2

微　积　分

主编　李建平

编写　李建平　晏木荣
　　　彭大衡

湖南大学出版社

2001.长沙

图书在版编目(CIP)数据

微积分/李建平主编.—长沙:湖南大学出版社,2001.8

ISBN 7-81053-399-1

Ⅰ.微... Ⅱ.李... Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 059660 号

微 积 分

Weijifen

李建平 主编

□责任编辑 肖立生 黄宁军
□封面设计 张 毅
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 长沙环境保护学校印刷厂

□开本 850×1168 32 开 □印张 14.75 □字数 357 千
□版次 2001 年 8 月第 1 版 □2001 年 8 月第 1 次印刷
□印数 1-6 000 册
□书号 ISBN 7-81053-399-1/O·27
□定价 23.80 元

编写说明

随着我国社会主义经济建设的不断发展和我国经济体制改革的日益深入，随着社会主义市场经济体制的建立和日臻完善和经济管理水平的逐步提高，经济决策的科学化、计量化和经济理论的数学化已成必然趋势．经济学（至少是实证经济学）的发展，已经与数学密不可分了．因而经济数学方法的研究和应用越来越受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视．未来社会对高等财经人才的数学素质和专业水平的要求也将愈来愈高．为此，很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作，相继增开了一些有关的必修与选修课程，以适应未来社会发展对于高等财经人才的需要．

《财经类高等数学系列教材》根据《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》的要求编写，同时吸取了《经济数学基础》教材和以往编写的《财经类高等数学系列教材》的优点．这套教材力求更进一步体现高等数学作为一门基础理论课程的功能，以提高高等学校财经类专业学生的数学素质为目的．本套教材在体系结构上力求更为科学、合理；在内容上着力更广泛、更密切地与经济实际相结合，着力于培养和提高财经类专业学生应用经济数学方法解决经济问题的能力．

为方便读者理解和领会一些基本概念，我们对概念

的现实背景和实际含义予以说明和解释. 对于一些较为冗繁的论证过程,我们予以省略而直接引用结论. 考虑到学科的科学性和系统性,以及教学上的灵活性与适应性,同时也为后续课程和知识的拓广奠定基础,我们对有些章节加了“*”号,这些加“*”号的章节可供教学时灵活掌握(加“*”号章节的略讲,不会影响下一章节的学习). 每章末都配备了一定数量的习题,以供学生练习.

《财经类高等教学系列教材》包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三个分册. 全书由苏醒教授、胡宗义博士任主编,由李建平副教授、刘再华副教授、李亚琼副教授分别任分册主编.

《微积分》分册由李建平(1、2、3 章)、晏木荣(4、5、6 章)、彭大衡(7、8、9、10 章)编写,由苏醒教授主审.

这套《财经类高等数学系列教材》的出版,得到了学校教务处和学校出版社的大力支持,在此一并表示衷心感谢.

《财经类高等数学系列教材》
编写组
2001 年 7 月

目　　次

第1章　函　数

函数是客观世界中变量与变量之间的依赖关系在数学中的反映．在微积分学中，函数是主要的研究对象．本章讨论函数的基本概念及其基本性质．

§1.1　函数的概念及其基本性质

一、集合、常量与变量

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念，我们通过例子来说明这个概念。比方说，一间教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等。一般地，所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体，一般用大写字母 $A,B,C\cdots$等表示。组成这个集合的事物称为该集合的**元素**，一般用小写字母 $a,b,c\cdots$等表示。凡事物 a 是集合A 的元素，记作 $a\in A$(读作 a 属于A)；事物 a 不是集合A 的元素，记作 $a\notin A$(读作 a 不属于A).

由有限个元素组成的集合，可用列举它的全体元素的方法来表示。例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 M 是具有某种特征的事物的全体组成的集合，我们记作

$$M=\{x\mid x\text{所具有的特征}\}.$$

例如，数轴上坐标适合不等式 $a<x\leqslant b$(a,b 为实数)的点 x 的全体组成的集合，可记作

$$M=\{x\mid a<x\leqslant b,x\text{ 为实数}\}.$$

又例如，xoy 平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点(x,y)的全体组

成的集合,可记作

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}.$$

这个集合 A 实际上就是由 xoy 平面上以原点为中心,半径等于 1 的圆周上点的全体组成的.

本教材以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体正整数的集合记作 $\mathbf{Z}^+$,全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,全体正实数的集合记作 $\mathbf{R}^+$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,就说 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$(读作 B 包含 A).例如,$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,就称集合 A 与 B **相等**,记作 $A = B$,例如,设

$$A = \{1,2\}, B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

则 $\quad A = B.$

由集合 A 与集合 B 中的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的**并**,记作 $A \cup B$.

由集合 A 与集合 B 中的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的**交**,记作 $A \cap B$.

不含任何元素的集合称为**空集**.例如

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}$$

是空集.空集记作 $\varnothing$,且规定空集为任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集,设 a 和 b 都是数,且 $a < b$,称集合

$$\{x \mid a < x < b\}$$

为**开区间**,记作 (a, b),即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间的**端点**,这里 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$.称集合

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

为**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a和b也称为闭区间的端点，这里$a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$. 类似地可推出：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\};$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为**半开(或半闭)区间**．

以上这些区间都称为有限区间，数b与a的差$(b-a)$称为这**些区间的长度**．

从数轴上看，这些有限区间的长度为有限的线段．闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来，分别如图1－1(a)与(b)所示．此外还有**无限区间**，引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示下列无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid <b\}.$$

无限区间$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$在数轴上表示出来分别如图1－1(c)与(d)所示．

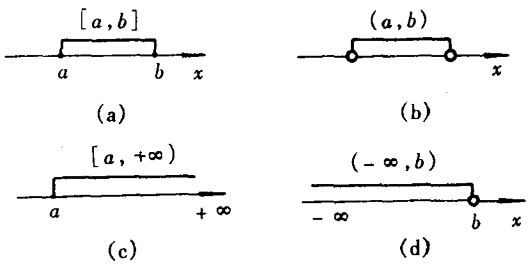

图1－1

全体实数的集合**R**也可记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间．

邻域是经常用到的一类数集．设 a 为实数，δ 为任意正数，称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned} U(a,\delta) &= (a-\delta, a+\delta) \\ &= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} \\ &= \{x \mid |x-a| < \delta\}. \end{aligned}$$

点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**．从数轴上看，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点的集合，如图 1－2 所示．

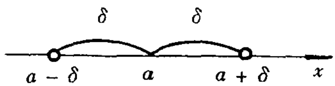

图 1－2

有时用到的邻域需要把中心去掉，当点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\dot{U}(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned} \dot{U}(a,\delta) &= (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \\ &= \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}. \end{aligned}$$

从以上集合、区间、邻域的概念中，我们不难得知，它们三者之间有如下关系：**集合是一个具有广泛外延的概念，区间是一种特殊的集合，而邻域又是一种特殊的区间**．在微积分学中一般都用区间或邻域表示集合．

2. **常量与变量**　任何事物都具有某些能够表现其多少、大小、长短、高低、轻重、快慢等可以进行比较和测定的属性．比如长度、面积、距离、速度、产量、价格等，这些都叫"**量**"．量的具体表现是数，人们在对事物或现象的数量特征进行观测和定量分析时看到，有些量在所考虑的问题或过程中保持不变，只取某一个确定的值；有些量则在过程中不断变化，可以取不同的数值．我们称前一种量为**常量**，称后者为**变量**．

通常用字母 $a,b,c\cdots$ 等表示常量，用字母 $x,y,z\cdots$ 等表示变

量．在微积分学中所讨论的量，一般都在实数范围内变化取值，所以也用数轴上的定点表示常量，用动点表示变量．当变量的取值在实数的某个范围内连续变化时，常用区间来表示这个范围．例如变量 x 为大于2小于5的任意实数，那么变量 x 的变化范围可用区间 $(2,5)$ 来表示．

二、函数的概念

1. 函数关系

在研究任何事物或现象的同一过程中，出现的变量都不止一个，这些变量之间一般具有某种关系，其中有一些相互间有确定的依赖关系，而有一些则没有．比如：

例1 一个人掷硬币的过程中，掷币的次数 n 与出现国徽的次数 m 两个变量之间不能说没有关系，实践表明 n 越大时，m 也越大，但 m 与 n 之间并没有确定的依赖关系．比如，人们无法确定当 $n=100$ 时，m 一定是几．

例2 自由落体运动的规律：根据自由落体运动的公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

（这里 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度），这个公式指出了在物体自由降落的过程中，距离 s 和时间 t 的依赖关系．

例3 用铁皮焊制成长方体的水箱，显然容积 v 与水箱长 x、宽 y、高 z 之间有确定的依赖关系 $v=xyz$.

如果在某一过程中出现的变量之间相互制约，其中一些变量的变化和取值，必然引起并决定着另一变量的变化和取值，就称存在这种依赖关系的变量之间有某种函数关系．比如例2中的 s、t 之间及例3中的 v、x、y、z 之间有函数关系．

从例2、例3变量的依赖关系中．我们看到一些共同的特征：

(1) 在这些变量中，有些量称为**自变量**，如时间 t，水箱长 x、宽 y、高 z 等，它们有一定的变化范围．如例2中的时间 t，在这个运动过程中，如果我们把物体刚开始下落的时刻记为 $t=0$，把物体刚到达地面的时刻记为 $t=T$，那么时间 t 的变化范围只能是

$[0,T]$;又如例3中的 x、y、z 均大于零.

在依赖关系中,还有一些量是随着自变量的变化而变化的,称为**因变量**,如自由落体下降的距离 s,水箱的体积 v.

(2) 对自变量变化范围内的每一确定的值,通过依赖关系,总能得到确定的因变量的值.

据此,可以抽象地给出两个变量时的函数定义如下:

定义 1.1 设 x 和 y 是某变化过程中的两个变量,D 是一个给定的集合,如果对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定法则,总有确定的值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$. x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**,集合 D 叫做这个函数的**定义域**.通常将函数 $y=f(x)$的定义域记作 D_f,若 $x_0\in D_f$,也称函数 $y=f(x)$在点 x_0 有定义.与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**函数值,记为** $f(x_0)$.定义域内的每个自变量值所对应的函数值的全体,称为函数的**值域**,记作 W_f.

函数 $y=f(x)$中表示对应法则的符号 f 也可改用其它字母,例如"φ"、"F"等等,这样函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$等等.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.

例2中的函数是单值函数.下面举一个多值函数的例子.

例4 在直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$,这方程在闭区间$[-r,r]$上确定一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数.当 x 取 $-r$ 或 r 时,对应的函数值都只有一个,但当 x 取开区间$(-r,r)$内任一个数值时,对应的函数值就有两个.所以这函数是多值函数.

以后凡是没有特别说明,函数都是指单值函数.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题实际意义确定的.如例2中,定义域 $D=[0,T]$;在纯数学的研究中,由字母、符号及其算式表达的抽象函数,如果没有明确给定定义域,就规定定义域为使函数和算式有意义的自变量的全体实数值.例如函数

$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$；函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$.

例 5 求函数 $y=\sqrt{1-2x}+\lg(1-x^2)$的定义域.

解 为使函数有意义，x 必须同时满足 $1-2x\geqslant 0$ 和 $1-x^2>0$，解不等式组

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ 1-x^2>0\end{cases}\quad 得\begin{cases}x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ -1<x<1.\end{cases}$$

由综合解 $-1<x\leqslant\frac{1}{2}$ 得函数的定义域为$(-1,\frac{1}{2}]$.

例 6 确定函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域.

解 解不等式组

$$\begin{cases}x^2-x-6>0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\quad 得\begin{cases}x>3 \text{ 或 } x<-2\\ -3\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

由综合解 $-3\leqslant x<-2$ 与 $3<x\leqslant 4$ 得函数的定义域为$[-3,-2)\cup(3,4]$. 如图 1-3 所示.

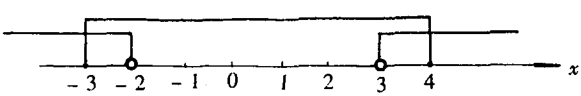

图 1-3

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，对于任意取定的 $x\in D_f$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xoy 平面上确定一点(x,y)，当 x 遍取 D_f 中的每一个数值时，就得到(x,y)的一个集合 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$的**图形**.

下面再举几个函数例子.

例 7 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1－4 所示．这函数称为**绝对值函数**

例 8 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**．它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，图形如图 1－5 所示．

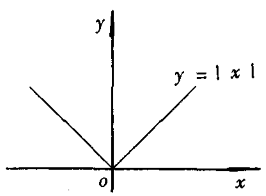

图 1－4

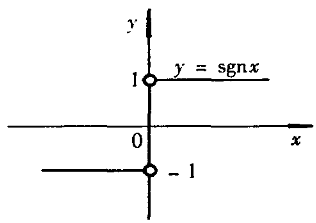

图 1－5

例 9 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$．例如 $[\frac{5}{7}]=0$， $[\sqrt{2}]=1$， $[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$．把 x 看作自变量，则函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=Z$，图形如图 1－6 所示，这图形称为阶梯曲线，在 x 为整数处，图形发生跳跃，跳跃度为 1．

从例 7、例 8 中看到，有时一个函数要用几个式子来表示．这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**．

例 10　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$$

是一个分段函数．它的定义域 $D=[0,+\infty)$，当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=1+x$．例如$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$，此函数的图形如图 1－7 所示．

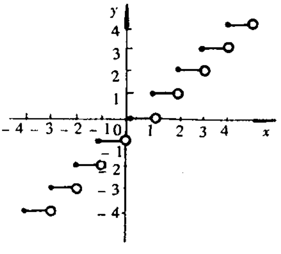

图 1－6

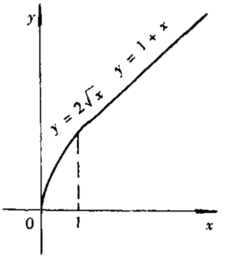

图 1－7

用几个式子表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义无矛盾，而且有现实意义．在自然科学、工程技术及经济领域中，经常会遇到分段函数的情形，例如，某商店以每件 a 元的价格出售某种商品，但若顾客一次购买 50 件以上，则超出 50 件的部分以每件 $0.9a$ 元的优惠价出售，于是一次成交的销售收入 R 与销售量 x 的函数关系式为

$$R=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 50a+0.9a(x-50), & x>50.\end{cases}$$

还应该注意的是，在函数概念中并没有表明变量间的函数关系非得用公式来表达不可．事实上，例如火车时刻表，出站和进站的车次都是时间的函数，但它一般不用公式来表达，而是用列表的方法来表示这种函数关系；气象站中的温度记录器记录了温度与

时间的一种函数关系,这种关系既不用公式来表达,也不用列表法来表示,而是用借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的.

三、函数的基本特征

从函数的图形看,函数具有如下的基本性质:

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于任意的 x_1、$x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,都有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 内**单调增加**;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 内**单调减少**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.使函数单调的区间称为**单调区间**.在单调增区间内函数的图形随 x 增大而上升;在单调减区间内函数的图形随 x 增大而下降.如图 1-8 所示.

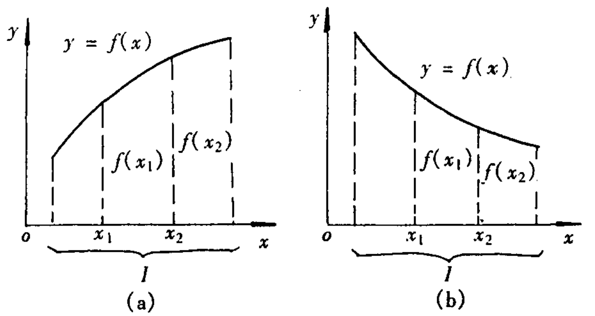

图 1-8

例如,$y=x^3$ 在定义域内是单调增函数;$y=x^2$ 在定义域内不是单调函数,但 $(-\infty,0)$ 是其单调减区间,$(0,+\infty)$ 是其单调增区间.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),如果对于任意 $x\in D$,恒有