经济数学

（线性规划）

毕卫星　主编

中国商业出版社

29.18

经济数学

（线性规划）

毕卫星　主编

中国商业出版社

经济应用数学

(一)

《微积分》学习指导书

中央电大经济应用数学编写组　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

*

开本 787×1092　1/32 印张7.125　千字　160

1986 年 12 月第 1 版　1987 年 4 月第 1 次印刷

印数　　1—133000

书号13300·53　　定价 1.00元

编写说明

为适应我国社会主义市场经济形势及对人才培养的需要，随着我国高校数学教学改革的不断深入，我们组织了具有丰富教学经验的骨干教师编写了这本《经济数学(线性规划)》一书.

本书旨在介绍许多线性规划问题的解法，这些方法在很多应用领域中都具有普遍的重要意义，且只需在学好初等线性代数基础上便可掌握.

在介绍各种方法时，我们删去了一些繁杂的理论推导与证明，而更多的是介绍这些方法在实际中如何运用. 其目的在于培养学员运用所学的理论与方法解决实际问题的能力，加强学员动手实践的能力.

本书是吕志远主编《经济数学(微积分)》、朱凤娟主编《经济数学(线性代数)》的姊妹篇.

本书由毕卫星任主编，张玉斌任副主编，参加编写的还有朱凤娟、王玲、沈家云等同志.

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正.

编者

1998年1月

目　录

第一章　线性规划的数学模型及其解的性质

线性规划是运筹学中研究较早，应用较广，理论上较成熟的一个重要分支.线性规划研究概括起来主要有两类：一是当某项任务确定了以后，尽量做到用最少的人力、物力、财力去完成这一任务；二是在已有的一定数量的人力、物力、财力的条件下如何合理地使用这些有限的资源，以便取得最大的经济效果.本教材讨论的线性规划问题，只是根据需要，提供必要的理论以及最基本的解题方法，而对涉及到的理论不加证明.下面首先介绍线性规划问题的数学模型.

第一节　线性规划的数学模型及一般形式

本节通过对几个生产实际问题进行分析，找出它们应该满足的数学关系式，从而达到以下目的：

1. 对线性规划所研究的内容有个初步的认识；

2. 针对生产实际中遇到的一些简单问题，进行分析，整理，建立起相应线性规划问题的数学模型；

3. 对线性规划问题所具有的一般性有一个全面的认识.

一、运输问题

例1：设有两个砖厂 A_1，A_2，产量分别为23万块和27万块，其产品将供应 B_1、B_2、B_3 三个工地，三个工地需求量分别为17万块、18万块和15万块，各产地到各工地的运价表如下.试求应如何调运，才能使总运费最省.

运价（元/万块） 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	10	15	20
A_2	20	40	20

解：设由 A_i 砖厂运往 B_j 工地的运砖数是 x_{ij}万块($i=1,2;j=1,2,3$)．例如 x_{12}表示由砖厂 A_1 运往工地 B_2 的数量，列表如下：

运量 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收　量	17	18	15	

分析：由 A_1 砖厂运往三个工地的运砖总数应等于 A_1 的产量23 万块，即 $x_{11}+x_{12}+x_{13}=23$.

同理，由 A_2 砖厂运往三个工地的运砖总数应等于其产量 27 万砖，即 $x_{21}+x_{22}+x_{23}=27$.

另一方面，两个砖厂供给 B_1 工地的砖的总数应等于 B_1 的需要量 17，即

$$x_{11}+x_{21}=17$$

同理可知

$$x_{12}+x_{22}=18$$

$$x_{13}+x_{23}=15$$

而各砖厂向各工地的运砖数应该是非负的，即 $x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3)$. 因为，若砖厂确实给工地运砖了，运砖数就应该是正数，若砖厂没给工地运砖，其运砖数就应该是零，所以运砖数不可能是负数.

最后，总运费 S 等于每个运量与对应的运价乘积的和，即

$$S=10x_{11}+15x_{12}+20x_{13}+20x_{21}+40x_{22}+20x_{23}$$

于是，得到这个运输问题的数学模型如下：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$的值，使它满足

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x \\ \geqslant 0(i=1,2;j=1,2,3) \end{cases}$$

并使目标函数 $S=10x_{11}+15x_{12}+20x_{13}+20x_{21}+40x_{22}+20x_{23}$ 的值最小(即总运费最少).

使目标函数 S 的值最小，今后用符号 $\min S$ 表示，如上例中求目标函数 S 的最小值就可以写成 $\min S=10x_{11}+15x_{12}+20x_{13}+20x_{21}+40x_{22}+20x_{23}$.

由以上产品(砖)有两个产地(两个砖厂)运往三个销地(三个工地)的运输问题的数学模型，不难得到某种物资由 m 个产地运往 n 个销地的一般运输问题的数学模型.

一般地，设某种物资有 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，联合供应 n 个销地 $B_1,B_2,\cdots B_n$. 各产地的产量(单位:吨)，各销地的销量(单位:吨)，各产地至各销地的单位运价(单位:元/吨)如下表所示：

销地 单价(元/吨) 产地	B_1 B_2 $\cdots$ B_n	产量(吨)
A_1 A_2 $\vdots$ A_n	C_{11} C_{12} $\cdots$ C_{1n} C_{21} C_{22} $\cdots$ C_{2n} $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ C_{m1} C_{m2} $\cdots$ C_{mn}	a_1 a_2 $\vdots$ a_m
销量(吨)	b_1 b_2 $\cdots$ b_n	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$

表中 a_i 表示产地 A_i 的产量$(i=1,2,\cdots,m)$

b_j 表示销地 B_j 的销量$(j=1,2,\cdots,n)$

c_{ij}表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的单位运价(元/吨)$(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$

$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 表示产销平衡,即各产地的总产量之和等于各销地的总销量之和.

问应如何调运,才能使总运费最省?

解:设 x_{ij}表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的产品数量$(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$.

于是,该问题的数学模型为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots n)$的值,使它满足

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2\cdots m;j=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

使 $\min S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\cdots+c_{mn}x_{mn}$.

二、生产组织与计划问题

例 2：某厂制造 A 和 B 两种产品，生产 1 吨 A 产品需耗煤 4 吨、电 5 千瓦、劳动日 10 个；生产 1 吨 B 产品需耗煤 9 吨、电 4 千瓦、劳动日 3 个. 已知 A、B 两种产品的单位利润分别为 1200 元和 700 元，现有条件为煤 360 吨、电 200 千瓦、劳动日 300 个，问 A、B 两种产品各生产多少，才能使该厂获得的利润最大？

解：将题给数据列表如下：

产品 / 单位产品所需原料 / 原料	A	B	现有原料
煤	4	9	360
电	5	4	200
劳动日	10	3	300
单位产品可得利润	1200	700	

设 A、B 两种产品分别生产 x_1、x_2 吨.

分析：两种产品生产同时都需用煤，但按其各自的生产数，它们的用煤总和不应超过煤的现有储备量，即 $4x_1+9x_2\leqslant 360$.

同理，两种产品按其生产数的共同用电总和不应超过电的使用限量，即 $5x_1+4x_2\leqslant 200$.

两种产品按其生产量使用劳动日的总和不应超过劳动日的允许使用范围，即 $10x_1+3x_2\leqslant 300$.

所有产品若安排生产其产量就是正数，若不安排生产其产量为零，即 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$.

于是这个问题的数学模型为：求一组变量 x_1、x_2 的值，使它们满足约束条件

$$
\begin{cases}
4x_1 + 9x_2 \leqslant 360 \\
5x_1 + 4x_2 \leqslant 200 \\
10x_1 + 3x_2 \leqslant 300 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

使目标函数 $S=1200x_1+700x_2$ 的值最大. 使目标函数的值最大今后用符号 $\max S$ 表示，如上例中使目标函数 S 的值最大就可以写为

$$\max S = 1200x_1 + 700x_2$$

由此，就不难得到用 m 种原料生产 n 种产品的一般生产组织问题的数学模型.

一般地，某厂用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 种原料，可以生产 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种产品，现有原料数、每单位产品所需原料数及每单位产品可得利润数如下表所示：

产品 / 单位产品所需原料 / 原料	$B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_n$	现有原料
A_1	$c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1n}$	a_1
A_2	$c_{21} \quad c_{22} \quad \cdots \quad c_{2n}$	a_2
$\vdots$	…………………	$\vdots$
A_m	$c_{m1} \quad c_{m2} \quad \cdots \quad c_{mn}$	a_m
单位产品可得利润	$b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n$	

问应如何组织生产才能使该厂的利润最大.

解：设生产产品 B_j 的数量是 $x_j(j=1,2,\cdots n)$，那么这一问题的数学模型为，求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$ 的值，使它满足

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \leqslant a_1 \\
c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \leqslant a_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \leqslant a_m \\
x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots n)
\end{cases}
$$

使 $\max S = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$.

三、配料问题

例 3:某农科所引进试种一种作物,根据国外资料介绍的情况,结合本所制定的种植计划,得知该作物全部生长过程中至少需要 32 公斤的氮、24 公斤的磷、42 公斤的钾,现有甲、乙、丙、丁四种肥料,其价格及每公斤中所含氮、磷、钾的数量由下表给出:

肥料 / 单位肥料所含成份量 / 成份	甲	乙	丙	丁	所需成份量(单位公斤)
氮	0.03	0.3	0	0.15	32
磷	0.05	0	0.2	0.1	24
钾	0.14	0	0	0.07	42
单位价格	0.4	1.5	1	1.3	

问应怎样配制这些肥料,才能既满足作物生长对氮、磷、钾的需要,又使施肥的成本最低?

解:设所需甲、乙、丙、丁四种肥料分别为 x_1、x_2、x_3、x_4 公斤.

分析:由于是四种肥料混合使用,因而四种肥料按其各自所设中的需求数混合之后的含氮量不能低于作物生长对氮的需求量 32 公斤.

即 $$0.03x_1 + 0.3x_2 + 0x_3 + 0.15x_4 \geqslant 32$$

同理,四种肥料混合后的含磷及含钾的数量分别不能低于 24 公斤和 42 公斤.

即 $$0.05x_1 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \geqslant 24$$

$$0.14x_1 + 0.07x_4 \geqslant 42$$

所有甲、乙、丙、丁四种肥料,使用了数量就是正的,没使用数量为 0,使用数量不可能为负值,即 $x_j \geqslant 0 (j=1,2,3,4)$. 最终使购买肥料的成本最低,即 $\min S = 0.4x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 1.3x_4$.

因此这个问题的数学模型为,求一组变量 $x_j (j=1,2,3,4)$ 使

它满足

$$\begin{cases} 0.03x_1 + 0.3x_2 + 0.15x_4 \geqslant 32 \\ 0.05x_1 + 0.2x_3 + 0.1x_4 \geqslant 24 \\ 0.14x_1 + 0.07x_4 \geqslant 42 \\ x_j \geqslant 0(j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

使 $\min S = 0.4x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 1.3x_4$.

由上面利用四种原料配制成具有三种成分的产品这样一个配料问题的数学模型，就不难得到由 n 种原料合成具有 m 种成分的产品的一般配料问题的数学模型.

一般地，用 n 种原料 $B_1, B_2, \cdots B_n$，配制成具有 m 种成分 $A_1, A_2, \cdots A_m$ 的产品，其所含成分需求量分别不低于 $b_1, b_2, \cdots b_m$，各种原料的单价以及各种单位原料所含成份的数量，如下表所示：

原料 / 单位原料所含成份的数量 / 原料所含成份的名称	$B_1\ \ B_2\ \cdots\ B_n$	产品所含成份需要量
A_1	$a_{11}\ \ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}$	b_1
A_2	$a_{21}\ \ a_{22}\ \cdots\ a_{2n}$	b_2
$\vdots$	………………	$\vdots$
A_m	$a_{m1}\ \ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}$	b_m
单　价	$c_1\ \ c_2\ \cdots\ c_n$	

问应如何配制，才能既满足需要又使购买原料的成本最低？

解：设所需原料 B_j 的数量为 $x_j(j=1,2,\cdots n)$.

于是，可得到一般配料问题的数学模型如下，求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$，使它满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ x_j \geqslant 0(j = 1,2,\cdots n) \end{cases}$$

使 $\min S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$.

四、合理下料问题

例 4:某车间要将 110 厘米长的条材截成长度为 50 厘米和 40 厘米的毛坯两种,然后进行加工. 现需要 50 厘米长的毛坯 100 根,40 厘米长的毛坯 200 根,问应怎样截法,才能既满足两种规格毛坯所需要的数量,又使所用的原材料最少?

解:首先将两种规格毛坯的所有不同下料方法列表如下:

下料方法 / 各种截法得到的毛坯个数 / 毛坯规格	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	毛坯需求量
50 厘米	2	1	0	100
40 厘米	0	1	2	200

设每种下料法所用的原料数分别为 x_1、x_2、x_3 根.

分析:因为是所有方法同时下料,故都在截 50 厘米规格的毛坯,各种方法截得的 50 厘米规格的毛坯总数应不少于对这种规格毛坯的需求量,于是按照所设的内容就应该有关系式:$2x_1+x_2+0x_3\geqslant 100$.

同理,各种方法同时下料截出的 40 厘米长毛坯总数应不少于对这个规格毛坯的需求量,即有关系式:$0x_1+x_2+2x_3\geqslant 200$.

而所有下料方法使用的原材料数应该是非负的,即有 $x_j\geqslant 0$ $(j=1,2,3)$.

最终在上述条件满足的情况下,使各下料方法所用的原材料数最少,即使 $\min S=x_1+x_2+x_3$.

于是就得到了这个下料问题的数学模型,即求一组变量 $x_j(j=1,2,3)$,使它满足

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \geqslant 100 \\ x_2+2x_3\geqslant 200 \\ x_j \geqslant 0(j=1,2,3) \end{cases}$$

使 $\min S=x_1+x_2+x_3$.

由上面使用三种下料方法截两种不同规格毛坯的下料问题数学模型，就不难得到使用 n 种不同下料方法截出 m 种不同规格毛坯的一般下料问题的数学模型.

一般地，用某种原材料截 m 种毛坯，即 $A_1,A_2,\cdots A_m$，有 n 种不同的截法，即 $B_1,B_2,\cdots B_n$，每种下料方法可得各种毛坯个数及各种毛坯的需求量如下表所示：

下料方法 / 各方法截得的毛坯个数 / 毛坯规格	$B_1\ \ B_2\ \ \cdots\ \ B_n$	毛坯需求量
A_1	$a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n}$	b_1
A_2	$a_{21}\ \ a_{22}\ \ \cdots\ \ a_{2n}$	b_2
$\vdots$	…………………	$\vdots$
A_m	$a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ \cdots\ \ a_{mn}$	b_m

问应怎样下料，才能既满足需要又使所用原材料最少？

解：设用 B_j 种方法下料所需要原材料数为 $x_j(j=1,2,\cdots n)$ 个单位.

于是得到该问题的数学模型如下，求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$，使它满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m \\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

使 $\min S=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

以上我们建立了几个经济领域中常见的实际问题的数学模型，尽管这些问题是各式各样的，但是它们的数学模型却有以下共同的特点：

1. 每个问题都要求一组变量，这组变量的每一组定值就代表一个具体方案.而这样的具体方案对每个线性规划问题来说都有无穷多，对每个问题通常都要求它们的变量是非负的.

2. 存在一定的限制条件(称为约束条件)，这些限制条件都可以用一组线性等式或线性不等式来表示.

3. 对每个问题都有一个目标要求，并且这个目标可以表示为一组变量的线性函数(称为目标函数).最后总是要求目标函数实现最大或最小.

因此，线性规划问题的数学模型一般可概括表示成，求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$ 的值，使它满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant,=) b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant,=) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant,=) b_m \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2,\cdots n) \end{cases} \tag{1.1}$$

使 $\min(\max)S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$.

其中线性函数 $S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 称为目标函数，线性不等式(或线性等式) $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \leqslant (\geqslant、=) b_i (i=1,2\cdots m)$ 称为约束条件，目标函数与约束条件中的变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$ 称为决策变量.所谓线性规划问题，实际上就是在众多的具体方案(今后称具体方案为可行解)中求一组决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots n)$，使它们在满足约束条件(1.1)的前提下，使目标函数取得最大或最小.

今后称满足约束条件(1.1)的一组决策变量 $x_j(j=1,2\cdots n)$ 为线性规划问题的一个可行解，使目标函数取得最大或最小的可行解称此线性规划问题的最优解，由最优解确定的目标函数值叫线性规划问题的最优值.

习题 1.1

写出下列线性规划问题的数学模型：

(1)某地有两个仓库 A_1 和 A_2，分别储存水泥 23 吨和 27 吨，有三个工地 B_1、B_2 和 B_3 各需水泥 20 吨、18 吨和 12 吨. 已知各仓库到各工地的单位运价如下表：

仓库 \ 运价(元/吨) \ 工地	B_1	B_2	B_3
A_1	12	10	15
A_2	8	16	9

问应如何调运，才能使总运费最省？

(2)有两个煤场 A 和 B，每月进煤分别不少于 60 吨和 100 吨，它们担负三个居民区供煤任务. 这三个居民区每月需用煤分别为 45 吨、75 吨和 40 吨. A 场离这三个居民区分别为 10 公里、5 公里、6 公里，B 场离这三个居民区分别为 4 公里、8 公里、15 公里，问这两煤场如何分配供煤，才使总运输力最小？

(3)某车间用三台机床 A_1、A_2、A_3 加工二种零件 B_1 和 B_2 分别为 50 个和 70 个；各机床必须加工出零件数 A_1 为 40 个，A_2 为 35 个，A_3 为 45 个；各机床加工二种零件加工费(单位：元/个)如下表所示：

机床 \ 每个零件加工费(元/个) \ 零件	B_1	B_2
A_1	0.4	0.3
A_2	0.3	0.5
A_3	0.2	0.2