高等教育叢書
東北人民政府文化教育委員會主編

投影幾何學

張世鈞　殷開泰
高志希　范懷遠　劉培德
編　譯

東北教育出版社
1952

高 等 教 育 叢 書

東北人民政府文化教育委員會主編

投影幾何學

張世鈞　殷開泰

高志希　范懷遠　劉培德

編　譯

東 北 教 育 出 版 社

一九五二年·瀋陽

前　　言

本書係大連工學院教授張世鈞，殷開泰，高志希，劉璐德，范懷遠等根據高爾頓（В.ГОРДОН）及謝緬寧夫，奧吉葉夫斯基（М•СЕМЕНЦОВ-ОГИЕВСКИЙ）合著的『投影幾何學教程』，並參考了恰雷(ЧАЛЫЙ)著的『投影幾何學』編譯而成。

原書經蘇聯高等教育部審定為機械製造及機械工程高等學校教科書。

讀者對本書如有批評和建議，請投函：『東北人民政府文化教育委員會』。

——編　者

目　　次

頁

內封皮……………………………………………… 1

前　言……………………………………………… 2

目　次……………………………………………… 3

序　言……………………………………………… 5

第一章　緒論……………………………………… 6

§1.1　研究投影幾何學的目的……………… 6

§1.2　關於投影方法的基本知識…………… 7

第二章　點………………………………………10

§2.1　點的投影………………………………10

§2.2　點在二投影面體系中的各種位置……12

§2.3　點在三投影面體系中的各種位置……15

問題（一）……………………………………21

習題（一）……………………………………22

第三章　直線……………………………………23

§3.1　直線的投影……………………………23

§3.2　直線在空間的位置……………………24

§3.3　線段的實長及其與投影面所成的角度……………………………………29

§3.4　把線段分成定比………………………31

§3.5　直線的跡點……………………………32

問題（二）……………………………………36

習題（二）……………………………………37

§3.6　二直線的相對位置……………………39

§3.7　相交二直線所成角度的投影…………41

問題（三）……………………………………43

頁

習題（三）……………………………………43

第四章　平面……………………………………45

§4.1　平面的表示法及跡線…………………45

§4.2　平面在空間的各種位置………………49

問題（四）……………………………………55

習題（四）……………………………………56

§4.3　在平面上的直線與點…………………57

§4.4　平面上的特殊直線……………………60

§4.5　二平面的交線…………………………63

問題（五）……………………………………69

習題（五）……………………………………69

第五章　直線與平面……………………………72

§5.1　相互平行的直線與平面………………72

§5.2　相交的一直線與一平面………………76

問題（六）……………………………………79

習題（六）……………………………………79

§5.3　相互垂直的直線與平面………………82

§5.4　看得見和看不見的問題………………86

問題（七）……………………………………89

習題（七）……………………………………89

第六章　投影的改造……………………………91

§6.1　變更投影面的方法……………………91

§6.2　變更一個投影面………………………92

§6.3　變更兩個投影面………………………96

問題（八）……………………………………99

頁

習題（八）……99

§6.4 圖形的旋轉……101

§6.5 點的旋轉……101

§6.6 線段的旋轉……103

§6.7 平面的旋轉……106

§6.8 不指明旋轉軸位置的旋轉法……108

§6.9 立體的旋轉……109

問題（九）……110

習題（九）……111

§6.10 重合法……113

§6.11 反旋轉法……116

問題（十）……118

習題（十）……118

第七章 平面立體……120

§7.1 怎樣在平面立體的表面上取直線和點……120

§7.2 平面立體的截斷面和展開圖……121

§7.3 直線貫穿平面立體……125

問題（十一）……128

習題（十一）……128

§7.4 平面立體與平面立體的相貫線……130

問題（十二）……136

習題（十二）……136

第八章 曲線及曲面……138

§8.1 曲線的作圖及其展開……138

§8.2 圓錐曲線……140

§8.3 螺線……141

§8.4 曲面……143

§8.5 單曲面……144

§8.6 扭面……147

§8.7 旋轉面……151

問題（十三）……154

習題（十三）……154

第九章 曲面立體……155

§9.1 曲面立體的截斷面……155

問題（十四）……160

習題（十四）……160

§9.2 直線貫穿曲面立體……162

§9.3 曲面立體與平面立體的相貫線……164

§9.4 曲面立體與曲面立體的相貫線……166

問題（十五）……173

習題（十五）……174

§9.5 曲面的展開圖……175

問題（十六）……181

習題（十六）……182

第十章 軸測投影……183

§10.1 基本知識……183

§10.2 正軸測投影的軸向縮短係數……185

§10.3 正軸測投影的軸間角……186

§10.4 平面立體的正軸測投影圖……188

§10.5 曲面立體的正軸測投影圖……191

§10.6 斜軸測投影……196

問題（十七）……199

習題（十七）……199

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

序　言

過去國內工學院投影幾何課程，大多採用『Anthony & Ashley：Descriptive Geometry』一書為課本。最初我們因為找不到適當教材，亦擬按照該書內容編寫。

一九五〇年春，我系講師殷開泰同志，在編寫期中找到了一本蘇聯高等教育部所審定的大學教本『В. О. Гордон и М. А. Семенцов-Огиевский：Курс Начертательной Геометрии；Огиз Гостехздат，1948』，發現該書內容很豐富，而且講述方法與英文本大不相同；它的系統清楚而嚴密，由淺入深，由簡及繁，完全符合於初學者的思想方法的過程。同年六月，我系成立了工程畫教研組，決定根據上述蘇聯教本進行編寫投影幾何的教材，由劉培德同志領導，張世鈞、殷開泰、高志希三同志參加工作。當時，因為我們規定學生學習這門課程的時間很少，不能學完蘇聯教本的全部內容；同時，又因為離上課只有兩個多月，也不可能把該書全部翻譯過來，於是決定抽出該書的基本內容，編寫講義，作為我們的臨時教材。

首先擬定教學大綱，經過教研組討論通過之後，就由張世鈞，殷開泰，高志希三同志根據大綱分工編寫；每完成一章，即先經劉培德同志修改，然後再經大家輪流校核。

為了慎重起見，在編完講義之後，曾進行了試講；並根據系內聽講的同志們對講義內容所提出的意見，稍作了修正。我們在同年的暑期，就是用這個講義給學生作了補課，效果很好（那一批學生在一年級沒有學過投影幾何）。

同年九月，開始第二次教這門課程。范懷遠同志亦參加教學工作，並在教學過程中，對講義內容提出了一些寶貴的意見。

本年春，我們決定根據過去兩次的教學經驗，來修改這本講義。這時，劉、高二同志的工作已有調動，所以講義的修改工作就由張、殷、范三同志來負責進行。首先由范同志從新擬了教學大綱，經張、殷二同志討論通過之後，決定由張世鈞同志根據新定的大綱，並主要參考『А. Т. Чалый：Начертательная Геометрия；Машгиз，1949』的教本，從新編譯；脫稿後，曾請范、殷二同志審校，劉、高二同志亦審校了一部份。另外請張述慶、郭克強、徐集檢三同志分別負責整理、校訂及繪圖等工作。

本書有下列一些特點：

（一）本書是按照一個學期 2(講授)—2(實習)—3(自習)—7(合計) 的學時編寫的。如果利用掛圖來幫助講課並適當地加以精簡，則對於一個學期 2—2—2—6 的學時，亦可適用。

（二）本書以第一角畫法為主，以便在講課時易於用模型來作表演。

（三）本書中插入很多寫生圖，來幫助說明。

（四）在每兩節課（一週）之後，都設有若干問題，以備學生複習和討論之用。

（五）本書很重視畫法與原理的結合，在解決每一個問題時，都提出了充分的理論根據，以免學生只知其然而不知其所以然。

由於工程畫教研組的同志們之通力合作和集體努力，終於在較短期間內完成了本書的編譯工作，解決了目前沒有適當中文教本的困難。根據兩次教學的經驗，在學生易於接受這門課程一點上，的確也收到了一定的效果。

但是，我們教學的同志們，經驗還很少，研究也還不深刻，而『向蘇聯學習』也只是才走了第一步。因此，在這本書中，一定還存在着不少的缺點和錯誤。我們誠懇地希望教育界和工程界的同志們多多賜與批評與指正。

胡　國　棟　　1951 年 8 月
於大連工學院機械系

第一章 緒 論

§1.1 研究投影幾何學的目的

任何物體都佔有空間的一部份。物體各個部份的形狀、大小以及它在空間的相對位置等，都可以直接地量出來，或者是經過適當的計算來決定的。

但是在研究物體的形狀、大小及相對位置等幾何性質時，常常並不是根據物體本身，而是把物體畫在平面上，利用它的圖來進行研究的。

這些二次元的圖（繪畫、照片等），能够在相當程度上幫助我們想像在空間的三次元的物體。但是在畫這些圖的時候，如果沒有一個特別的方法和規定，就不能够精確地決定所研究的物體在空間的相對位置，也不能够精確地決定它的大小，同時也不能够決定它的各個部份的相對位置。

而在工程上，却要求物體的這種圖，能够比較容易地把它的精確的尺寸和各個部份的相對關係反映出來。

投影幾何學就是解決這個問題的科學。它要找出和建立一些方法，來把三次元空間的幾何圖形畫在平面上；並使得我們能够根據這些方法來精確地決定這些幾何圖形在量度上和投影上的一切特性。

研究投影幾何學有三個主要目的：

1. 它要研究各種方法，來畫出現存的和新造的各種物體；

2. 它要研究各種方法，來根據所給的二次元的圖，把許多幾何圖形在三次元空間內的相互關係反映出來；也就是要找出爲正確的讀圖所不可缺少的方法；

3. 它要研究各種圖解法，來解決屬於空間幾何圖形的作圖題。

上述三點就決定了它在工程上各種課程中的地位。首先，投影幾何學對於工程畫提供了理論根據。

其次，有許多科學上和技術上的問題，要用一般的數學方法來研究它們是很複雜的。但是這些問題，往往可以恰恰用投影幾何學的方法，很簡單地獲得解決。

同時，投影幾何學的知識，對於學習材料力學、機械零件及研究工程上的某些特殊問題是有幫助的。

此外，我們還應當知道，投影幾何學這門課程，在培養對科學的思想方法的習慣上，具有重大的意義。這門課程既可以使學生的空間概念更加明確，又可以增強學生運用『比較』和『類比』等方法的能力；這些方法在解決理論問題和實際問題時都是有用的。同時，投影幾何學方法的運用，還可以使人養成一種習慣，這就是：不作模糊的陳述，而用嚴密的、合乎邏輯的論議與結論之鎖鏈，來把所作的『比較』和『類比』聯系起來。

對於工程師來講，投影幾何學方法的知識是必須具備的；如果沒有這個知識，就很難做出任何有成果的技術工作。

§1.2 關於投影方法的基本知識

在投影幾何學中，是使用投影的方法來畫圖的。

有限個或無限個點的集合，叫做**幾何圖形**；圖形中的每一點，叫做該幾何圖形的**原素**。

設有兩個幾何圖形F, F′；對於F上的每一個原素A，在F′上只有一個原素A′對應着；而對於F′上的每一個原素A′，在F上也只有一個原素A對應着。這時，這兩個幾何圖形F, F′就叫做**互相成投影的兩個圖形**。

現在取三角形ＡＢＣ（圖1.1）為例。通過任意一點Ｓ和三角形ＡＢＣ的各個頂點，作三個直線ＳＡ,ＳＢ,ＳＣ。假如取一個任意的新三角形ａｂｃ，使它的頂點相應地在直線ＳＡ,ＳＢ,ＳＣ上。這時，對於第一個三角形ＡＢＣ上的一點Ｍ，在第二個三角形ａｂｃ上只有一個點ｍ對應着；如果第一個三角形ＡＢＣ上的Ｍ點是取在直線ＢＣ上，則第二個三角形ａｂｃ上的ｍ點就一定在直線ｂｃ上。三角形ＡＢＣ（圖形Ｆ）和三角形ａｂｃ（圖形Ｆ′）是互相成投影的兩個圖形。

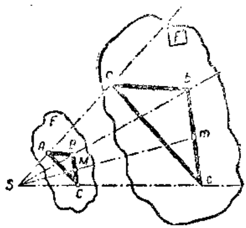

圖 1.1

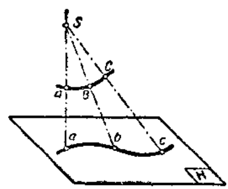

圖 1.2

中心投影法：在空間設想一個定平面Ｈ和一個定點Ｓ（圖1.2）。用直線把定點Ｓ和空間的一個幾何圖形的各個原素Ａ, Ｂ, Ｃ, ……連接起來，使直線ＳＡ,ＳＢ,ＳＣ, ……與定平面Ｈ相應地交於a, b, c, ……等點。這時，a, b, c,……等點分別叫做Ａ, Ｂ, Ｃ,……等點在Ｈ平面上的**中心投影**，定點Ｓ叫做**投影中心**，定平面Ｈ叫做**投影面**，直線ＳＡ, ＳＢ, ＳＣ, ……等叫做**投影線**，Ａ, Ｂ, Ｃ, ……等點叫做**投影點**。這種投影方法，就叫做**中心投影法**。

使Ａ, Ｂ, Ｃ, ……等點投影的，那個出於中心Ｓ的投影線束，就形成了一個**投射曲面**。於中心投影法，這個曲面在一般情形下是一個錐面。因此，中心投影法也叫做**錐面投影法**。

於中心投影法，假如投影面Ｋ（圖1.3）是位於投影中心Ｓ與投影點Ａ, Ｂ, Ｃ, ……之間的一個鉛直平面，而中心Ｓ同時又是觀察者的**視點**時，在Ｋ平面上所得的中心投影a, b, c, ……等，就叫做Ａ, Ｂ, Ｃ, ……等點的**透視投影**或簡稱為**透視圖**。這時，投影面Ｋ叫做**畫面**，畫面被設想是透明的。在畫面上所得到的透視圖，是富於實感的；這種圖常用於建築工程、畫地圖、空中攝影測量、結晶圖等，同時也為畫家所採用。圖 1.4 是

一個建築物的透視圖。

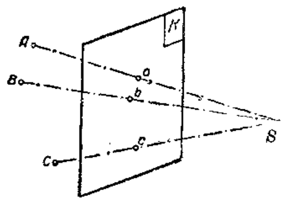

圖 1.3

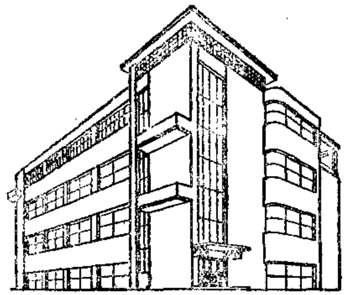

圖 1.4

平行投影法：於中心投影法，如果我們把投影中心S移至無窮遠，則投影線SA, SB, SC,……等就變成平行線（圖1.5）。像這樣，用定方向的平行線作為投影線的投影方法，就叫做**平行投影法**。

於平行投影法，使A, B, C,……等點投影的，那個平行的投影線束，在一般情形下就形成了一個柱面。因此，平行投影法也叫做**柱面投影法**。

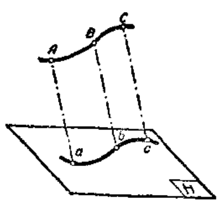

圖 1.5

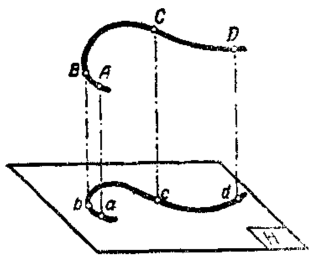

圖 1.6

正投影法：平行投影法可以分為**斜角投影法**與**直角投影法**兩種。於斜角投影法，投影線與投影面的交角不是直角；於直角投影法，這個交角就是直角（圖1.6）。

直角投影法在工程畫裡用得最廣，也叫做**正投影法**。根據正投影法畫圖時，既簡單又精確。以下本書除了最後一章以外，其餘各章所講的都是正投影法。

中心投影法、平行投影法、正投影法都具有一個共通的特性。這就是：**在一定的投影條件之下，空間的點可以完全決定它的投影的位置，但點的一角投影卻不能夠決定該點在空間的位置**。

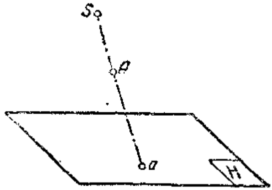

圖 1.7

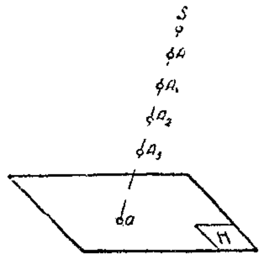

圖 1.8

例如於圖1.7，取一定的投影中心S和一定的投影面H時，因爲通過S，A二點只能够作出一個直線；所以對於空間的一點A，在投影面H上只有一個中心投影a對應着。但如圖1.8所示，在一個投影線上可以隨意取很多點—— A，A_1，A_2，A_3，……等，而這些點在投影面H上的中心投影都重合在a點；所以單靠點的一個中心投影a，是不能够決定該點在空間的位置。中心投影法如此，平行投影法和正投影法也同樣是如此。

第二章　點

§2.1 點 的 投 影

如上所述，要想只靠點的一個投影來決定該點在空間的位置，是不可能的。**但如果把點在互相垂直之二投影面上的正投影配合在一起，就可以完全決定該點在空間的位置**。點是如此，一切幾何圖形同樣都是如此。

現在我們在空間設想互相垂直的兩個投影面；一個是水平面H，叫做**橫面**；另一個是鉛直面V，叫做**縱面**（圖2.1）。這兩個投影面的交線OX叫做**投影軸**。

投影面V和H都被投影軸OX分成兩半；橫面H被分成前半（H）和後半（H_1），縱面V被分成上半（V）和下半（V_1）。整個空間又被二投影面V，H分成四個部份，每一個部份叫做**分角**；這四個分角的數法如圖2.1 所示。

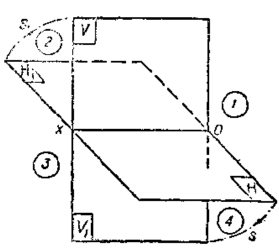

圖 2.1

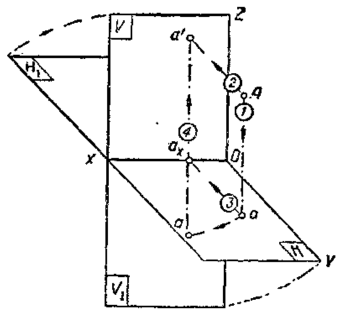

圖 2.2

現在我們在第一分角內取一點A（圖2.2）。因為點在平面上的正投影，就是由該點向該平面所作垂線的垂足；所以由A點向H平面作垂線得垂足a時，a點就是A點在橫面上的投影，叫做A點的**橫面投影**。再由A點向V平面作垂線得垂足a′時，a′點就是A點在縱面上的投影，叫做A點的**縱面投影**。

由二投影線Aa（橫面投影線），Aa′（縱面投影線）所決定的平面Aaa_xa′同時垂直於二投影面V，H，所以它就必然垂直於V，H的交線OX。平面Aaa_xa′與V，H分別相交於二直線$a'a_x$及aa_x，二直線$a'a_x$和aa_x又相交於a_x點。

現在再倒過來，由a點作H平面的垂線aA，由a′點作V平面的垂線a′A。這時，因為這兩個垂線都在平面Aaa_xa′上，所以它們一定相交於一點A。這就是說，只要依靠A點的橫面投影a和縱面投影a′就可以完全決定A點在空間的位置。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongboo

投影圖：在上述二投影面體系中，決定A點在空間之位置的橫面投影 a 和縱面投影 a′ 是在互相垂直的二投影面H，V上，而不是在同一平面上。但是我們在實際畫圖的時候，却是要把圖畫在圖紙上。因此，在投影之後，還要使正交的二投影面中之一，繞投影軸OX旋轉90°，使二投影面完全重合。我們**規定V平面不動，而使H平面按照箭頭的方向**（圖 2.1,2.2）**繞 OX 軸旋轉 90°**。如果**由左方**（即由點X）**面對着OX軸來看，則H平面的旋轉應按照順時針的方向**。

物體在投影面上的投影和投影面一道，經過上述旋轉而重合在同一平面上時的圖，就叫做**投影圖**。把圖 2.1 中的兩個投影面H，V畫成投影圖，則如圖 2.3 所示。

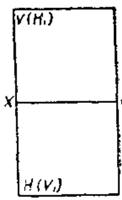

圖 2.3

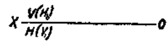

圖 2.4

普通因為平面是廣濶無邊的，所以在投影圖上不畫出投影面的境界，而只畫出一個投影軸OX，如圖 2.4 所示。

投影圖的作法：使H平面繞OX軸旋轉而重合於V平面時，所有在H平面上的點的軌跡都是圓弧。這些圓弧都是在垂直於旋轉軸OX的平面上，它們的中心都是在OX軸上，它們的半徑就是旋轉點與OX軸的距離。對於a點來講（圖 2.2），旋轉中心就是 a_x 點，旋轉半徑就是 aa_x，旋轉圓弧就是在平面 Aaa_xa' 上。

因此，當H平面經過旋轉而重合於V平面時，a 點就一定在二平面V，Aaa_xa' 之交線上。而直線 aa_x 又垂直於OX軸，所以我們可以肯定地講：**在投影圖上，空間任意一點的兩個投影（即橫面投影與縱面投影）一定是在投影軸 OX 的同一垂直線上。**

這樣，我們就可以按照如下的步驟，從A點及其投影 a,a′ 的寫生圖（圖2.5）來作它的投影圖（圖2.6）：

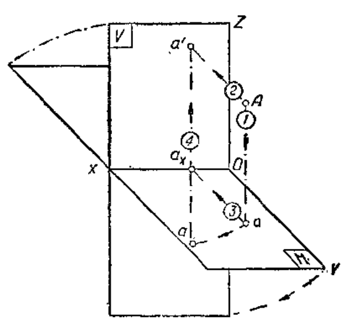

圖 2.5

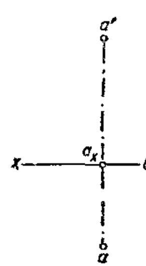

圖 2.6

1) 在圖上任意的地方作水平的投影軸OX；在軸上O點的左方取一點 a_x，使該點與O點的距離等於圖 2.5 中的線段Oa_x。

2) 通過a_x點作直線垂直於OX。

3) 在這個垂線上，由a_x點向上取線段a_xa'，使該線段的長度等於 A 點與H平面的距離（於圖 2.5，$Aa=a_xa'$）。所得的a'點就是A點的縱面投影。

4) 由圖 2.5 可知，當H平面經過旋轉而重合於V平面之後，A點的橫面投影 a 就移到OX軸的下方。因此，為了求出 a點，就要在所作的垂線上，由a_x點向下取線段a_xa，使該線段的長度等於A點與V平面的距離（於圖2.5，$Aa'=aa_x$）。

投影圖的讀法：要想用投影圖（圖 2.6）來想像第一分角內之A點在空間的位置，就需要在腦中設想：以直線OX為折縫把圖折起來，使H，V二平面構成直角並使圖的下半成為橫面的前半；然後再由 a 點作直線垂直於H，由 a'點作直線垂直於V。這兩個垂線的交點，就決定了A點在二面角（H，V）內的位置。

必須特別指出：**在投影圖**（圖 2.6）**中，A點的縱面投影a'與 OX 軸的距離，就是 A 點與H平面的距離；橫面投影 a 與OX軸的距離，就是A點與V平面的距離。**

§2.2 點在二投影面體系中的各種位置

點在空間對二投影面H，V的位置，可以分成九種情形。

首先，點可以在四個分角（即第一、二、三、四分角）中之某一分角內。其次，點又可以在四個**半平面**（即H平面的前後兩半H，H_1 和V平面的上下兩半V，V_1）中之某一半平面上。最後，點還可以在H，V二平面的交線（即OX軸）上。

以下我們就來研究一下，點在空間的位置（如上所述，有九種情形）對它的橫面投影與縱面投影所給與的特徵。

第一種情形：點A(a, a')在第一分角內。這種情形，我們已經研究過了（圖 2.5, 2.6）。在投影圖（圖2.6）上，A點的縱面投影a'在OX軸的上方，橫面投影a在OX軸的下方。

第二種情形：點B(b, b')在第二分角內（圖 2.7）。在投影圖（圖 2.8）上，B點的兩個投影 b,b' 都在OX軸的上方。

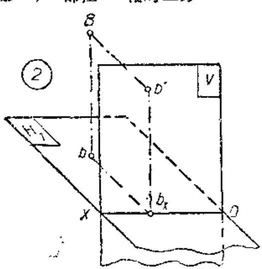

圖 2.7

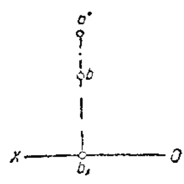

圖 2.8

第三種情形： 點C(c,c′) 在第三分角內（圖2.9）。在投影圖（圖2.10）上，C點的兩個投影被分在OX軸的兩側；但和第一分角內的點有所區別，即橫面投影c在OX軸的上方，縱面投影c′在OX軸的下方。

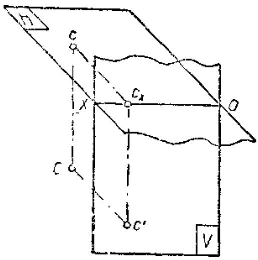

圖 2.9

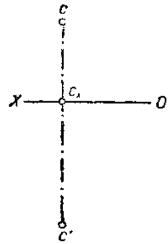

圖 2.10

第四種情形： 點D(d,d′) 在第四分角內（圖2.11）。在投影圖（圖2.12）上，D點的兩個投影d, d′都在OX軸的下方。

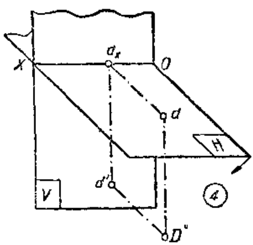

圖 2.11

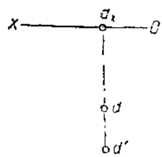

圖 2.12

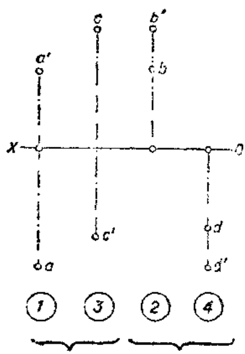

圖 2.13

現在我們把各個分角內的點的橫面投影與縱面投影綜合起來，畫在一個投影圖（圖2.13）上，來比較一下它們對OX軸的位置。在這裡，我們可以看到：**奇數分角**（即第一、三分角）**內的點A,C的兩個投影是分居在OX軸的上下兩側；而偶數分角**（即第二、四分角）**內的點B.D的兩個投影是同居在OX軸的一側。**

奇數分角內的點，又可以根據它的兩個投影的位置，很容易地得到區別。這就是說：**第一分角內的點A的縱面投影a′是在OX軸的上方，橫面**面投影a**是在OX軸的下方**；與此相反，**第三分角內的點C的縱面投影c′是在OX軸的下方，橫面投**

影c是在OX軸的上方。

偶數分角內的點，同樣也可以得到區別。這就是說：**第二分角內的點B的兩個投影都是在OX軸的上方；第四分角內的點D的兩個投影都是在OX軸的下方。**

以下我們還要研究:點在V平面的上下兩半及H平面的前後兩半時，它的投影對OX軸處於什麼位置。這時，我們就要想起：在V平面上的點與V平面的距離就等於零；在H平面上的點與H平面的距離也等於零。但是一個點與一個投影面的距離，在投影圖上就反映爲該點在另一投影面上的投影與OX軸的距離。因此，這種點的兩個投影之中，必有一個是在OX軸上。

第五種情形： 點E(e, e′) 在H平面的前半部上（圖2.14，2.15）。E點與H平面的距離等於零。而在投影圖上，點與H平面的距離就是它的縱面投影與OX軸的距離。因此，E點的縱面投影 e′ 是在OX軸上；橫面投影 e 與E點本身相重合，而位於OX軸的下方，它與OX軸的距離就是E點與V平面的距離。

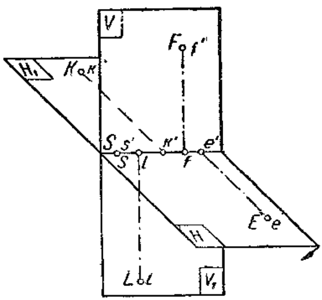

圖 2.14

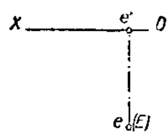

圖 2.15

第六種情形： 點F(f, f′) 在 V 平面的上半部上（圖 2.14, 2.16）。F 點的縱面投影 f′ 與F點本身相重合，而在投影圖上是位於OX軸的上方；它與OX軸的距離就等於F點與H平面的距離。F點的橫面投影 f 是在OX軸上。

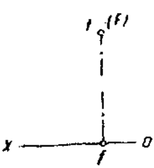

圖 2.16

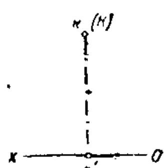

圖 2.17

第七種情形： 點K(k, k′) 在H平面的後半部（H_1）上（圖2.14，2.17）。在投影圖上，K 點的橫面投影 k 與K點本身相重合，而位於 OX 軸的上方；縱面投影 k′ 是在OX軸上。

第八種情形：點 L(l, l') 在V平面的下半部 (V_1) 上（圖2.14，2.18）。在投影圖上，L點的縱面投影 l' 與L點本身相重合，而位於OX軸的下方；橫面投影 l 是在OX軸上。

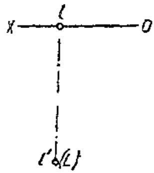

圖 2.18

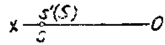

圖 2.19

第九種情形：點 S(s, s') 在OX軸上（圖2.14，2.19）。在投影圖上，S點的兩個投影 s, s' 都與S點本身相重合。

綜合以上各種情形，我們就可以根據如下的規律，由點的兩個投影在投影圖上對OX軸之位置來決定該點在空間對H，V二投影面的位置。

（1） **假如在投影圖上，點的橫面投影是位於OX軸的下方，則該點在空間一定是位於縱面的前方；反之則位於縱面的後方。**

（2） **假如在投影圖上，點的縱面投影是位於OX軸的上方，則該點在空間一定是位於橫面的上方；反之則位於橫面的下方。**

（3） **假如在投影圖上，點的某一個投影是位於OX軸上，則該點在空間一定是位於某一個投影面上。假如在投影圖上，點的則個投影都位於OX軸上，則該點在空間一定也是在OX軸上。**

§2.3 點在三投影面體系中的各種位置

象限：我們已經知道，點在互相垂直之二投影面上的正投影，可以完全決定該點在空間的位置。但如果被投影的物體形狀很複雜時，為了表示得更清楚起見，常常需要更多的投影面。實際上在工程圖裡，普通是用三個投影面；有時還要用更多的投影面。

現在我們就來研究點在互相正交之三個投影面上的投影。

於圖 2.20表示了互相正交的三個投影面 H，V，W。W 平面也是一個鉛直的平面，叫做**側面**；點在側面上的投影叫做**側面投影**。因為W平面同時垂直於二投影面 V，H，所以它一定也垂直於 V，H 的交線OX。

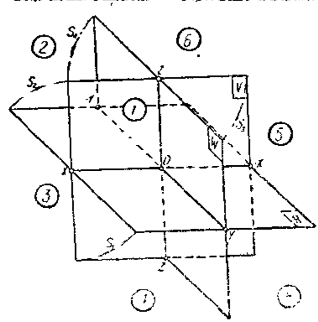

圖 2.20

同樣地，H平面也一定垂直於W，V的交線OZ；V平面也一定垂直於W，H的交線OY。

互相正交的三個投影面V,H,W形成了八個**三面角**，這種三面角就叫做**象限**。八個象限的數法，如圖2.20所示。

由圖2.20可知，每一個投影軸都要被投影面分成兩半。我們用字母O表示三個軸的交點；並規定OX軸的左半、OY軸的前半、OZ軸的上半爲正的部份，OX軸的右半、OY軸的後半、OZ軸的下半爲負的部份。

要想使上述三投影面的模型變成投影圖，就要經過兩次投影面的重合。首先，使H平面繞OX軸旋轉與V平面重合；這時，如果**從OX軸的左方來看，旋轉是按照順時針的方向**（見圖2.20；圖中標有箭頭S_1, S_2）。然後再使W平面繞OZ軸旋轉與V平面相重合；這時如果**從OZ軸的上方來看，旋轉是按照反時針的方向**（在圖中，標有箭頭S_3, S_4）。依次作完這兩次重合之後，就得到三投影面體系的投影圖（圖2.21）。

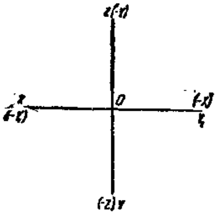

圖 2.21

因爲在這兩次旋轉當中，V平面保持不動，所以在該平面上的OX軸與OZ軸的位置也是不變的。OY軸是W,H二平面的交線，它是既在W上又在H上的一條直線。因此，當第一次旋轉——卽H平面重合於V平面時，OY軸的負的方向將和OZ軸的正的方向相合；OY軸的正的方向將和OZ軸的負的方向相合。而當第二次旋轉——卽W平面重合於V平面時，OY軸的正的方向將和OX軸的負的方向相合(OY_1)；OY軸的負的方向將和OX軸的正的方向相合。結果：投影軸在投影圖上的配備情況，如圖2.21所示。

點的座標與投影的關係：如果已知一個點的直角座標，我們就可以把互相垂直的三個投影面H,V,W當做座標面，把三個投影軸OX,OY,OZ當做座標軸，把O點當做座標原點。這時，從這個點到H,V,W三平面的距離，就是這個點的座標。如果我們用字母A來表示空間的點，用 a, a′, a″ 來表示A點在H,V,W三平面上的投影時（圖2.22），則

1）線段Aa″（A點到W平面的距離)就是A點的x座標，$Aa''=a_xO=x$；

2）線段 Aa′（A點到V平面的距離)就是A點的y座標，$Aa'=a_xa=y$；

3）線段 Aa（A點到H平面的距離)就是A點的z座標，$Aa=a_xa'=z$。

但是，我們必須使座標軸的正負方向與投影軸的正負方向一致。也就是說：我們一定要把投影軸OX的左方、OY的前方、OZ的上方，當做座標軸的正的方向；OX的右方、OY的後方、OZ的下方，當做座標軸的負的方向。

設A點的座標爲（x, y, z）時，很明顯地，A點的橫面投影 a 的座標就是（x, y, 0），縱面投影 a′ 的座標就是（x, 0, z），側面投影 a″ 的座標就是（0, y, z）。

各個象限中的點的座標的正負號，如下表所示。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo