线性代数

XIAN XING DAI SHU

刘有炳 编著

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

西北工业大学出版社

线 性 代 数

刘有炳编著

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书是按照国家教委工科数学课程指导委员会制定的“线性代数”教学要求进行编写。内容有矩阵、线性方程组、行列式、特征值和特征向量、二次型。本书可供高等工业院校各专业选作教材，也可供有关工程技术人员参考。

线 性 代 数

编 著 者 刘有炳

责任编辑 刘彦信

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路 127 号）

开本 787×1092 毫米 1/32 6.375 印张 131 千字

1994 年 4 月第二版 1994 年 4 月第 2 次印刷

印数：6500 册—9000 册

ISBN 7-5612-0131-1/O・2 定价：4.00元

前　言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会制定的“线性代数”教学要求，并结合工科各专业的需要编写的，内容包括矩阵、线性方程组、行列式、特征值和特征向量、二次型等。

本书特点是以矩阵理论为主线，加强了矩阵、特征值和特征向量等在实际中应用较广的内容，并尽量为工程技术人员的实际应用提供更多的预备知识。在内容编排上，也改变了传统的编排次序，一开始就讲述矩阵，而把行列式安排在方程组理论之后，这样有利于读者的阅读、理解，并且突出了重点、完善了系统。

本书可供工程技术人员参考，也可作为工科大学的教材。本书配有“线性代数学习方法指导”，可作为函授大学的教材，指导书配有较多例题，一方面旨在通过例题叙述解题的基本方法和技巧，另一方面考虑到函大教学的特点，便于主讲教师及面授辅导教师的教学以及学生自学，全书讲授需 34 学时。

由于编者水平有限、错漏之处难免，衷心希望读者批评指正。

编　者

1988 年 2 月

目　录

第一章　矩阵

第一节　线性方程组

线性方程组是指含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 s 个一次方程的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{1}$$

其中 a_{ij} 是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数，b_i 是第 i 个方程中的常数项 $(i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,n)$

所谓方程组(1)的一个解 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 是指 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 组成的一个有序数组

$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$

把它代替 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，方程组(1)的各个方程都变成恒等式.

如果两个线性方程组的解完全相同，则称这两个方程组为同解方程组.

对于两个同解的线性方程组来说，解决了其中一个方程组的求解问题，等于解决了另一个方程组的求解问题. 因此，

讨论线性方程组求解问题的基本思想，就是把一个线性方程组的求解问题归结为另一个与之同解的而又易于求解的线性方程组的求解问题.

1-1 消元法

消元法的基本思想是把方程组中一部分方程变成未知量较少的方程，这是一个古典的方法，但由于它行之有效，至今仍然是求解线性方程组的最基本方法之一. 这个方法中所包含的基本思想，在线性代数的其它理论问题和计算问题中都将发挥重要的作用. 下面通过例子来说明消元法的具体做法.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=14 \\ 3x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases} \tag{2}$$

解 把第一个方程的 -2 倍、-3 倍分别加到第二、第三个方程中消去 x_1 得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ \quad -7x_2-4x_3=2 \\ \quad -5x_2-10x_3=-20 \end{cases} \tag{3}$$

用 -5 除第三个方程得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ \quad -7x_2-4x_3=2 \\ \quad\quad x_2+2x_3=4 \end{cases} \tag{4}$$

互换第二、第三两个方程的位置得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4 \\ \quad -7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

在(5) 中将第二个方程的 7 倍加到第三个方程得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4 \\ \qquad\quad 10x_3 = 30 \end{cases} \tag{6}$$

从(6) 的最后一个方程得 $x_3 = 3$. 再逐次代入(6) 的第二、第一个方程得 $x_2 = -2, x_1 = 1$. 这样，得到原方程组的解是：

$(1, -2, 3)$

1-2 线性方程组解的情况

我们用例子来说明线性方程组的解有几种可能情况. 前面的例 1 是有唯一解的例子，现在看另外两个例子.

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

解 把第一个方程的 -3、-2 倍分别加到第二、第三个方程上，得到与(7) 等价的同解方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ \quad 5x_2 - x_3 = -5 \\ \quad 5x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \tag{8}$$

将(8) 的第二个方程乘以 -1 后加到第三个方程上，然后再用 1/5 乘第二个方程，得到与(8) 同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ \qquad x_2 - \dfrac{1}{5}x_3 = -1 \\ \qquad\qquad 0 = 2 \end{cases} \tag{9}$$

显然，不论x_1,x_2,x_3取那一组数，都不能使(9)的第三个方程变成恒等式. 因此，方程组(9)无解，从而原方程组无解.

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \tag{10}$$

解 将第一个方程的 -3、-2、-1 倍分别加到第二、第三、第四个方程上，得到与(10)同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases} \tag{11}$$

将(11)中第二个方程的 -1 倍依次加到第三、第四个方程上得到与(11)同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

由(12)得

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 \\ x_3 = -1 + 5x_2 - 5x_4 \end{cases} \tag{13}$$

显然，未知量 x_2,x_4 取任意一组值，代入(13)式，可求得 x_1 与 x_3 的值，则这样得到的 x_1,x_2,x_3,x_4 的一组值是原方程组(10)的一个解. 反之，对于原方程(10)的任意一个解 (c_1,c_2,c_3,c_4)，因为它也是方程组(12)的解. 于是有一组恒等式

$$\begin{cases} c_1 - c_2 \qquad + 2c_4 = 0 \\ \quad 5c_2 - c_3 - 5c_4 = 0 \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} c_1 = c_2 - 2c_4 \\ c_3 = -1 + 5c_2 - 5c_4 \end{cases}$$

这说明原方程组的任一个解 (c_1,c_2,c_3,c_4) 都可以由表达式(13)得到：只要让 x_2,x_4 取一组值 (c_2,c_4)，代入(13)式中求出 x_1 与 x_3 的值，就得到原方程组的那个解.

综上所述，表达式(13)表示了原方程组(10)的所有解，(13)式等号右边的未知量称为方程组(10)的一组自由未知量. 用一组自由未知量表达其它未知量的表达式(13)称为方程组(10)的一般解.

方程组(10)的自由未知量的取法不是唯一的，比如也可以取 x_3,x_4 作为自由未知量，由(12)得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}x_3 + x_4 \end{cases} \tag{14}$$

表达式(14)也是方程组(10)的一般解. (13)与(14)式虽然形式上不一样，但它们本质是一样的，它们都表示了方程组(10)的所有解.

在方程组(10)的一般解(13)中，当自由未知量 x_2,x_4 取

定一组值时，可以得到方程(10)的唯一的一个解. 当自由未知量 x_2, x_4 取不同的两组值时，相应得到方程组(10)的不同的二个解. 由于自由未知量 x_2, x_4 可以取无穷多组值，从而得到方程组(10)有无穷多个解.

上面几个例子说明，线性方程组的解可能出现：有唯一解，有无穷多个解，无解. 同样 n 元线性方程组的解也只有这三种可能.

第二节　矩阵及其代数运算

2-1 矩阵的定义

从第一节看出：用消元法解线性方程组时，在消元的每一步骤上，主要是对方程组的系数和常数项作相应的运算，而未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和等号每次都是重复写出. 它们仅仅是起着标位的作用. 因此，只要不把各个方程每个未知数和常数项的次序搞乱，在作消元法时完全可以不必写出未知数和各个等号. 比如，把例 3 中方程组(10)的各系数和常数项按原来先后、左右次序写出来，即有

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{matrix}$$

用这 20 个数的这种有一定次序的罗列方法代表线性方程组(10). 实际上，每一横排代表方程组(10)的一个方程，最后一个竖排代表常数项，其它各个竖排依次代表各未知数的系数，

进而，对(10) 所作每一个运算也都能在上述罗列方法中自然地反映出来. 比如，把第一个方程乘以 -3 加到第二个方程上，相当于用 -3 乘以第一横排的五个数后相应地加到第二横排的五个数上，则得

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{matrix}$$

它们恰好代表方程组(10) 经过上述后所得的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ \qquad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

为了说清楚上述想法和作法，下面给出不仅在线性代数中是重要的，而且在许多方面都有应用的概念 —— 矩阵.

定义 1 由 $s \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,s, j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的 s 行，n 列的表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \tag{15}$$

称为一个 $s \times n$ 矩阵. 记为 $A_{s\times n}$(简记作 A)，也可记作 $(a_{ij})_{s\times n}$，或 (a_{ij}).

表里的每一个数 a_{ij} 都叫做矩阵 A 的元素. 矩阵(15) 的每一横排的 n 个数叫做矩阵 A 的一个行；每一竖排的 s 个数叫做一个列. 由此，$s \times n$ 矩阵由 s 个行 n 个列组成. 特别地，$n \times n$ 矩

阵称为 n 阶矩阵，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角线元素.

定义 2 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 0.

定义 3 主对角线上的元素全是 1，其余全为 0 的 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，记为 E.

利用线性方程组(1) 的系数和常数项可以组成两个矩阵如下：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \quad \overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

A 称为方程组(1) 的系数矩阵，$\overline{A}$ 称为方程组(1) 的增广矩阵.

定义 4 两个矩阵 $A_{s\times n}$，$B_{m\times r}$ 称为是相等的，如果它们有

1) 行数相同，即 $s=m$.

2) 列数相同，即 $n=r$.

3) 对应元素都相等，即对所有可能的 i,j 有 $a_{ij}=b_{ij}$.

例 4 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{和 } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

当且仅当 $w=1,x=-3,y=0,z=5$ 时称 A 与 B 是相等的，

并记为 $A=B$.

2-2　矩阵的基本运算

一、矩阵的加法

定义 5　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个 $s \times n$ 矩阵，规定：

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

称为 A 与 B 的和，记为 $C=A+B$.

例 5　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

则　$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & -2+2 & 3+1 \\ 2+1 & -1+3 & 4-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

从定义看出，矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加. 当然，相加的矩阵必须要有相同的行数和列数. 由于矩阵加法归结为它们的元素的加法，也就是数的加法. 所以不难验证，矩阵的加法适合以下规律.

1° 交换律：$A+B=B+A$

2° 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$

3° 零矩阵满足：$A+O=A$

4° 矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的负矩阵，记作 $-A$，显然有

$$A+(-A)=O$$

矩阵的减法定义为：$A-B=A+(-B)$

二、矩阵的数量乘法(简称数乘)

定义 6 设 k 是一个数

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

规定：

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 与数 k 的数量乘积，记为 kA. 换句话说，用数 k 乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上 k.

例 8 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & -6 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{bmatrix},$$

$$k=\frac{1}{2}$$

则
$$kA=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & \frac{1}{2}\\ 2 & -3 & -\frac{1}{2} & 4\\ 0 & 1 & -4 & -2\end{bmatrix}$$

不难验证，数量乘法适合以下的规律：

1° $1\cdot A=A$

2° $(kl)A=k(lA)$

3° $(k+l)A=kA+lA$

4° $k(A+B)=kA+kB$

三、两个矩阵的乘法

矩阵的乘法很独特，我们先通过一个具体例子来看矩阵的乘法是怎么规定的.

例 7 某公司有四个工厂 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，生产甲、乙、丙三种产品，矩阵 A 表示一年中各个工厂生产各种产品的数量，矩阵 B 表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元)，矩阵 C 表示各工厂的总收入及总利润.

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{Ⅰ}\\ \text{Ⅱ}\\ \text{Ⅲ}\\ \text{Ⅳ}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array}\end{array}$$

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}\begin{array}{c}\text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\end{array}\\ \begin{array}{cc}\text{单位价格} & \text{单位利润}\end{array}\end{array}$$