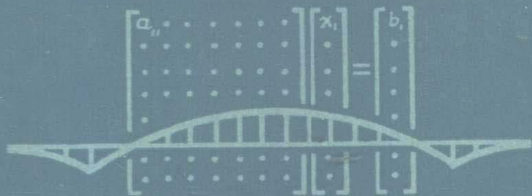

结构分析的矩阵方法

王恩惠 易成贵 编

内 容 提 要

本书介绍矩阵方法在杆系结构静力分析中的应用。主要内容包括：矩阵代数基本知识；力法与位移法在“节点荷载”及“非节点荷载”作用下的算法；力法与位移法的相似关系；电子数字计算机简介及用电子计算机解题实例。

结构分析的矩阵方法
王恩惠　易成贵　编
人民铁道出版社出版
（北京市东单三条 14 号）
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张:19.5 插页：2 字数：490 千
1 9 7 5 年10月　第 1 版
1 9 7 5 年10月　第 1 版　第 1 次印刷
印数：0001—25,000 册　定价(科四)：2.10 元

毛 主 席 语 录

列宁为什么说对资产阶级专政，这个问题要搞清楚。这个问题不搞清楚，就会变修正主义。要使全国知道。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。

前　　言

矩阵理论是研究线性关系问题的一个得力工具，在线性代数这一数学分支中占有极为重要的地位。而结构的静力分析，由于采取了变形微小与符合虎克定律这两项基本假定，最终都将归结为线性方程组的求解问题，因此矩阵方法就很自然地被运用了。

采用矩阵方法，并不絲毫改变结构理论的基本原理，它仅仅是用矩阵代数表达式取代了以往惯用的一般代数表达式而已。然而，由于矩阵代数符号能把结构分析问题写成特别紧凑而简洁的数学形式——一般代数式所不能办到的，并且能更加鲜明地揭示出线性结构体系的基本特征，从而弄清了力法与位移法之间的相互联系——严密的相似关系，使我们对于结构分析问题的认识又提高了一步。这些就是矩阵方法对结构理论方面的贡献。可以想见，矩阵方法的出现与发展，必将对传统的结构理论课程內容产生极为深刻的影响。

以往，对于复杂结构（例如高次静不定结构）的静力分析，需要耗费大量的人力和时间，有时甚至为人力计算所无法完成。显然，把许多精力花在数值计算上而不是用到对设计方案的仔细比较和研究上，是一种很不合理的状况。长期存在这种不合理状况的根本原因，当然是由于缺少强有力的数字计算工具所致。也正因为这个原因，它反过来又阻碍着对于合理然而计算复杂的新颖结构进行广泛探索的进程。

自从电子数字计算机诞生以后，尤其是近年来的迅速发展与普及，使得结构分析的面貌为之一新；不仅使结构设计人员能从繁重的计算工作中解放出来，它还促进了结构理论的进一步发展。

矩阵的运算过程具有鲜明的规则性与单一性，而这正是使电子数字计算机得以充分发挥其效能的最理想的条件。因此，倘想用机器来负担全部数值计算工作的话，用矩阵代数符号来提供结构问题的数学表达式，无疑将是最为适宜的。对于用手算就能解决的简单结构，矩阵方法的计算工作量与一般代数方法基本上是一样的，因而单纯从计算工作的角度来说，它的优越性突出地表现在处理复杂结构问题方面，这就很自然地使我们把：复杂结构——矩阵方法——电子数字计算机三者联系到一起了。

五十年代中，在航空工程的结构分析中首先引进了矩阵方法，它引起了普遍的注意。后来又被吸收到土木工程结构分析中来。经过六十年代的广泛研究与实际应用，在土木工程领域內，现在矩阵方法不仅被用来解决结构力学范畴的问题，并且在分析连续弹性体、结构稳定与振动等问题方面，都取得了巨大的进展。在我国，矩阵方法亦已得到充分重视与研究，许多单位已开始把它实际应用到桥梁、建筑、隧道、水坝等工程中去。随着我国社会主义革命与建设事业的蓬勃发展，按矩阵方法用电子数字计算机来解决结构问题的工作，有着极其宽广的发展前途。

本书按力法与位移法这两大平行系统来叙述杆系结构的静力分析问题。基本原则是将结构体系作为许多离散的单元杆件之集合体来处理。除了理论性的论述之外，本书的內容力求能照顾到结构工程设计人员的实用要求。

用于解决杆系结构的静力分析，只要求具备矩阵代数中最基本的一部分知识，它们是很容易掌握的。这就是第一章的內容。在有关的著述中，一般都只谈到“节点荷载”的情况，

也就是说荷载作用点必须被当作“节点”来处理，这在不少情况下将造成计算工作量之增大，特别是在分布荷载作用时将发生困难。所以本书第六、七章单独地为“非节点荷载”情况作了详细论述。在第五章内，考虑到力法与位移法的相似关系所具有的重要理论价值，故用一整章的篇幅作了全面介绍。第八章是为了向结构工程设计人员提供一些有关电子数字计算机的初步概念而写的，以期对如何合理地利用机器和怎样提供初始资料与数据能有所帮助。其中还提到了计算程序标准化的问题，指出了进一步把人力工作压缩到最小限度的途径。最后，在第九章中提供了一个在电子数字计算机上用矩阵方法进行静力分析的计算实例，包括分别按力法与位移法而不加任何简化假定来求解的全过程与最后成果。

鉴于近年来矩阵方法在结构分析中的理论和实践又有新的进展，故在这次出版时曾对几年前写成的初稿作了一些重大的修改和补充。但限于作者的水平，必定有许多错误和不当之处，望读者给予指正。

在本书的编写以及解算例题的过程中，原华北电子仪器研究所、中国科学院计算技术研究所以及作者所在单位的许多同志，都曾给予热情的支持和极大的帮助，在此谨向这些同志表示深切的谢意。

作　　者

目　录

第一章　矩阵代数的基本知识

为了用于结构静力分析的目的，只需要掌握矩阵理论中比较初步且数量不多的一部分知识。熟悉本章的材料之后，将毫不困难地看懂以后各章的内容。

§1·1　矩阵的定义与类型

【1】矩阵

在研究物理、力学、工程等各领域的具体问题时．各种因素之间无不存在着错综复杂的联系，需要用一定的数学形式来表达它、分析它；而其中最简单并且最常见的一种就是线性关系。例如在结构力学中，形变与力之间的关系即属此类。为了更好地研究和解决各种线性关系的具体问题，人们大力地发展了线性代数这一个数学分支，而矩阵理论正是它最得力的工具。

矩阵的概念，就是从线性关系问题引进来的：

设一组变元$x_1, x_2, \cdots, x_n$与另一组变元$y_1, y_2, \cdots, y_m$之间，存在着线性关系

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=y_m \end{array}\right\}, \tag{a}$$

如果把上式中的全部系数按原来的顺序排列成下面的形式，并用符号

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (m\cdot n\text{阶}) \tag{1·1}$$

来表示，它就被称为一个矩阵。

现在我们给矩阵下一个定义：由一组数（或符号）排列成具有m行与n列的长方形的“表”，称为矩阵（$m\cdot n$阶）。它的形式与符号如式（1·1），或简写作

$$\mathbf{A}=[a_{ij}] \qquad (m\cdot n\text{阶}) \tag{1·2}$$

其脚标中$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$。

式（1·1）的矩阵$\mathbf{A}$是由$m\cdot n$个数字（或符号）组成的，其中每一个数（或符号）称为“元素”或简称“元”，用符号a_{ij}来表示。每一横线上的各元素组成一行，每一竖线上的各元素组成一列，因此式（1·1）是一个具有m行与n列的长方形矩阵，称为（$m\cdot n$）阶矩阵。它的任意元a_{ij}的脚标用来表示这个元的位置是在第i行、第j列。

通常用直钩括弧$[a_{ij}]$来表示整个矩阵〔注1〕，或直接用字母（例如A）来表示，为避免

〔注1〕矩阵的符号，除（1·1）式的直钩括弧外，常见的还有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}\text{等写法。}$$

混淆，本书一律以黑体字母（例如**A**）表示一个矩阵。

【2】方阵

当矩阵的行数与列数相同，即$m=n$时，称为正方形矩阵或方阵。

例如

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

就是一个（3·3阶）方阵。

【3】行矩阵与列矩阵

仅有一行的矩阵

$$\mathbf{A}=[a_1 \ a_2 \cdots a_n] \qquad (1 \cdot n\text{阶}) \tag{1·3}$$

称为行矩阵或行向量。

仅有一列的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} \qquad (m \cdot 1\text{阶}) \tag{1·4}$$

称为列矩阵或列向量。通常可记作

$$\mathbf{A}=\{a_1 \ a_2 \cdots a_m\} \qquad (m \cdot 1\text{阶}) \tag{1·4a}$$

以节省篇幅。

【4】对角线方阵与单位方阵 **I**

除主对角线以外，其它各元均等于0的方阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (n \cdot n\text{阶}) \tag{1·5}$$

称为对角线方阵。上式所有空白处的元素均等于0。

当对角线方阵中，主对角线上的元都等于1时，即

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (n \cdot n\text{阶}) \tag{1·6}$$

称为单位方阵，并以固定的符号 **I** 表示之〔注2〕。

〔注2〕有些著作中，以固定的符号**U**或**E**表示。

在矩阵代数中，单位矩阵 **I** 相当于一般代数中纯数 1 的概念。

【5】零矩阵**O**

矩阵的全部元素均为 0 时，称为零矩阵，并以固定符号**O**表示之。这里，零矩阵可以是（$m\cdot n$）阶的长方形矩阵，也可以是（$n\cdot n$）阶的方阵。

在矩阵代数中，零矩阵**O**相当于一般代数中纯数 0 的概念。

【6】三角形方阵

主对角线以下的各元为 0 的方阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3n} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (n\cdot n\text{阶}) \qquad (1\cdot 7)$$

称为上三角形方阵，其中空白各元均为 0。

主对角线以上的各元为 0 的方阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (n\cdot n\text{阶}) \qquad (1\cdot 7a)$$

称为下三角形方阵。

【7】矩阵的转置——转置矩阵

将矩阵**A**的行与列，对换成列与行来写，就得到**A**的转置矩阵，用符号**A**′表示之〔注 3〕。也就是说，当

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m\cdot n\text{阶})，$$

则它的转置矩阵

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (n\cdot m\text{阶})。 \qquad (1\cdot 8)$$

这里要注意：**A**为（$m\cdot n$）阶矩阵、**A**′则为（$n\cdot m$）阶矩阵。

〔注 3〕转置的符号也有用$\mathbf{A}^{T}$或$\mathbf{A}^{*}$表示的。

【8】对称方阵

当方阵**A**具有

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}', \text{ 亦即} a_{ij}=a_{ji} \tag{1·9}$$

的性质时，称**A**为对称方阵。其全部元素沿着主对角线呈对称分布，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (4\cdot 4\text{阶})$$

后面将谈到，对称方阵的运算，可有不少便利之处。在结构分析中，对称矩阵是经常出现的。

当$\mathbf{A}=-\mathbf{A}'$，亦即$a_{ij}=-a_{ji}$时，称反对称方阵。显然，它的主对角线上的元素全部等于0。

§ 1·2 行　列　式

在一般代数中，读者早已熟悉了行列式的概念，故本节仅作简要摘录，以供后文查用。

【1】行列式的值

首先必须指出，决不可将行列式与方阵的概念混淆起来。两者虽都为一组数排列成的“表”，但行列式可通过运算求出其值，而方阵则不然。

通常以符号$|A|$表示一个包含n^2个元素的n阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (n\text{阶}) \tag{1·10}$$

行列式的值，等于任一行（或列）中全部元素a_{ik}与其代数余因式A_{ik}乘积之和，即

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \tag{1·11}$$

所谓元素a_{ik}的代数余因式A_{ik}，是指划去a_{ik}所在的行与列（即第i行，第k列）各元素后，剩下的所有元素构成的一个（$n-1$）阶行列式，并且乘以$(-1)^{i+k}$来决定其正负。这样，就把n阶行列式展开为（$n-1$）阶行列式之和的形式；重复这一降阶程序，最后可求出$|A|$的值。

例如三阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

若取第3列各元素进行求值计算，它们的代数余因式为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}),$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21});$$

于是 $|A|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$

$$=a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})+a_{33}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{21})。$$

以上所述，只是运用拉普拉斯（Laplace)定理〔注4〕求值的方法之一。如果结合下面摘录的行列式性质，先把行列式简化，求值工作可更简捷。至于求值的计算技术问题，这里不再赘述了。

【2】行列式的主要性质

（Ⅰ）行列式经转置后，其绝对值与符号均不变。

（Ⅱ）对调行列式的任意两行（或列）后，其绝对值与原行列式相同，但符号相反。

（Ⅲ）如果有两行（或列）元素完全相同，此行列式等于 0。

（Ⅳ）如果有一行（或列）元素全为 0，此行列式等于 0。

（Ⅴ）以数 γ 乘某一行（或列）上各元素，等于用 γ 乘这个行列式。例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} & \gamma a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\gamma\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}。$$

（Ⅵ）如果第 i 行(或列)的每一元素都可写成两个数的和，则此行列式可展开为两个行列式之和，它们分别以这两个数作为第 i 行(或列)的元素，而其它行(或列)元素如旧。例如

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ (d_1+d_2) & (e_1+e_2) & (f_1+f_2)\\ g & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d_1 & e_1 & f_1\\ g & h & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ d_2 & e_2 & f_2\\ g & h & i\end{vmatrix}$$

（Ⅶ）把任一行（或列）各元素乘以同一数后，加到另一行（或列）对应元素上，其行列式值不变。例如

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ (d+\gamma a) & (e+\gamma b) & (f+\gamma c)\\ g & h & i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}。$$

（Ⅸ）任一行（或列）中各元素a_{ik}，与另一行（或列）各元的代数余因式A_{jk}乘积之和等于 0。即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0。\qquad (1\cdot 11a)$$

显然，若 $j=i$，则表示二者属同一行，其乘积之和即为行列式之值，见（1·11）。

【3】方阵的行列式

方阵**A**全部元素构成的行列式，称为**A**的行列式 $|A|$。当然，$|A|$ 有其值。例如矩阵

〔注4〕关于普遍意义的拉普拉斯定理，见参考文献〔7〕。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix},$$

则它的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}，且有值 |A|=+2。$$

当方阵$\mathbf{A}$的行列式$|A|=0$时，称$\mathbf{A}$为奇异方阵，$|A|\neq 0$者称非奇异方阵。

对于三角形方阵及对角线方阵，其行列式等于主对角线元素之积。单位方阵的行列式等于1。这些性质可以用方程（1·11）得到证实。

§1·3 矩阵的加、减法

【1】矩阵的相等

若两个矩阵被称为相等：

$$\mathbf{A}=\mathbf{B},$$

则它们的阶数必须相同，并且其各个对应元完全相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \tag{1·12}$$

【2】矩阵的相加、相减

两个矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相加或相减，它们必需是同阶矩阵，其和或差$\mathbf{C}$亦为同阶矩阵，$\mathbf{C}$中各元为$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$中各对应元之和或差。即

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\pm\mathbf{B},$$

则

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}。 \tag{1·13}$$

例如

$$\begin{pmatrix}4&5&6&7\\8&9&10&11\\12&13&14&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3&4\\15&-16&17&-18\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&9&11\\23&-7&27&-7\\21&23&25&27\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}4&5&6&7\\8&9&10&11\\12&13&14&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3&4\\15&-16&17&-18\\9&10&11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3&3\\-7&25&-7&29\\3&3&3&3\end{pmatrix}。$$

【3】加法的交换律与结合律

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{1·14}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \tag{1·15}$$

此处$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$为三个同阶矩阵。可见矩阵的加法满足交换律与结合律。上述特性可推广至多个矩阵。

【4】矩阵和的转置

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}' \tag{1·16}$$

【5】方阵和的行列式

方阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$之和的行列式，一般地，并不等于$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的行列式之和。即

$$|A+B|\neq|A|+|B|。 \tag{a}$$

例如 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$， $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$；

则 $\left|A+B\right|=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$，而 $\left|A\right|+\left|B\right|=1+1=2$。

§1·4 矩阵的乘法

【1】数与矩阵相乘

以数 γ 乘矩阵**A**，得同阶矩阵。

$$\mathbf{C}=\gamma\mathbf{A},$$

C中各元就是**A**中各元乘以 γ，即

$$c_{ij}=\gamma a_{ij}。\tag{1·17}$$

【2】矩阵与矩阵相乘

两个矩阵的乘积**AB**，必须在**A**的列数等于**B**的行数时才有意义。其积**AB**=**C**仍是一个矩阵，它的行数同**A**，列数同**B**。例如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & \cdots & a_{2p}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & \cdots & a_{mp}\end{bmatrix} \quad (m\cdot p\text{阶}),$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ b_{p1} & \cdots & b_{pn}\end{bmatrix} \quad (p\cdot n\text{阶}),$$

则其乘积仍为一矩阵

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & \cdots & a_{2p}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & \cdots & a_{mp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdots & b_{2n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ b_{p1} & \cdots & b_{pn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & \cdots & c_{2n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix} \quad (m\cdot n\text{阶})。$$

这里，**C**第 i 行，第 j 列元素 c_{ij}，等于**A**中第 i 行各元 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip}$ 与**B**中第 j 列各元 b_{1j}，b_{2j}，$\cdots$，b_{pj} 逐对相乘后之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\tag{1·18}$$

例如

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})\\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})\\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32})\end{bmatrix}。$$

为了检验计算是否有误，可将**B**各行之和添在**B**之末尾，形成一列，同样参予运算，例如

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\0 & 1 & 5\\1 & 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}，\text{连同行和就变成}\begin{array}{c}B \quad\quad \text{行和}\\ \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 1\\0 & 3 & 3\\1 & 4 & 5\end{array}\right)\end{array},$$

则

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{array}{c}A\\ \begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\0 & 1 & 5\\1 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}B \quad\quad \text{行和}\\ \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 1\\0 & 3 & 3\\1 & 4 & 5\end{array}\right)\end{array}=\begin{array}{c}C \quad \text{行和}\\ \left(\begin{array}{cc|c}4 & 1 & 5\\5 & 23 & 28\\2 & 11 & 13\end{array}\right)\end{array},$$

检查**C**，其行和应为$4+1=5$，$5+23=28$，$2+11=13$，与计算结果同，证明计算无误，故

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & 23\\2 & 11\end{pmatrix}。$$

若将**A**之各列和当作一行添在末尾，也起同样检验效果。

【3】矩阵乘法的可换性问题

应该注意，一般情况下，矩阵乘法不一定满足交换律，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \tag{a}$$

这时称此两个矩阵为"不可换"的。例如

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -5\\-4 & 0\end{bmatrix} \qquad (2\cdot2\text{阶}),$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & -5\\1 & 2 & 3\\-4 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad (3\cdot3\text{阶})。$$

故矩阵相乘的前后次序不可忽视。对于乘积**AB**，可称作**B**被**A**前乘（或左乘），也可称作**A**被**B**后乘（或右乘）。

在个别情况下，若满足乘法交换律

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA} \tag{b}$$

则称**A**与**B**为彼此"可换"的，例如

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\-2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -6\\6 & -4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 2\\-2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -6\\6 & -4\end{bmatrix}。$$

显然，可换的情形只可能在**A**与**B**均为同阶方阵时才能出现，否则两种乘积**AB**与**BA**的阶数不同，永不可能相等。

【4】矩阵乘积的某些性质

（Ⅰ）当两矩阵之积为**O**时，并不意味着其中之一必定为**O**。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\mathbf{O}$$

（Ⅱ）当存在**AB**＝**AC**的关系时，**B**＝**C**的关系不一定成立。例如

$$[3 \quad 2]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}=[3 \quad 2]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}。$$

（Ⅲ）当矩阵**A**与单位方阵相乘时，其积仍为**A**，即

$$\mathbf{IA}=\mathbf{A} \quad 或 \quad \mathbf{AI}=\mathbf{A}。 \tag{1·19}$$

可见，单位方阵在矩阵运算中的地位，正如数1在一般代数运算中的地位一样。

（Ⅳ）当**B**为（$m \cdot m$阶）对称方阵时，则矩阵积

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}'\mathbf{BA} \tag{1·20}$$

也是一个对称方阵（$n \cdot n$阶）。其中**A**是一个（$m \cdot n$）阶的任意矩阵，并且$\mathbf{BA} \neq 0$，$\mathbf{A}'\mathbf{B} \neq 0$。

（Ⅴ）当**A**与**B**均为对称方阵时，其乘积**AB**通常不再是对称方阵。

（Ⅵ）同类型三角形方阵之积仍为该类型的三角形方阵。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

【5】乘法的结合律与分配律

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{1·21}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC} \tag{1·22}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \tag{1·23}$$

可见矩阵乘法满足结合律与分配律。

【6】乘积的转置

$$(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}',$$

$(\mathbf{ABC})'=\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$。可类推至更多个矩阵的积 (1·24)

【7】方阵乘积的行列式

（Ⅰ）以数γ乘方阵**A**得$\mathbf{C}=\gamma\mathbf{A}$，其行列式$|C| \neq \gamma|A|$，即

$$|\gamma A| \neq \gamma|A| \quad (\gamma \neq 0,1)。 \tag{1·25}$$

例如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}，\mathbf{C}=3\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}；$$

则

$$3|A|=3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

而

$$|C|=|3A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=9。$$

（Ⅱ）但是，两方阵乘积的行列式等于两方阵行列式之积。亦即

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| \tag{1·26}$$

注意，即使$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，上式仍成立。并且，上式可推广至多个方阵乘积，例如

$$|ABCD| = |BCAD| = \cdots = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| \tag{1·26a}$$

乃至更多个方阵乘积。今举一实例：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};$$

于是

$$|\mathrm{A\ B}| = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$|A| \cdot |B| = (-2) \cdot (-2) = 4 = |B| \cdot |A|$$

（Ⅲ）当$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$时，尽管并不意味着$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$两者至少有一个为$\mathbf{O}$，但它们的行列式$|A|$与$|B|$至少有一个等于0。这是因为行列式的值是一个纯数，从（1·26）式可立即获得上述结论。

【8】线性方程组的矩阵表达式

利用矩阵乘法，可以很简洁地写出线性方阵组的矩阵表达式。在结构分析中我们经常遇到这样的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}, \tag{c}$$

它可被写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

或更简洁地写作

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{d}$$

这里$\mathbf{X}$与$\mathbf{B}$都是列矩阵，前者为未知数，后者为常数项，$\mathbf{A}$是全部系数组成的（$n \cdot n$阶）方阵。读者只需按乘法的规则把式（d）展开，就可以看到它与（c）式完全一样。这样，研究线性方程组的问题就可以用它的矩阵表达式来进行了。

§1·5 矩阵的分块运算

矩阵经分块后再进行运算，是矩阵理论的一个重大发展，它可大大简化许多矩阵的运算，并使矩阵的本质更加显现。

【1】矩阵的分块

为了运算与论述方便，可以将矩阵分割成若干块，每一块内的元素构成一个“子矩阵”（或“子块”）——本书以小写黑体字母表示，有时也以大写黑体字母表示之。矩阵的分块可根据需要来选择。例如