高等数学与应用数学基础

（第一册）

主编　阎章杭　周建国　黄士林

中国人民公安大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学与应用数学基础/阎章杭主编.—北京:中国人民公安大学出版社,2001.9

ISBN 7-81059-798-1

Ⅰ.高… Ⅱ.阎… Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教材②应用数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.①O13②O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第067011号

高等数学与应用数学基础

GAO DENG SHU XUE YU YING YONG SHU XUE JI CHU

阎章杭 编

出版发行:中国人民公安大学出版社
地　　址:北京市西城区木樨地南里
邮政编码:100038
印　　刷:北京公大印刷厂

版　　次:2001年9月第1版
印　　次:2001年9月第1次印刷
印　　张:47
开　　本:787毫米×1092毫米 1/16
字　　数:1100千字
印　　数:0001-4100册

ISBN 7-81059-798-1/G·100
定　　价:67.00元(全三册)

本社图书出现印装质量问题,由发行部负责调换
联系电话:(010)83905728

E-mail:cpep@public.bta.net.cn

《高等数学与应用数学基础》
教材编委会

主　编　阎章杭　周建国　黄士林

副主编（一、三册）　程传蕊　拜云胜　辛自力

王燕燕　金家琦

（二、三册）　刘青桂　哈　斯　白水周

杨瑞蕊　白景华　李希洛

编　委（按编写篇章顺序排列）

拜云胜　黄士林　李媛媛　张　杰

程传蕊　王燕燕　金家琦　靳丽丽

周建国　辛白力　白景华　路世英

常　荷　赵炳根　王　林　黄士林

杨瑞蕊　白水周　哈　斯　张建军

刘青桂　阎章杭

前　言

当前,我国高职高专教育成为社会关注的热点,面临大好的发展机遇。同时,国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了许多更高的要求。根据最近教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见:“课程和教学内容体系改革是高职高专教育教材建设规划的重点和难点,要切实做好高职高专教育教材的建设规划,加强文字教材、实物教材、电子网络教材的建设和发行工作。经过5年时间的努力,编写出版500种左右高职高专规划教材。”然而,目前公开出版发行的高职高专教材,大多数内容偏多、偏深,所用的学时数也偏多,教材的形式也单一,与当前全国大多数高校,特别是高等职业教育院校的教学现状有较大的差距,这样不利于高职高专教育。为了改变这一现状,进一步推动全国高职高专教材的改革,开封大学会同漯河职业技术学院,三门峡职业技术学院、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、洛阳大学等院校的优秀教师和专家,经过一年多的反复酝酿和研究,广泛征求相关专业教师的意见,几易其稿,共同编写了面向21世纪的比较符合当前各高职高专、特别是高职院校教学实际的数学教材——《高等数学与应用数学基础》。

在该套教材的编写中,我们以国家教育部关于三年制高职高专教育数学大纲为重要依据(但并没有严格按此大纲,不少地方做了必要调整),来组织教学内容的编写的,同时又进一步结合当前高等职业教育发展的趋势及学校自身的状况,力争使教材更具有科学性,基础性、实用性。

该套教材共计三册,其中:第一册,主要内容有一元微积分、多元微积分基础;第二册,主要内容有概率与数理统计基础、线性代数、线性规划初步、无穷级数、常微分方程与拉不拉斯变换、数学建模;第三册为辅导册,内容有:每章内容小结,典型习题解答与提示,自我测验。

该套教材充分吸收了当前我国现有高职高专教材的长处,密切结合当前高职高专教学改革的实际,努力编出具有自身特色的高水平的高职高专教材,具体反映为:

1. 努力贯彻“拓宽基础,强化能力,立足应用”的原则,突破传统教材体系,精选内容,主次分明,删减枝节,注重应用,讲究实效。

2. 结合高职高专教学特点,淡化数学理论,一些较繁的定理,公式及很明显的结论,或者只给出结果,或者以几何直观予以说明。例如去掉极限的“ε—δ”语言和利用几何直观来描述拉格朗日中值定理,略去定理的证明。

3. 本套教材可根据不同专业、不同的学生类别,按模块选学不同的内容,供

选择的面较宽，由于每一部分内容精炼，因而所用的学时数较少，一般所用教学时数在120—150学时左右，比较符合当前的教学实际。

4. 本套教材是文理兼用，不仅优化了高等数学在物理方面的应用，而且还增加了高等数学在经济领域内的应用，这样有利于学生综合素质的提高。

5. 所选的例题或习题均以帮助学生理解概念，掌握方法为目的，删去单纯的技巧或较难的题目，增加富有启发性或为专业服务的应用性题目。

6. 本教材还附录了 Mathematica 软件介绍，以供有条件的院校或学生选学。

7. 数学建模是培养学生综合应用数学知识、分析、解决实际问题的一种手段。编者不仅在全书中贯彻数学建模的思想和方法，同时在书中最后增加一章“数学模型与数学建模简介”的内容，以供有关专业选学。

本套教材可供三年制高职高专公共数学教学使用，也可供电大、职大、函大等成人专科公共数学教学使用。

该套教材由阎章杭总策划，负责组织实施。

主编：阎章杭　周建国　黄士林

副主编（一、三册）：程传蕊　拜云胜　辛自力　王燕燕　金家琦

（二、三册）：刘青桂　哈　斯　白水周　杨瑞蕊　白景华　李希洛

参加每一篇（第一册或第二册及相应辅导册内容）编审人员有：

第一篇（一、三册）：拜云胜　黄士林　李媛媛　张　杰　程传蕊　王燕燕　金家琦　靳丽丽；

第二篇（一、三册）：周建国　辛自力　阎章杭；

第三篇（二、三册）：白景华　路世英　常　荷　赵炳根　阎章杭；

第四篇（二、三册）：周建国　路世英　王　林；

第五篇（二、三册）：白景华　杨瑞蕊；

第六篇（二、三册）：黄士林　白水周；

第七篇（二、三册）：拜云胜　白水周　哈　斯　张建军；

第八篇（二册）：程传蕊　阎章杭

由于编者水平有限，时间仓促，不当之处在所难免，热情希望广大读者批评指正。

在本书编写过程中，曾得到有关学校领导、系部领导和有关专家，以及中国人民公安大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的谢意！

编者

2001年8月

目　　录

（第一册）

第二篇 多元函数微积分基础

第一章　预备知识:初等数学提要及重要公式

§1-1　代数

一　实数

人们把正负整数与正负分数连同零统称为有理数,即有理数为形如$\frac{p}{q}$这一类数,其中p、q为既约整数,且$q\neq0$。凡不能写成$\frac{p}{q}$这一形式的一类数叫做无理数。如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\lg5$、π、e,……等均是无理数,无理数是无限不循环小数。有理数和无理数的全体统称实数。

建立了数轴之后,实数与数轴上的点就形成了一一对应,这就是说:数轴上的每一个点表示某一个实数;反过来,每一个实数必是数轴上某一点的坐标。因此,我们可以把实数看作数轴上的点,也可以把数轴上的点看作实数,二者并无本质区别。

[?]两个实数之间有多少实数?

二　绝对值

数轴上的点x到原点O的距离叫做实数x的绝对值,记作$|x|$,于是有:

[!]距离可以用绝对值表示!

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant0\\ -x & x<0\end{cases}$$

相仿地,$|x-a|$表示数轴上的点x与点a的距离。于是有:

$$|x-a|=\begin{cases}x-a & x\geqslant a\\ a-x & x<a\end{cases}$$

绝对值具有以下性质:

(1)$|x|\geqslant0$

(2)$|x|<a\Leftrightarrow-a<x<a$

　$|x|\leqslant a\Leftrightarrow-a\leqslant x\leqslant a$

(3)$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$

　$|x|\geqslant a\geqslant\Leftrightarrow x\leqslant-a$ 或 $x\geqslant a$

(4)$|xy|=|x||y|$,特别地,$y=-1$　　$|-x|=|x|$

(5)$|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$

(6)$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

(7)$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(8) $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

例 1　解绝对值不等式:

(1) $|1-2x|<3$

(2) $|3-4x| \geqslant 2$

(3) $|2x+1|>-1$

(4) $|3x+2|<-2$

解　(1) $-3<1-2x<3$　　$\therefore -1<x<2$

(2) $3-4x \leqslant -2$ 或 $3-4x \geqslant 2$

$\therefore x \geqslant \dfrac{5}{4}$ 或 $x \leqslant \dfrac{1}{4}$

(3) ∵任意实数绝对值大于等于 0　　∴不论 x 取何值不等式恒成立　　∴解集为任意实数。

(4) ∵任意实数绝对值大于等于 0　　∴小于 -2 是不可能的　　∴方程无解。

> 在例 1(1)中,解不等式 $-3<1-2x<3$ 实质上是解不等式组 $\begin{cases}1-2x>-3\\1-2x<3\end{cases}$。

三　因式分解

(1)提取公因式法

在提取公因式时,要把各项系数的最大公约数与各项中相同字母的最低次幂的积,作为各项的公因式提取出来。

例 2　把 $9x^6-12x^4y^2+6x^2$ 分解因式

解　原式 $=3x^3(3x^3-4xy^2+2)$

在分解因式时,有时需要适当分组,然后再提取公因式。

例 3　把 ax^5-ax^4+x-1 分解因式

解　原式 $=ax^4(x-1)+(x-1)=(x-1)(ax^4+1)$

(2)十字相乘法

十字相乘法用于二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解。我们希望得到分解式

$$ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q)$$

右端展开式为:$mnx^2+(mq+np)x+pq$　比较系数易知:将 a 分成 m 乘 n,将 c 分成 p 乘 q,十字交叉相乘后,能够使 b 等于 $mq+np$。

> 应掌握方法,不必死记公式。

当 a、b、c 是整数时,可以用观察的方法来确定 m、n、p、q。

例 4　分解因式 $10x^2-7x-12$

解　原式 $=(2x-3)(5x+4)$

(3)用乘法公式分解因式

反过来使用乘法公式就是因式分解公式。常用的有:

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^2 \pm 2ab+b^2=(a \pm b)^2$

$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

例5　分解因式 $a^4 + 4a^2b + 4b^2$

解　原式 $= (a^2)^2 + 2\cdot a^2 \cdot (2b) + (2b)^2 = (a^2 + 2b)^2$

四　一元二次方程求根公式

一元二次方程为:$ax^2 + bx + c = 0$

称$\triangle = b^2 - 4ac$ 为一元二次方程根的判别式

若$\triangle > 0$　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$方程有两相异实根;

若$\triangle = 0$　$x = -\dfrac{b}{2a}$　为二重根;

若$\triangle < 0$　方程无实根。

例6　k 是什么数时,方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有解

解　$\because \triangle = [-(2k+1)]^2 - 4\cdot k \cdot k = 4k + 1$

$\therefore$当$\triangle \geqslant 0$　即 $k \geqslant -\dfrac{1}{4}$,方程有解。

?在实数范围内,n 次多项式是否都可以分解成一次因式之积?

五　指数运算

指数运算主要公式有

(1)$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2)$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3)$(ab)^m = a^m b^m$

(4)$(a^m)^n = a^{mn}$

除了正整数幂外,对于一般有理数指数幂的意义应当熟练掌握。如:

(5)$a^0 = 1$

(6)$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

(7)$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

(8)$a^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

(注:对于指数,要求底数大于零不等于1)

例7　计算(1)$3^{-2}\cdot(3\dfrac{1}{3})^{-3}\cdot(\dfrac{2}{5})^{-2} \div (3.14 \div 256)^0$

$$(2)\ -2^2 \div 125^{-\frac{2}{3}} \times (\frac{2}{5})^2 - (0.1)^{-2} + (-1)^{10} \times (-\frac{1}{24})^0$$

解　(1)原式 $= \dfrac{1}{3^2}\cdot(\dfrac{3}{10})^3\cdot(\dfrac{5}{2})^2 = \dfrac{3}{160}$

(2)原式 $= -4 \times 125^{\frac{2}{3}} \times \dfrac{4}{25} - 10^2 + 1 \times 1$

$$= -4\times 25\times \frac{4}{25}-100+1=-115$$

六 对数运算

?对于对数,要求真数大于零!

对数运算主要公式有:

(1)$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(2)$\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$

(3)$\log_a x^m=m\log_a x$

(4)$\log_a \sqrt[m]{x}=\frac{1}{m}\log_a x$

换底公式

(5)$\log_a^b=\frac{\ln b}{\ln a}$

在高等数学中一般多采用自然对数,遇到底数不是 e 的对数,应利用上公式进行转化。

(6)$e^{\ln a}=a$

这个公式称为对数恒等式,如:

$e^{-\ln 3}=e^{\ln\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ $\qquad$ $e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$

最后再提一下,1 的对数为 0,即 $\log_a 1=0$;底的对数为 1,即 $\log_a a=1$。

例 8 计算

(1)$|1+\lg 0.001|+\sqrt{\lg^2\frac{1}{3}-4\lg\frac{1}{3}+2\log_2 4}-\lg 6+\lg 0.02$

(2)$2^{\log_4(2-\sqrt{3})^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}-(\sqrt{(\log_2 4-5)^2})^{-1}+\log_2(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}+\log_{\sqrt{3}}1$

解 (1)原式 $=|1+\lg 10^{-3}|+\sqrt{\lg^2\frac{1}{3}-4\lg\frac{1}{3}+4}-\lg 6+\lg 2+\lg 10^{-2}$

$$=|1-3|+\sqrt{(\lg\frac{1}{3}-2)^2}+\lg\frac{1}{3}-2$$

$$=2+(2-\lg\frac{1}{3})+\lg\frac{1}{3}-2=2$$

(2)原式 $=2^{2\log_4(2-\sqrt{3})}+3^{2\log_9(2+\sqrt{3})}-(\sqrt{(2-5)^2})^{-1}+\log_2\frac{1}{2}$

$$=4^{\log_4(2-\sqrt{3})}+9^{\log_9(2+\sqrt{3})}-\frac{1}{3}-1$$

$$=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

例 9 化简:(1)$\ln(x^3\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}})$

(2)$\lg5\lg800+\lg0.08+\lg^2 25$

解　(1)原式 $=3\lg x+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{2}{3}\ln(x+1)$

(2)原式 $=\lg5(3\lg2+2)+(3\lg2-2)+(2\lg5)^2$

$=\lg5[3(1-\lg5)+2]+[3(1-\lg5)-2]+4\lg^2 5$

$=1+2\lg5+\lg^2 5=(1+\lg5)^2$

七　不等式

不等式有以下简单性质:

[1]能理解、知道这些性质即可!

(1)若 $a>b$　$b>c$,则 $a>c$

(2)若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;若 $a>b,c>b$,则 $a+c>b+d$

(3)若 $a>b,c>0$,则 $ac>bc$,若 $a>b,c<0$,则 $ac<bc$

(4)若 $a>b>0$,则 $a^n>b^n,\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$　(n 为正整数)

(5)若 $a>b>0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

例 10　解不等式

(1)$6x^2+2>7x$

(2)$4x^2+5x<0$

(3)$\begin{cases}1-\frac{x+1}{2}\leqslant 2-\frac{x+2}{3}\\ x(x-1)>(x+3)(x-3)\end{cases}$

(4)$\frac{2x+1}{x+1}\leqslant 3$

解　(1)原式可化为:$6x^2-7x+2>0,(2x-1)(3x-2)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$或 $x>\frac{2}{3}$

(2)原式可写成 $x(4x+5)<0$　　$\therefore -\frac{5}{4}<x<0$

(3)原方程组可化为:$\begin{cases}6-3x-3\leqslant 12-2x-4\\ x^2-x>x^2-9\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x\geqslant -5\\ x<9\end{cases}$　　即 $-5\leqslant x<9$

(4)原式可化为:$\frac{-x-2}{x+1}\leqslant 0$　　$\therefore x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1$

本节关键词

实数　绝对值　因式分解　求根公式　指数运算　对数运算

§1-2　初等几何

高等数学中经常用到初等几何中的面积与体积公式,常见的有:

(1)三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$

特别情况:若 $C=\frac{\pi}{2}$,即直角三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab$

(2)梯形面积 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$,其中 a、b 为上下底,高为 h

(3)圆周长 $l=2\pi r$　　圆弧长 $l=\theta r$

圆面积 $S=\pi r^2$　　圆扇形面积 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

其中 r 为圆半径,θ 为圆心角,以弧度计。

(4)圆柱体体积 $V=\pi r^2h$,侧面积 $S=2\pi rh$,全面积 $S=2\pi r(h+r)$,其中 r 为圆柱底面半径,h 为圆柱的高。

$\boxed{1}$ 这些公式应熟练掌握!

(5)圆锥体体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$,侧面积 $S=\pi rl$,其中 r 为圆锥底面半径,l 为母线的长。

(6)球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,表面积 $S=4\pi r^2$

本节关键词

面积　体积

§1-3 三角函数

一 三角函数定义

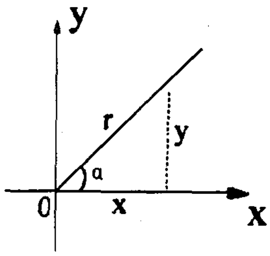
在角 α 的终边上任取一点 $P(x、y)$,P 点到原点 O 的距离为 r,则角 α 的三角函数定义为:

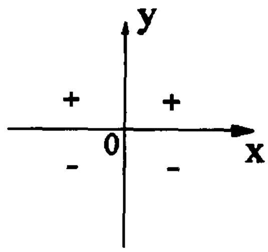
$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$　　$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}$　　$\sec\alpha=\frac{r}{x}$　　$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

由三角函数的定义,立刻得到它们在各个象限的符号

(见图 1.1)





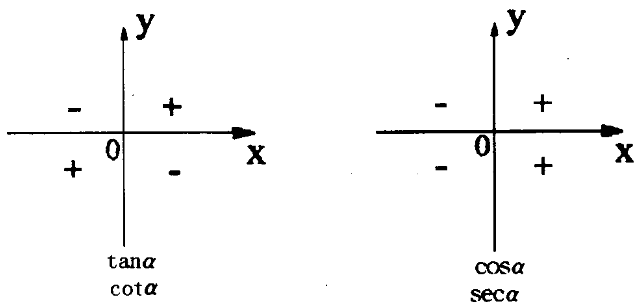


图 1.1

二　特殊角三角函数值(见下表)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

三　和角、倍角与半角公式

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

! 应熟练掌握!

(4) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(5) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

(6) $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(7) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

(8) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

(9) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

四　同角间三角函数关系式

(1)平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$　　$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

(2)商的关系

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

应熟练掌握!

(3)倒数关系

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$ $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

五 诱导公式(见下表)

能理解,知道即可!

三角函数	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\beta$	$\mp \cot\alpha$	$\pm \tan\alpha$	$\mp \cot\alpha$	$\pm \tan\alpha$
$\cot\beta$	$\mp \tan\alpha$	$\pm \cot\alpha$	$\mp \tan\alpha$	$\pm \cot\alpha$

诱导公式的记法是:奇变偶不变,符号看象限,α 当作锐角看,即若以$\frac{\pi}{2}$的奇数倍(y 轴)为准加减 α 得到的角,使用诱导公式后,化为原来函数的余函数;以$\frac{\pi}{2}$的偶数倍(x 轴)为准时,化简后函数名称不变,将 α 看作锐角,判断终边所在象限,由此确定公式的符号。

六 三角函数图象及其性质

见第二章第一节中的第五个问题的表格所列的三角函数部分。

例 1 已知角 α,求满足下列条件的角 β。

(1)β 角的终边与 α 角的终边关于 x 轴对称;

(2)关于 y 轴对称。

(3)关于原点对称。

解 (1)$\because \alpha$ 和 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称 $\therefore \beta = 2k\pi - \alpha$

(2)$\because \alpha$ 和 $\pi - \alpha$ 的终边关于 y 轴对称 $\therefore \beta = (2k+1)\pi - \alpha$

(3)$\because \alpha$ 和 $\pi + \alpha$ 的终边关于原点对称 $\therefore \beta = (2k+1)\pi + \alpha$

例 2 (1)已知 $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$,$\alpha$ 位于第二象限,求其它三角函数值。

(2)已知 $\tan\alpha = -\dfrac{5}{12}$,$\alpha$ 位于第四象限,求其它三角函数值。

解(1)$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\sqrt{2}$$

(2) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{12}{5}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{5}{13}$$

例 3　证明:(1) $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(2) $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$　　(3) $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

证:(1) $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(2) $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(3) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

例 4　(1)已知 $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}, \alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$,求 2α 的三角函数值。

(2)已知 $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}, \alpha\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$,求 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$的值。

解　(1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot(-\dfrac{3}{5}) = -\dfrac{24}{25}$

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(-\dfrac{3}{5})^2 - 1 = -\dfrac{7}{25}$

$\tan2\alpha = \dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \dfrac{24}{7}$