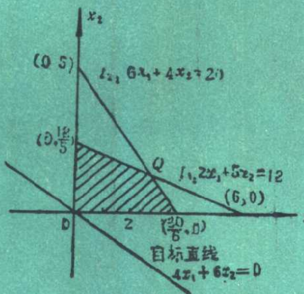
成人高等学校教材

线性代数与线性规划初步



北 京 出 版 社

成人高等学校教材

线性代数与线性规划初步

北京市成人教育学院 编

成人高等学校教材
线性代数与线性规划初步
北京市成人教育学院 编
*
北 京 出 版 社 出 版
（北京崇文门外东兴隆街51号）
新华书店北京发行所发行
广 益 印 刷 厂 印 刷
*
787×1092毫米 32开本 7.75印张 170,000字
1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷
印数 1—3,800
书号：7071·1095 定价：1.30元

前　　言

这套教材包括微积分、线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计初步三册。是根据北京市成人教育局制定的财经类大专院校高等数学教学纲要的精神，由北京市成人教育学院数学组主持，由北京市财贸管理干部学院、北京市机械局职工大学等校教师编写的。本书可作为经济类职工(干部)大专院校基础数学教学用书，也可作为经济工作者自学用书。

本书《线性代数与线性规划初步》介绍了与企业管理有关的矩阵的初等变换和线性方程组的基本知识，以及线性规划的初步知识。其中有些内容画有＊号，可以选学或不学。

本书由俞斯晟、戢镇南两位同志执笔。在编写时，王风鸣同志提供了部分例题和习题，并吸取了本市职工大学的一些教师的宝贵意见，在此特别表示感谢。

由于时间和水平所限，缺点在所难免，敬希批评指正。

北京市成人教育学院

一九八五年二月

目　　录

第一章　行　列　式

在线性代数中，解线性方程组是一个重要部分。行列式是研究线性方程组的重要工具。行列式是从解线性方程组的需要中产生和建立起来的，它在数学和其它学科中都有广泛的应用。本章主要研究行列式及其计算以及用克莱姆规则解线性方程组。

§1.1 "Σ"记号的介绍

为了下面研究行列式方便起见，我们先介绍和号"Σ"的使用方法。

例如，前 n 个自然数的和

$$1+2+3+\cdots+n \tag{1}$$

为了书写简便，常用希腊字母"Σ"(读作西格马)表示和，上面(1)式可以写作：

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n.$$

这就是说，用字母 k 表示自然数，在 k 前面写上 $\sum\limits_{k=1}^{n}$，表示依次用 $1,2,3,\cdots,n$ 代替 k 后加起来的和。这里，我们也可以不用字母 k，而用别的字母 i,j,l 等等。又如：

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1).$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

$$\sum_{j=1}^{3}a_{kj}A_{ij}=a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+a_{k3}A_{i3}.$$

反过来，下面各和用"Σ"记号可以表示为：

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+10\cdot11=\sum_{l=1}^{10}l(l+1).$$

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+a_{k3}A_{i3}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}.$$

关于和号"Σ"，有以下三个基本公式：

1. $\because$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)&=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots\\&\qquad+(a_n\pm b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

这一公式还可以推广到代数和中有两项以上的情形上去。

2. $\because$ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n$

$$=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$=c\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

3. $\because\quad \underbrace{c+c+c\cdots+c}_{n\text{个}}=nc,$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}c=nc.$$

以上三个公式，实际是从基本运算律得到的。

§1.2 n 阶行列式的概念

（一）二阶行列式和二元线性方程组

在平面解析几何中，我们曾经学习过二元一次方程的图象是一条直线。所以以后把一次方程叫做线性方程，把一次方程组叫做线性方程组。行列式概念是从解线性方程组的需要中产生的。例如，含两个未知量的两个线性方程的方程组的一般形式是：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\tag{1}$$

方程组(1)中的两个未知量是 x_1 和 x_2。它们的系数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 有两个下标，其中第一个下标 i 表明它是第 i 个方程的未知量的系数；第二个下标 j 表明它是第 j 个未知量的系数，如 a_{21} 是第二个方程中第一个未知量的系数。b_i $(i=1,2)$ 代表第 i 个方程右边的常数项，如 b_1,b_2 分别是第一

和第二个方程的常数项。

用加减消元法分别消去方程组(1)中的 x_2、x_1，得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得到方程组(1)的唯一解：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\\x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{cases}\tag{2}$$

(2)是方程组的求解公式，它是由方程组(1)的未知量的系数和常数项分别把未知量 x_1 和 x_2 表示出来。给了任一个二元一次方程组，将它化为一般形式之后，只要 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，都可以利用公式(2)求解。为了便于记忆上述公式，引进二阶行列式的概念。

定义 记号$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$叫做**二阶行列式**，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做二阶行列式的**元素**。这四个元素排成一个正方形，横排叫行，竖排叫列，二阶行列式共有两行两列，每个元素有两个下标，第一下标指明这一元素位于二阶行列式中的行数，叫做**行标**。第二下标指明这一元素位于二阶行列式中的列数叫做**列标**，如 a_{12} 就是二阶行列式中第一行、第二列的元素。$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式的**展开式**。

从二阶行列式的定义可以看到，它表示两项 $a_{11}a_{22}$ 与 $-a_{12}a_{21}$ 的代数和，其中第一项是二阶行列式中从左上角到右

下角的对角线(叫做行列式的**主对角线**)上两元素之积，取"＋"号；第二项是二阶行列式中从右上角到左下角的对角线(叫做行列式的**次对角线**)上两元素之积，取"－"号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$-a_{12}a_{21} \qquad\qquad +a_{11}a_{22}$$

这就是二阶行列式对角线展开规则。利用它很容易写出二阶行列式的展开式。

利用二阶行列式的定义或对角线展开规则，可以把公式(2)中的分子分别写成二阶行列式

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，简记为 D_1，$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}，简记为 D_2。$$

而公式(2)中的分母写成二阶行列式

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，简记为 D.$$

二阶行列式D是由方程组(1)的未知量的系数按原次序排列组成的，叫做方程组(1)的**系数行列式**。D_1 这个二阶行列式表示公式(2)中 x_1 的分子，它恰好是把方程组(1)的系数行列式D中未知量 x_1 的系数一列换成了相应的常数列，而另一列不动组成的。D_2 这个二阶行列式表示公式(2)中 x_2 的分子，

它恰好是把方程组(1)的系数行列式D中未知量 x_2 的 系数一列换成了相应的常数列,而另一列不动组成的。

于是方程组(1)的解的公式(2)可以用二阶行列式表示如下:

当二元线性方程组(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时,方程组(1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 3x_1-x_2=-4. \end{cases}$$

解: 先计算方程组系数行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-3\times 2=-7\neq 0.$$

由于 $D\neq 0$,方程组有唯一解,再计算 D_1, D_2 的值:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-(-4)\times 2=7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-3\times 1=-7.$$

于是方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{7}{-7}=-1, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-7}{-7}=1. \end{cases}$$

(二) 三阶行列式和三元线性方程组

含三个未知量的三个线性方程的方程组的一般形式是:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{3}$$

类似地,为了研究三个方程的三元线性方程组的解,需要引入三阶行列式的概念。

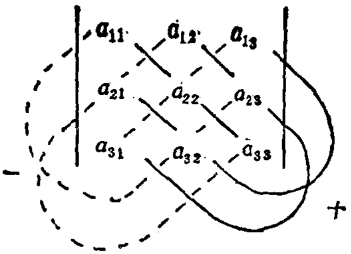
定义 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$叫做**三阶行列式**,它表示代数和。

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式有三行、三列,共有九个元素。$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 叫做三阶行列式的**展开式**。

与二阶行列式类似,三阶行列式也有对角线展开规则。如下图所示:



$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$. $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

即实线上三个元素之积取“＋”号；虚线上三个元素之积取“—”号，取六项的代数和就是三阶行列式的值。这就是三阶行列式对角线展开规则。利用它容易写出三阶行列式的展开式。

例 2　用对角线规则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=3\times1\times(-2)+(-2)\times3\times2+1$

$\times(-2)\times0-1\times1\times2-(-2)\times(-2)\times(-2)$

$-3\times3\times0=-6-12+0-2+8-0=-12.$

类似于二元线性方程组，用消元法解三元线性方程组(3)，引用三阶行列式概念，可得如下公式：

当三元线性方程组(3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时，方程组有唯一解

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\[2ex]
x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\[2ex]
x_3 = \dfrac{D_3}{D}.
\end{cases} \tag{4}
$$

其中$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，

$$
D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.
$$

D_1、D_2、D_3 分别是把系数行列式D中 x_1，x_2，x_3 的系数一列换成了方程组(3)相应的常数列，而其余各列都不动所得的三阶行列式。

例 3 解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\
x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\
x_1 - x_3 + x_3 = -1.
\end{cases}
$$

解： 先计算方程组系数行列式的值：

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8
$$

$$
\neq 0.
$$

由于系数行列式 $D \neq 0$，方程组有唯一解。再计算 D_1，D_2，D_3 的值：

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-5+12-2-5+8+3=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=4+3-1-2-1+6=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=10-8-1+5-4+4=6.$$

于是方程组的解为:

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{11}{8},\\x_2=-\dfrac{9}{8},\\x_3=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

从上面可以看到，有了二阶、三阶行列式的概念，我们可以把 $D\neq0$ 时线性方程组(1)和(3)的解简单地表示出来。应该注意的是：如果所给的方程组不是方程组(1)或(3)的一般形式时，为了避免符号上发生错误，首先应把方程组变形为一般形式，然后再用行列式解。

（三）n 阶行列式

有了二阶、三阶行列式的概念，我们可以把 $D\neq0$ 时，线性方程组(1)和(3)的解简单地表示出来。因此自然会想到是否可以把这个方法推广到解 n 个未知量的 n 个线性方程的方程组上去？为了解决这一问题，首先就需要考虑如何定义 n 阶行列式，为此，先介绍 n 元排列及排列的反序数等概念。

定义 由自然数 1,2,……,n 组成的一个有序数组，叫做一个 **n 元排列**。例如

231 是一个三元排列；

1234 是一个四元排列；

23154 是一个五元排列。

这里的 n 元排列就是中学数学中所讲过的前 n 个自然数的一个全排列。

例 4 写出由 1,2,3 组成的所有的三元排列。

解: 由 1,2,3 组成的所有三元排列是:

123,132,213,231,312,321。共有 3! 个。

在三元排列 123 中，它的各个数是按照由小到大的自然数顺序排列的，我们把这样的排列叫做三元**自然序排列**。而在三元排列 231 中，2 比 1 大，而 2 排在了 1 的前面，它和由小到大的自然数顺序相反，这时我们说 2 和 1 这一对数构成了一个反序。在三元排列 231 中，除去数对 21 构成了一个反序，还有数对 31 也构成了一个反序，因此排列 231 共有两个反序。我们就说排列 231 的反序数是 2。一般地

定义 在一个 n 元排列中，如果有一对数是较大的数排在了较小的数的前面，就叫做这一对数构成一个**反序**。一个 n 元排列中所包含的反序数的总数，叫做这个**排列的反序数**。一个排列的反序数的记法是：把这个排列括上圆括弧，并在前面写上字母 N。

例如三元排列 231 的反序数是 2，记为 $N(231)=2$；又如排列 23154 的反序数是 3，记为 $N(23154)=3$。

例 5 求五元排列 53421 的反序数。

解: 在这个五元排列中，构成反序的数对有 53, 54,52, 51,32,31,42,41,21 共九对，