克疑难、采用全新理念——奥林匹
思维方式，上名牌大学不再难了

2合1

同步拓展·奥林匹克

主编　黄军华

高二数学（下）

试验修订本
修订版

龍門書局

奥林匹克

同步拓展 2合1

修订版

高二数学（试验修订本）（下）

从书主编　常力源
数学主编　汤步斌
本册主编　黄军华

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

同步拓展·奥林匹克．高二数学：试验修订本．下：2合1/常力源主编；黄军华分册主编．—修订版．—北京：龙门书局，2003.1

ISBN 7-80160-365-6

Ⅰ．同…　Ⅱ．①常…②黄…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第081901号

责任编辑：李敬东

龍門書局出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国青年出版社印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销

2002年1月第一版　开本：A5(890×1240)
2003年1月修订版　印张：7 3/8
2003年1月第二次印刷　字数：273 000
印数：25 001—65 000

定价：8.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

人类社会已迈入了崭新的世纪，同时也迎来了知识经济时代。知识经济呼唤高素质人才，高素质人才应具备系统扎实的科学文化基础，健康健全的身体、心理素质，同时，更应具有较强的思维能力、实践能力和创新精神。

学校教育的目的是育人。一切为了学生发展的理念，已日趋成为现代教育的灵魂。如何发掘学生潜能，并引导其健康发展成鲜明的个性特长？如何推进以创新精神的培养为核心的全面素质教育？如何在基础教育学段为未来高素质人才的成长铺垫好坚实的根基？每一位有责任感的教育工作者都在认真地思考和探索着。编写这套丛书的学校，就是这一伟大变革中的积极实践者。

湖南师大附中这所有着近百年办学历史的三湘名校，不失时机地把握改革开放的历史机遇，坚持以“三个面向”为指针，以改革为动力，以育人为根本的办学方针，确立了“以人为本、承认差异、发展个性、着眼未来”的学校课程改革理念，努力构建高中课程新体系，推动素质教育的深入实施。“学生主体、教师主导、思维主线”的教学思想，“全员发展、全面发展、特长发展、和谐发展”的育人目标得以较好的实现，学生整体素质和个性特长得到较好发展；高中毕业会考和高考成绩多年来一直名列湖南省前茅；1985 年以来向北京大学、清华大学等全国名牌重点大学免试保送优秀毕业生 850 多名，还有 38 名学生考入中国科学技术大学等大学少年班。在国际中学生学科奥林匹克竞赛中，获数、理、化、生等学科金牌 12 枚，银牌 6 枚，为国家争得了极大荣誉，学校亦被誉为“金牌摇篮”！学校推行全面素质教育的育人经验被《人民教育》长篇报道。

全面推行素质教育，培养学生创新精神的主渠道是学科课堂教学。为了更好地与同行们交流学科育人的心得，同时也为了能给莘

莘学子们提供一套既能与现行教学大纲和教材同步配套，又能与启迪思维、开发智力、拓宽视野的奥林匹克竞赛思想方法合拍的综合性训练读本，在龙门书局的大力支持下，我们组织了湖南师大附中有着丰富教学经验的教师和国际奥林匹克竞赛的金牌教练们编写了这套不同学段、多学科组合的《同步拓展·奥林匹克（2合1）》丛书，力求能通过同步辅导与竞赛培训的有机结合，使学生在明确重点、突破难点的基础上，加深对基础知识、基本技能的理解和运用，积累解题技巧，掌握学科思想方法，学会举一反三和融会贯通，能将知识内联、外延、迁移、重组，在新情景下解决新问题，切实提高学生的学科学习能力和创新意识。

本丛书不但面向重点学校的尖子生，是竞赛的入门普及读物，更是面向普通学校的广大学生同步导学、系统复习和应考提高的有效工具书。“同步”与“竞赛”相结合，是本书的特色，对我们来说，也是一次新的尝试。由于受编著者水平所限和编著时间仓促，书中难免出现不足和差错，恳请不吝指正。

常力源

攻克疑难，采用全新理念

——第二次修订版前言

2000 年本丛书问世，好评如潮。

2001 年本丛书的修订版推出后，市场销量大增。

2002 年本丛书的第二次修订版与读者见面了。它内容更新，形式更活。它将成为您忠诚的朋友，伴随在您的身边。

由于本丛书借用学科奥林匹克思维方式来解决同步学习中的疑难问题，效果较佳，因而受到中上等学生的普遍欢迎。虽然起点较高，但仍兼顾基础知识的巩固和基本技能的培养，也成了成绩一般的学生追赶别人的强有力武器。

面对复杂的问题提出简单有效的解决办法，在这方面，《2 合 1》被认为是最好的专家。

在本次修订中，对数、理、化、生各册的例题部分突显了“思维方式”栏目，在每章后还增加了“3+ X 拓展园地”栏目；在语文各册中增加了“基础知识拓展”“名言警句诵记”“时文精品赏析”等栏目；在英语各册中增加了阅读理解的题量和听力训练。相信经过第二次修订的《2 合 1》将更贴近读者，更贴近中高考。因此我们说：

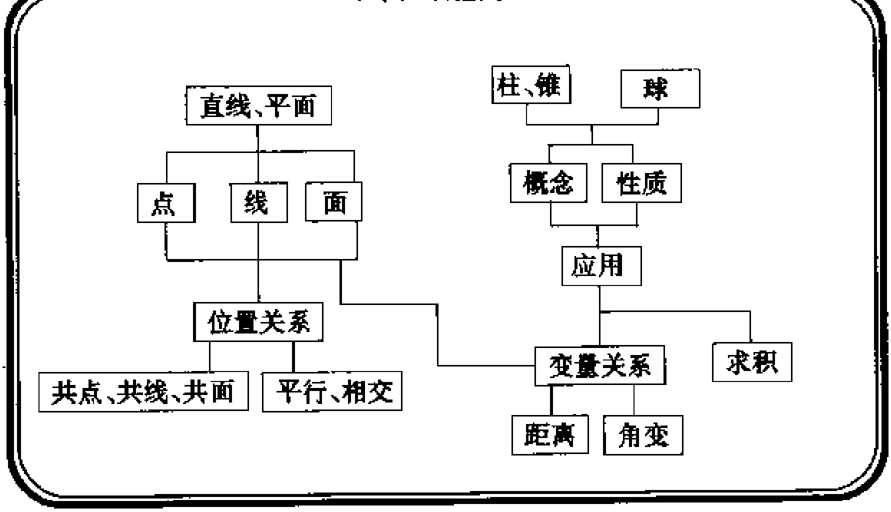
攻克疑难，采用全新理念——奥林匹克思维方式，上名牌大学和重点高中不再难了。

丛书编委会

目　录

第9章 直线、平面、简单几何体

本章知识框图



9.1 平面

重点难点指示

(1)平面的概念:平面是一个无定义的最基本的原始概念,只是作描述性的说明,对这个概念应理解三点:①平面是平的;②平面是无限延展的;③平面没有厚度,其中平面的无限延展性是平面最本质的特征.

(2)平面的画法和表示法:通常用平行四边形来表示平面,有时根据需要也可用其他平面图形表示平面,如三角形、矩形、圆等.

(3)平面的基本性质:公理1　如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内;公理2　如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线;公理3　经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面;推论1　经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面;推论2　经过两条相交直线,有且只有一个平面;推论3　经过两条平行

直线，有且只有一个平面.

(4)正确使用“$\in$，$\subset$，$\cap$”等数学符号来表示点、直线和平面三个元素之间的关系，熟悉符号语言、文字语言和图形语言的等价转换.如公理1和公理2分别用符号语言、图形语言表示如下：

公理1　若 A、$B\in l$ 且 A、$B\in\alpha$，则 $l\subset\alpha$，如图9-1.

公理2　若 $P\in\alpha$ 且 $P\in\beta$，则 $\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$，如图9-2.

(5)用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图的规则：①对于水平放置的平面图形选取适当的互相垂直的 OX、OY 轴作为坐标系，把它画成对应的轴 $O'X'$、$O'Y'$，使 $\angle X'O'Y'=45^\circ$ 或 135°；② $O'X'$ 轴方向的变形系数是1(即 $O'X'=OX$)；③ $O'Y'$ 轴方向的变形系数是 $\frac{1}{2}$(即 $O'Y'=\frac{1}{2}OY$).

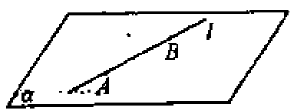


图9-1

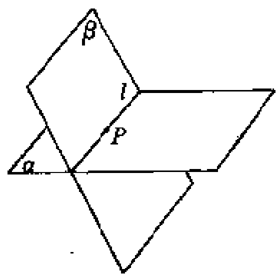


图9-2

知识规律整理

(1)公理1反映了平面的本质属性.通过直线的“直”和“无限延伸”的特性，揭示了平面的“平”和“无限延展”的特征，它是检验平面和判定直线在平面内的依据.

(2)公理2进一步反映了平面的“无限延展性”，它是判定两个平面相交，作两个平面的交线，证明点在直线上或证明多点共线的依据.

(3)公理3及其三个推论是空间中确定平面的依据，它提供了把空间问题转化为平面问题的条件.“有且只有一个”与“确定一个”都是说明“存在”且“惟一”，两者具有相同的意义.

(4)把空间图形在平面内画得既富有立体感又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形，就是直观图，它是用平行投影法画出来的.用平行投影法把物体连同坐标系一起投影到一个平面上所得到的投影图，叫做轴测投影图(简称轴测图)、斜二轴测投影(简称斜二测)就是投影线和投影面斜交有两轴(一般是

OX、OZ 轴)方向的变形系数相等的轴测投影，水平放置的平面图形没有 OZ 轴.

(5)平面几何是立体几何的基础，但在立体几何中应用平面几何的定义、定理时，要先判断一下是否有“在同一平面内”这一个大前提.若在同一平面内，则定义、定理仍然成立.否则不一定成立，如在立体几何中“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”就是错误的.可见立体几何的逻辑推理与平面几何有联系又有区别，图形由平面转向空间，思维也需由二维转向三维.

重点问题　多面体的性质

【范例 1】 下列命题中正确的命题个数是　　　　　　　　　　(　　)

(1)如果一条直线与两条直线都相交，那么这三条直线确定一个平面；

(2)经过一点的两条直线确定一个平面；

(3)经过一点的三条直线确定一个平面；

(4)点 A 在平面 α 内，也在直线 a 上，则直线 a 在平面 α 内；

(5)平面 α 和平面 β 相交于不在同一条直线上的三个点 A、B、C.

(A)一个　　(B)二个　　(C)三个　　(D)四个

思维方式

注意确定平面的条件以及公理 1、2 的理解.注意思维的严谨.

解答　命题(1)是错误的，因为还可能确定两个平面.

命题(2)是正确的，因为两条相交直线确定一个平面.

命题(3)是错误的，因为还可能确定三个平面.

命题(4)是错误的，因为直线 a 可能只有一个点在平面 α 内.

命题(5)是错误的，根据公理 2，A、B、C 三点必在一条直线上.

故选(A).

类题　三角形、四边形、正六边形、圆，其中一定是平面图形的有____个.

答案　3 个

解　三角形的三个顶点不在同一条直线上，故可确定一个平面，三角形在这个平面内；圆上任取三点一定不在一条直线上，这三点可确定一个平面，也确定一个圆，所以圆是平面图形，而正六边形内接于圆，故正六边形是平面图形；而四边形就不一定是平面图形了，它的四个顶点可以不在同一个平面内，故填三个.

【范例 2】 平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，点 $C\in\beta$ 且 $C\notin l$，$AB\cap l=R$，过 A、B、C 三点确定的平面为 γ，则 $\beta\cap\gamma$ 是 (　　)

(A)直线 AC　　(B)直线 BC　　(C)直线 CR　　(D)直线 BR

解答 由图 9-3 可知，点 R、$C\in\beta$，且 R、$C\in\gamma$，故 $\beta\cap\gamma=CR$，所以应选(C).

思维方式

先把符号语言表达的关系用图形表示出来，然后由公理 2 进行判断.

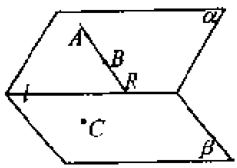


图 9-3

类题 在下列命题叙述中，正确的是 (　　)

(A)$\because$ $P\in\alpha, Q\in\alpha$，$\therefore$ $PQ\in\alpha$

(B)$\because$ $P\in\alpha, Q\in\beta$，$\therefore$ $\alpha\cap\beta=PQ$

(C)$\because$ $AB\subset\alpha, C\in AB, D\in AB$，$\therefore$ $AD\in\alpha$

(D)$\because$ $AB\subset\alpha, AB\subset\beta$，$\therefore$ $A\in\alpha\cap\beta, B\in\alpha\cap\beta$

答案 A、D

【范例 3】 不重合的三个平面可以把空间分成 n 个部分，n 等于 (　　)

(A)4 或 6　　(B)6 或 8　　(C)4、6 或 8　　(D)4、6、7 或 8

解答 当三个平面互相平行时，可把空间分成 4 个部分；当其中两个平面平行，第三个平面与它们相交时，可把空间分成 6 个部分；当三个平面两两相交于同一直线时，也将空间分或 6 个部分；当三个平面两两相交于三条直线，那么，当这三条直线互相平行时，将空间分成 7 个部分；两当这三条直线交于一点时，将空间分成 8 个部

思维方式

要考虑平面与平面之间的不同位置关系.

分.故应选(D).

类题　一个平面可把空间分成__________个部分;两个平面可把空间分成__________部分;三个平面最多可把空间分成__________部分.

答案　2,4,8

【范例 4】 求证:两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

思维方式

四条直线两两相交且不共点,可能有两种情况,一是有三条直线共点,二是任何三条直线都不共点,故证明要分两种情况.且要注意的是:证明若干点或直线共面,可先由部分点、直线确定一个平面,再证其余的点、直线均在这个平面内,这种方法称为"纳入平面法"(或称为直接法).

证明　(1)如图9-4,设直线 a、b、c 相交于点 O,直线 d 和 a、b、c 分别交于 A、B、C 三点,直线 d 和点 O 确定平面 α. ∵　$O\in$平面 α,$A\in$平面 α,$O\in$直线 a,$A\in$直线 a,

∴ 直线 $a\subset$平面 α,同理 $b\subset$平面 α,$c\subset$平面 α,∴　直线 a、b、c、d 共面于 α.

(2)如图9-5,设直线 a、b、c、d 两面相交,且任何三条不共点,交点分别是 M、N、P、Q、R、G.

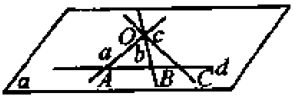


图 9-4

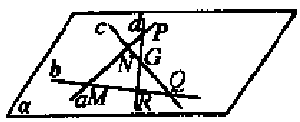


图 9-5

∵　直线 $a\cap b=M$,∴　直线 a 和 b 确定平面 α.

∵　$a\cap c=N$,$b\cap c=Q$

∴　点 N、Q 都在平面 α 内,∴　$c\subset\alpha$,

同理可证 $d\subset\alpha$,∴　直线 a、b、c、d 共面于 α.

由(1)(2)可知,面两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

【范例 5】 如果 A、B、C、D 是空间四点,且 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=\frac{\pi}{2}$,证明:$A$、$B$、$C$、$D$ 在同一平面上.

证明 如图9-6，假如A、B、C、D不共面，过B、C、D作一平面α，A在α之外，过A向α作垂线，垂足为A'.

思维方式

由于证明这四点都在同一平面上，当然可以认为是一个极端问题.故可考虑用反证法.

则由三垂线定理的逆定理，$CD\perp DA'$，$CB\perp BA'$，四边形$A'BCD$有三个直角，故必为矩形，因此$\angle BA'D=90°$.

在$Rt\triangle ABD$与$Rt\triangle A'BD$中，应有

$BD^2=AB^2+AD^2$，

$BD^2=A'B^2+A'D^2$，但这是不可能的，因为$AB>A'B$，$AD>A'D$，所以，A、B、C、D共平面.

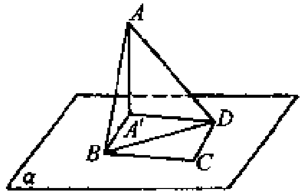


图 9-6

基础训练

一、选择题

1. 在空间，下面命题正确的是 (　　)

(A)两组对边分别相等的四边形是平行四边形

(B)两组对角分别相等的四边形是平行四边形

(C)四条边相等的四边形是菱形

(D)对角线相交的四边形是平面图形

2. 过三条互相平行的直线可以确定几个平面 (　　)

(A)1个　　(B)2个

(C)3个　　(D)1个或3个

3. 一条直线和这条直线外的不共线的三个点最多可以确定平面的个数是 (　　)

(A)1个　　(B)2个

(C)3个　　(D)4个

4. 空间三个平面如果每两个都相交，那么它们的交线的条数是 (　　)

(A)一条　　(B)两条

(C)三条　　(D)一条或三条

5. 空间不共线四个点A、B、C、D，在同一平面内的射影A'、B'、C'、D'在同一条直线上，那么A、B、C、D可确定平面个数为 (　　)

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

6. 与空间不共面的4个点距离都相等的平面有 (　　)

(A)7个　　(B)4个

(C)3个　　(D)6个

7. 在空间，与一个三角形的三边所在直线距离都相等的点的集合是 (　　)

(A)一条直线　　(B)三条直线

(C)两个平面　　(D)不同于以上结论

8. 用一个平面去截正方体，得截面是一个三角形，这个三角形的形状是 (　　)

(A)锐角三角形　　(B)直角三角形

(C)钝角三角形　　(D)不能肯定

9. 用一个平面去截正方体，所得到的截面一定不是 (　　)

(A)正三角形　　(B)正方形

(C)正五边形　　(D)正六边形

二、填空题

10. 长方体的12条棱可确定__________个平面.

11. 三条直线可以确定三个平面，这三条直线的公共点有__________个.

12. 点 $A\in$ 平面 α，点 $B\in$ 平面 β，则直线 AB 和 α、β 的关系是______.

13. 已知空间四边形的对角线相等，顺次连结它的各边中点所成的四边形是__________.

14. 过单位正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的一条对角线 BD_1 作截面，则截面面积的最小值为__________.

15. 用一个平面去截棱长为 a 的正方体，得截面是一个四边形，这个四边形面积的取值范围为__________.

16. 正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 E、F 分别是 AA'、CD 中点，设过 E、F 的平面截正方体得到截面是 n 边形，则 n 的取值集合是__________.

17. 棱长为1的正方体在一平面 α 上的射影面积的最大值等于________.

三、解答题

18. 已知：正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，如图9-7中 E、F 分别是 AB、AA_1 的中点.

求证：CE、D_1F 所在直线必相交，且交点在 AD 所在直线上.

19. 求证：与同一直线相交的所有平行线都在同一平面内.

20. 求证：不在同一平面的两两相交的三条直线必共点.

21. 如图9-8在棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 AA_1、D_1C_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

(1)画出 l 的位置；

(2)设 $l\cap A_1B_1=P$，求线段 PB_1 的长.

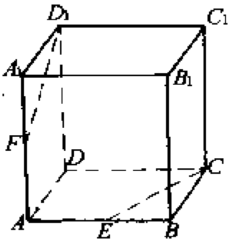


图 9-7

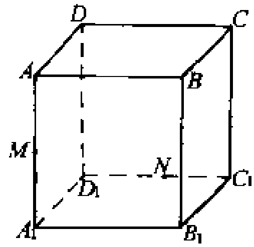


图 9-8

22. 求证:若垂直于正方体对角线的截面过这条对角线的两个三等分点之间,则截面的周长为定值.

23. 已知如图 9-9,$\alpha\cap\beta=VA$,$\beta\cap\gamma=VC$,$\gamma\cap\alpha=VB$,$\angle AVB$、$\angle BVC$、$\angle CVA$ 的平分线分别为 VD、VE、VF.

求证:平面 DVC、平面 EVA、平面 FVB 交于同一条直线.

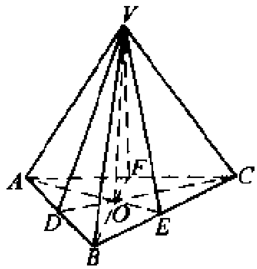


图 9-9

答案:1.D 2.D 3.C 4.D 5.A 6.A 7.D 8.A 9.C

10.12 11.0 或 1 12.$\alpha\cap\beta=AB$ 或 α、β 分别与 AB 相交 13.菱形 14.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

15.$(0,\sqrt{2}a^2)$ 16.$\{4,5,6\}$ 17.$\sqrt{3}$ 提示 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 在平面 α 上的射影面积是 $\square ABB_1A_1$、$\square BCC_1B_1$、$\square A_1B_1C_1D_1$ 的面积之和,等于 $\triangle A_1BC_1$ 面积的 2 倍,因此当此射影面积最大时,截面 A_1BC_1 与 α 平面平行,最大射影面积等于 $\sqrt{3}$

18.略 19.略 20.略

21.(1)延长 DM 交 D_1A_1 的延长线于点 E,连结 NE 交 A_1B_1 于 P,EN 即为直线 l 的位置,如图 9-10

(2)$\because$ M 是 AA_1 的中点,$AD\parallel ED_1$

$\therefore$ $AD=A_1E=A_1D_1=a$

$\because$ $A_1P\parallel D_1N$,且 $D_1N=\frac{1}{2}a$

$\therefore$ $A_1P=\frac{1}{2}D_1N=\frac{1}{4}a$

则 $PB_1=A_1B_1-A_1P=a-\frac{1}{4}a=\frac{3}{4}a$ 22.略

23.略

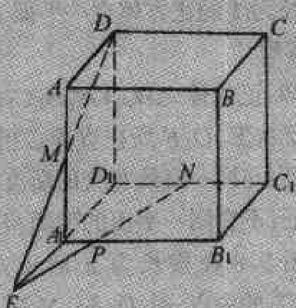


图 9-10

9.2 空间直线

重点难点指示

(1)空间两直线的位置关系有三种：相交、平行和异面. 三种关系是依照两直线是否共面，是否有公共点两个特征共同区分的.

(2)异面直线的定义：不同在任何一个平面内两条直线. 画异面直线时，通常画一个或两个平面作衬托，以便把两直线不共面的特点显示得更清楚.

(3)异面直线的判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线(它在课本中是作为例题给出的).

(4)平行公理(公理4)：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(5)等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

(6)两条异面直线所成的角：直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，分别引直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，则 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a、b 所成的角，若记 α 是 a、b 所成的角，则 $\alpha\in(0^\circ,90^\circ]$，当 $\alpha=90^\circ$ 时称异面直线 a、b 为互相垂直.

(7)两条异面直线的公垂线：与两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线.

(8)两条异面直线的距离：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段长度，叫做两条异面直线的距离.

知识规律整理

(1)正确理解异面直线的概念是掌握空间两条直线位置关系的核心，异面直线定义中“不同在任何一个平面内的两条直线”是指“不可能找到一个平面能同时包含这两条直线”，也可理解为“这两条直线不能确定一个平面”. 不可误解为“分别在两个平面内的两条直线”. 因为，分别在两个平面内的直线，既可能是相交直线，也可能是平行直线，如图 9-11 所示.

(2)平行公理反映了平行线的传递性，它是证明等角定理的基础，也是论证平行问题的主要依据之一，等角定理及其推论说明了在平移变换下，角的大小不改变，它是定义两条异面直线所或角的依据，必须注意边的方向，平行公理，等角定