"三"由第二位上的一个单位"二"和个位上的一个单位"一"所组成，所以写成11；数"四"包含两个"二"（即二的平方），因此需要进到第三位上了，写作100；至于数"八"它是二的立方，所以它的写法应和十进制的"千"一样，写成1000．在大多数电子计算机里都是对二进数进行运算的，利用二进数进行运算时，与它密切关联的还要用到八进数、十六进数等等．

随着我国社会主义革命和社会主义建设的不断深入发展，各条战线上形势大好，工业和近代科学技术正在蓬勃发展．在毛主席的无产阶级革命路线指引下，我国第一台每秒钟运算一百万次的集成电路电子计算机，已经试制成功，这标志着我国电子计算技术又前进了一步．由于电子计算机的使用日益广泛，人们对于了解有关二进制记数法方面的知识，就有了较普遍的要求．

二、不同数制间的相互转换

在前一节里，我们看到在通常情况下，人们采用十进制记数法；但在解决不同的问题时，也有采用其他进位制的，而且更为方便．在这一节里，我们就要介绍四种常用的数制——十进制、二进制、八进制和十六进制，并且给出它们之间相互转换的方法．

1．数字的表达原理

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”．各种不同的进位制都是用数字刻划客观事物的数量，而且基本方法是一样的．**“我们看事情必须要看它的实质，而把它的现象只看作入门的向导，一进了门就要抓住它的实质，这才是可靠的科学的分析方法。”**为了了解在各种不同数制下数字表达的原理，我们先看十进制记数法，掌握了它的实质，对于其他的进位制就容易理解了．

1.1 十　进　制

人们根据“逢十进一”的原则进行计数，因而有了十进制计数法，与它相配合的是十进制记数法．

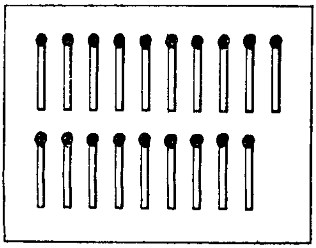


图　1

我们数一数图 1 中有多少根火柴．试想：怎样用数字表示出火柴的数量？

在十进制记数法中，有十个不同的数码：0、1、2、3、4、

5、6、7、8、9；根据“逢十进一”以及前节中所讲到的位置法则，就能用数字表达事物的数量，这就是十进制中数字的表达原理．我们称“十”为十进制记数法的“基数”．

我们数图1中的火柴，把十根火柴作为一堆时，得到一堆和九根零头；于是将数得的结果记作19．在此

$$19=1\times10+9\times1.$$

除此而外，上式还可以进一步写作

$$\begin{aligned}19&=1\times10+9\times1\\&=1\times10^1+9\times10^0.\end{aligned}$$

注意，零次幂的意义：$10^0=1$.

同样，在十进制中，数

$$\begin{aligned}256&=2\times100+5\times10+6\times1\\&=2\times10^2+5\times10^1+6\times10^0.\end{aligned}$$

我们从上面的表达式看出：在十进制记数法中的数（称为十进数）容易写成基数“十”的各次乘幂的和的形式．此十进数的各个数位上的数码（上例中的2、5、6）也就是所作的和式中各次乘幂的系数．第一位（自右至左）上的数码(6)是和式中“十”的零次幂的系数，第二位上的数码(5)是“十”的一次幂的系数，第三位上的数码(2)是“十”的二次幂的系数等等．根据这个法则，十进数

$$\begin{aligned}347012=3\times10^5&+4\times10^4+7\times10^3\\&+0\times10^2+1\times10^1+2\times10^0.\end{aligned}$$

正如数位上出现的“0”不可略去一样，表达式中系数是“0”的项同样要写出，这样一个数的各个数位上的数码才能与右面表达式中各项系数对应起来．

对于十进小数，我们注意小数点后第一位（自左至右）上的一个单位是个位上一个单位的十分之一，小数点后第二位

上一个单位是小数点后第一位上一个单位的十分之一(即为个位上一个单位的百分之一)等等. 于是,十进小数也可写作“十”的各次乘幂的和的形式,这里出现了负整数指数幂.

例如:

$$0.867=8\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}$$
$$=8\times10^{-1}+6\times10^{-2}+7\times10^{-3}.$$

注意,负数指数幂的意义:

$$10^{-1}=\frac{1}{10},\quad 10^{-2}=\frac{1}{10^{2}},\quad 10^{-3}=\frac{1}{10^{3}}\text{ 等等.}$$

同样 $190.036=1\times10^{2}+9\times10^{1}+0\times10^{0}$
$$+0\times10^{-1}+3\times10^{-2}+6\times10^{-3}.$$

从上面的例子中,我们看到十进数与将它写成关于基数“十”的各次乘幂的和式之间,有着明显的联系,这也是十进制记数法的一个根本性质.

“**矛盾的普遍性即寓于矛盾的特殊性之中。**”我们明了了十进制记数法的实质,就不难明白其他的进位制了.

1.2 二　进　制

当我们根据“逢二进一”的法则进行计数时,就得到二进制计数法. 试用二进制计数法来数图1中的火柴的根数. 怎样用二进制记数法将这个数写出来呢?

在二进制里有两个不同的数码0与1,根据“逢二进一”与相应的位置法则记数. 在这里,第一位(自右至左)上一个单位是“一”;第二位上一个单位是“一”的两倍,即“二”;第三位上一个单位又是“二”的两倍,即“四”;这样下去,第四位上一个单位是“八”;第五位上一个单位是“十六”等等. 我们称二进制的基数是“二”.

我们来数火柴，先将每二根并成一堆，得到九堆，还剩下一根(图 2)；由于堆数超过了“二”，又将每两堆并成一个较大的堆，得到四堆(每堆由四根火柴组成)，又剩下一个由两根火柴组成的堆(图 3)；再将这四堆火柴每两堆并成一堆，得到两个更大的堆(每堆由八根组成，见图 4)；最后再将这两堆并成一堆．这样以来，我们就得到了一个由“十六”根火柴组成的堆，一个由“二”根火柴组成的堆，另外还有一根(图 5)．注意这里没有由“八”根火柴及由四根火柴组成的堆．

火柴根数用二进数表示就是

$$10011.$$

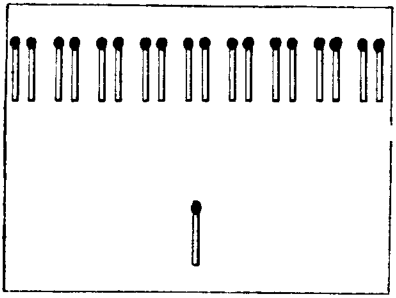


图 2

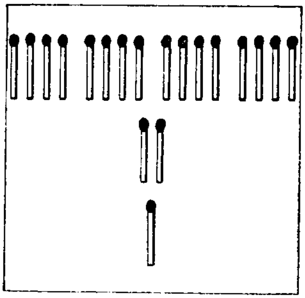


图 3

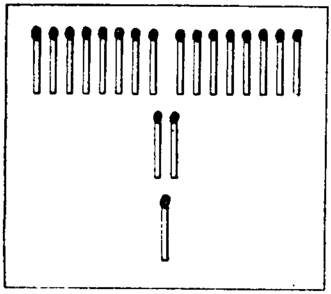


图 4

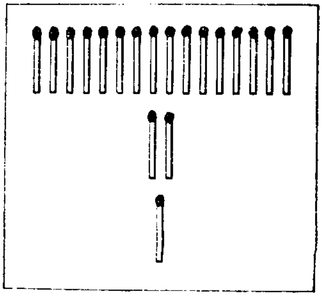


图 5

根据位置法则，不难写出下列十进数与二进数的对照表：

十进数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
二进数	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	…

例如，二进数 101 是"四"与"一"的和，即十进数 5；二进数 1101 是"八"、"四"与"一"的和，即十进数 13.

上面所讲的是二进整数，第一位（自右至左）上一个单位是"一"．对于相邻的两个数位来说，左面一位上一个单位是右面一位上一个单位的两倍；反过来，右面一位上一个单位是左面一位上一个单位的二分之一．对于二进小数，各个数位间有同样的关系．小数点后第一位（自左至右）上一个单位是它的左面一位上——小数点前一位上的一个单位的二分之一，即"一"的二分之一；小数点后第二位上一个单位是"二分之一"的二分之一，即"四分之一"；小数点后第三位上一个单位是"八分之一"，第四位上一个单位是"十六分之一"等等．从而，即有如下的对应关系：

二 进 数	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
十 进 数	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	…

由二进制的位置法则，任意一个二进数容易写成基数"二"的乘幂的和的形式．下面我们用$(\quad)_2$表示二进数，用$(\quad)_{10}$表示十进数．

例如：

$$\begin{aligned}(1101)_2&=(1\times8+1\times4+0\times2+1\times1)_{10}\\&=(1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0)_{10}\\&=(13)_{10}.\end{aligned}$$