主　编：钱俊龙

副主编：孙重芬　黄云龙

概率论与应用统计

中国统计出版社

概率论与应用统计

主　编：钱俊龙
副主编：孙重芬　黄云龙

中国统计出版社

(京)新登字041号

概率论与应用统计

GAILULUN YU YINGYONG TONGJI

主编：钱俊龙

副主编：孙重芬　黄云龙

中国统计出版社出版

（北京三里河月坛南街38号100826）

新华书店北京发行所发行

北京通县永乐印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　14.625印张　31　万字

1992年9月第1版　1992年9月北京第1次印刷

印数：1—5500

ISBN 7-5037-0711-9/O·12

定价：9.80 元

前　言

随着我国工业、农业、国防和科学技术事业的蓬勃发展，在自然科学和社会科学的许多领域中越来越多地应用概率统计理论及其数学方法来解决有关的实际问题，并日益获得显著的成果。但是，由于概率统计具有不同于其他学科的特点，往往使初学者难以掌握，使实际应用工作者感到难以下手。有鉴于此，我们编写了这本既有理论，又能密切联系实际应用的概率统计书奉献给广大读者。本书可作为高等院校统计专业和其他经济管理专业以及工科院校本科各专业开设《概率论与数理统计》、《应用统计》等课程的教材，也可作为从事统计应用的工程技术人员和管理人员的参考书。

本书包括概率论和应用统计两个部分的内容。前四章为第一部分，从数量关系角度研究随机现象的规律性，并为后续内容提供理论基础。后八章为第二部分，从理论与实际相结合上研究随机现象的统计规律性，并编写了对统计应用具有实际指导意义的量化分析、试验设计和质量管理等内容。其中，一至九章为教学基本内容，十至十二章是统计应用部分，教学中可依学时作适当的选择。此外，每章之后配有一定数量的习题。学习本书只要具有微积分和线性代数的一般知识。书中对一般的证明尽可能给出推导，对一些冗长的或较高数学要求的证明则从略。

参加本书编写的人员有：钱俊龙（主编）、孙重芬（副主编）、黄云龙（副主编）、孙昌言、赵君明，并由任才方

担任主审。在编写过程中还得到多方面支持和帮助，在此一并表示感谢。限于编者水平，书中难免有一些错误，盼望同行和读者批评指正。

编　　者

1991年7月

目　　录

第一章　随机事件与概率……………………………………………1

§1.1　随机事件及其概率定义……………………………………1

§1.2　随机事件的概率………………………………………………6

§1.3　概率的加法定理……………………………………………11

§1.4　条件概率与乘法定理………………………………………14

§1.5　全概公式和贝叶斯公式……………………………………20

§1.6　重复独立试验和二项概率…………………………………24

习题一……………………………………………………………26

第二章　随机变量及其概率分布………………………………30

§2.1　随机变量及其分布函数……………………………………30

§2.2　离散型随机变量……………………………………………34

§2.3　连续型随机变量……………………………………………42

§2.4　随动变量函数的分布………………………………………52

§2.5　多元随机变量及其分布……………………………………55

习题二……………………………………………………………68

第三章　随机变量的数字特征和极限定理……………………72

§3.1　数学期望……………………………………………………72

§3.2　方差、矩……………………………………………………82

§3.3　极限定理……………………………………………………93

习题三……………………………………………………………99

第四章　样本及其分布……103

§4.1　随机样本和统计量……103
§4.2　经验分布函数和直方图……109
§4.3　统计量的分布……113
习题四……125

第五章　参数估计……127

§5.1　最大似然估计……127
§5.2　总体期望和方差的点估计、矩估计……134
§5.3　正态总体期望的区间估计……142
§5.4　正态总体方差的区间估计……151
习题五……158

第六章　假设检验……162

§6.1　一个正态总体的假设检验……164
§6.2　二个正态总体的假设检验……174
§6.3　总体分布函数的假设检验……179
习题六……185

第七章　方差分析……189

§7.1　引言……189
§7.2　单因子方差分析……192
§7.3　双因子方差分析……201
习题七……216

第八章　一元线性回归……219

§8.1　引言……219
§8.2　无重复试验时的一元线性回归……220
§8.3　重复试验时的一元线性回归……229
§8.4　预测和控制……237
§8.5　一元非线性回归……248
习题八……256

第九章　多元线性回归……259

§9.1　多元线性回归的数学模型……259
§9.2　参数 b 的最小二乘估计……261
§9.3　回归系数 $\hat{b}$ 的计算步骤……265
§9.4　回归方程的显著性检验……270
§9.5　回归系数的显著性检验……273
§9.6　预测和控制……277
习题九……283

第十章　试验设计法……286

§10.1　引言……286
§10.2　单因子试验……287
§10.3　双因子试验……306
§10.4　正交试验设计……320
习题十……333

第十一章 数量化分析……337

§11.1 引言……337

§11.2 数量化分析Ⅰ类……337

§11.3 数量化分析Ⅱ类……351

§11.4 数量化分析Ⅲ类……367

§11.5 数量化分析Ⅳ类……379

习题十一……385

第十二章 质量控制……388

§12.1 产品抽样验收检查……388

§12.2 工序质量控制……400

习题十二……415

附表1 标准正态分布表……418

附表2 泊松分布表……422

附表3 t 分布表……426

附表4 χ^2 分布表……428

附表5 F 分布表……432

习题答案……446

第一章　随机事件与概率

在自然界和人类社会中所发生的现象可分为二大类，一类是我们完全可以预言它们在一定条件下是否会出现的现象。例如，上抛物体必然会下落；在标准大气压下不到100℃水就不会沸腾等等，我们把这类现象称为**必然现象**，或**确定性现象**。然而自然界和人类社会中还存在着另一类现象，我们无法预言它们在一定条件下是否一定会出现。例如，上抛一枚硬币，落下后其结果可能出现正面，也可能出现反面；开发一种新产品投入市场，可能畅销，也可能滞销；等等。我们把这类现象称为**不确定现象**。不确定现象虽然在个别次数试验的情况下，其结果难以肯定，但在大量重复试验中，又体现出某种规律性。这种在个别试验中呈现不确定性，在大量重复试验中又具有某种统计规律性的现象，我们称之为**随机现象**。概率论是研究随机现象的数量规律的一个数学分支，它也是应用统计的基础。本章主要介绍随机事件和概率的一些基本知识。

§1.1　随机事件及其概率定义

一、随机试验和随机事件

试验是一个常用的术语，但在概率统计中所讲的试验是指满足下列条件的试验：

1.试验可在相同的条件下重复进行；

2. 每次试验的结果不止一个，且事先知道试验所有可能出现的结果；

3. 在每次试验前无法知道会出现何种结果。

这类试验称为**随机试验**。例如，在相同条件下上抛一枚硬币，观其正面朝上还是反面朝上；在一定条件下，抽捡一件产品；将新产品投放市场试销；在同等条件下射击打靶，观其弹落点偏离中心目标的距离等等。不难分析，这些都是随机试验，简称**试验**，一般用 E 表示。

在随机试验中所观察到的每一个可能结果称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A，B，C 等表示。如上抛硬币试验中 $A=\{$正面朝上$\}$，抽检产品试验中 $B=\{$产品为正品$\}$等等都是随机事件。

在每次试验中，一定发生的事件称为**必然事件**，记作 U；在每次试验中，一定不发生的事件称为**不可能事件**，记作 V。如上抛硬币试验中 $A=\{$正面或反面朝上$\}$是必然事件，$B=\{$正面和反面同时朝上$\}$为不可能事件。严格地说，它们不是随机事件，为讨论问题方便起见，以后我们把必然事件和不可能事件也当作随机事件的特例来处理。

在随机事件中，有些事件可以看作是由某些更简单的事件复合而成。例如，投掷一颗骰子观其点数，事件“出现奇数点”就可以看作是由出现“1点”、“3点”和“5点”这三个事件复合而成，而这三个事件就不能再分解了。我们把不可能再分解的事件称为**基本事件**，把包含有一个以上的基本事件复合而成的事件称为**复合事件**。基本事件的全体称为**基本事件组**，基本事件组本身也是一个必然事件，一般仍把它记为 U。在一次试验中，至少有一个基本事件发生，且

最多只有一个基本事件发生。

在以后的学习中，为了使问题变得更加直观，容易理解，常常可以应用点集的概念。我们将随机试验E的所有基本事件所组成的集合称为试验E的**样本空间**，记为S。一个基本事件可看作是样本空间S的一个**元素**，复合事件是样本空间S的一个**子集**，必然事件就是样本空间S，不可能事件就是空集Φ。

例1.1 将一批产品任取一件进行检验，我们用T表示正品，用F表示次品，则样本空间为$S=\{T,F\}$。

若连续二次抽取，每次任取一件进行检验，这也是一次试验，则样本空间$S=\{(T,T),(T,F),(F,T),(F,F)\}$，其中$(T,F)$表示第一次抽到正品，第二次抽到次品。

例1.2 投掷一颗骰子是一次试验，所有可能出现的点数组成样本空间$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，“出现奇数点”的事件$B=\{1,3,5\}$是一个复合事件，它是S的一个子集。

二、事件的关系和运算

在相同的条件下，有多种随机事件，其中，有的比较简单，有的则比较复杂。在研究复杂的随机事件时，需详细地分析事件与事件的各种关系，以便能更深刻地认识事件的本质。下面介绍事件之间的几种重要关系和事件的运算。

1.事件的包含和相等

在一次试验中，如果事件A的发生必然会导致事件B的发生，则称事件B包含事件A，记作$B\supset A$或$A\subset B$，这种关系如图1.1所示。

对于两个事件A和B，若同时成立$A\subset B$和$B\subset A$，则称

事件A与事件B相等（或等价），记作$A=B$。

显然，对每一事件A都有$\Phi\subset A\subset S$。

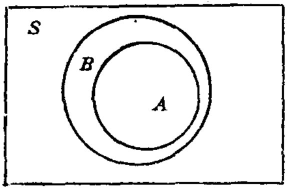

图1.1 $A\subset B$

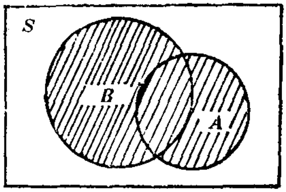

图1.2 $A\cup B$

2.事件的和（并）

事件"A或B"称为事件A与B的和（并），它表示事件A与事件B至少有一个发生所构成的事件，记为$A\cup B$，这种关系如图1.2所示。

类似地"事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生"，这一事件称为事件A_1，A_2，…，A_n的和，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。

3.事件的积（交）

事件"A且B"称为事件A与B的积（交），它表示事件A与事件B同时发生所构成的事件，记为$A\cap B$或AB。图1.3中的阴影部分表示$A\cap B$。

类似地可定义事件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$的积

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

4.互不相容事件

若事件A与事件B不能同时发生，即$A\cap B=\Phi$，则称事

件A与事件B为**互不相容事件**，或**互斥事件**，其关系如图1.4所示。

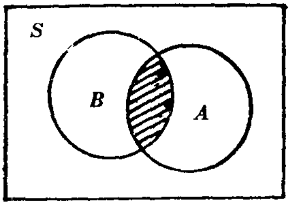

图1.3　$A \cap B$

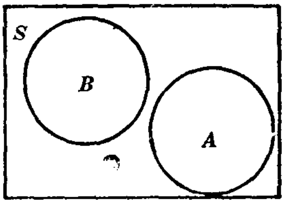

图1.4　A与B互斥

5.事件的差

若事件A发生而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与事件B的**差**，记为$A-B$，图1.5中的阴影部分表示$A-B$。

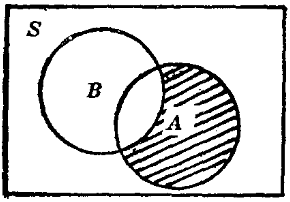

图1.5　$A-B$

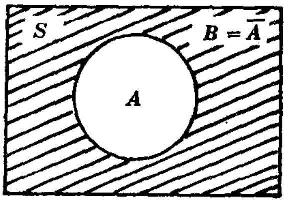

图1.6　$A \cup \bar{A} = S$

6.对立事件

若事件A与事件B同时满足$A \cup B = S$和$AB = \Phi$，则称事件A与事件B为**对立事件**，并称A是B的**逆事件**，或B是A的逆事件。事件A的逆事件记为$\bar{A}$。显然有$A \cup \bar{A} = S$，即$\bar{A} = S - A$；$A\bar{A} = \Phi$；$\bar{\bar{A}} = A$。其关系如图1.6所示。

概率论中事件的关系与运算和集合论中集合的关系与运算是一致的，同集合论一样，对于事件的运算也有下列性质：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$

$$A\cap B=B\cap A \tag{1.1-1}$$

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \tag{1.1-2}$$

(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \tag{1.1-3}$$

(4)对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B} \tag{1.1-4}$$

例1.3　向目标连发三枪，$A_i=\{$第 i 枪命中目标$\}(i=1,2,3)$，试用 A_i 表示下列事件：

(1)至少击中一枪　$A_1\cup A_2\cup A_3$

(2)只有第一枪击中　$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

(3)只击中一枪　$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

(4)三枪都击中　$A_1A_2A_3$

(5)三枪都未击中　$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

其中(5)与(1)是对立事件，事实上由对偶律

$$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

§1.2　随机事件的概率

一、概率的统计定义

1.频率及其基本性质

对于随机事件 A，在一次试验中我们无法知道其是否会

出现，然而当试验重复进行到一定次数时，事件A出现的次数与试验总次数之比则总是在一个确定的数值附近波动，该比值称为事件A发生的频率。为了证实这一点，历史上曾有多人做过投掷一枚均匀硬币的最简单的试验，表1.1是其中部分人的试验结果。

表 1.1

实 验 者	投掷次数	出现正面次数	频 率
泊 松	4 040	2 048	0.5069
K.皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
K.皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

从表1.1中可看出，随着试验次数的增加，事件A（出现正面）发生的频率呈现出稳定性，十分接近0.5，这个数值反映了在一次试验中事件A出现的可能性的大小。下面给出频率的确切定义。

定义1.1 随机事件A在n次试验中出现n_A次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \qquad (1.2\text{-}1)$$

为随机事件A在n次试验中发生的频率。

设随机试验E，S为E的样本空间，A，B为E的二个随机事件，根据频率的定义，容易看出在n次试验中的频率具有以下性质：

（1）$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$ （1.2-2）

（2）$f_n(S)=1 \qquad f_n(\Phi)=0$ （1.2-3）

（3）若A，B互不相容，即$AB=\Phi$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B) \qquad (1.2\text{-}4)$$

我们把证明留给读者自己完成。

对于性质（3）我们可推广到随机试验E的任意m个两两互不相容的事件的情况，即

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)$$
$$=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m) \qquad (1.2\text{-}5)$$

2.概率的统计定义

在一定条件下重复进行n次试验，在n次试验中事件A出现的次数为n_A，当试验次数n很大时，事件A发生的频率$\frac{n_A}{n}$稳定地在某一常数p附近波动，并且这种波动的幅度随着试验次数n的增加而减小，则称p为随机事件A在该条件下发生的**概率**，记作$P(A)=p$。

一般我们把上述定义称为概率的统计定义，概率$P(A)$就是在一次试验中随机事件A发生的可能性大小的数量描述。根据定义显然有

（1）对任何事件A的概率满足 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$ （1.2-6）

（2）必然事件的概率 $P(S)=1$ （1.2-7）

（3）不可能事件的概率 $P(\Phi)=0$ （1.2-8）

概率的统计定义为我们提供了近似计算概率的一般方法，即通过大量试验，用频率的稳定值来近似概率。但在有些情况下无须做大量试验，利用人们在实践中所积累的经验来分析问题，可直接计算概率，这就是下面要介绍的古典概型问题。