

生活与科学文库

从数的诞生到复数

虚数的奥秘

生活与科学
文库

〔日〕 堀場芳数 著

科学出版社

生活与科学文库

虚数 i 的奥秘

——从数的诞生到复数

〔日〕 堀場芳数 著
丁 树 深 译

科 学 出 版 社

「虚数 i の不思議」 堀場芳数

©Yoshikazu Horiba

All right reserved

First published in Japan in(1990)by Kodansha Ltd.Tokyo

Chinese version published by Science Press

Chinese Academy of Sciences

Under license from Kodansha Ltd.

本书据日本讲谈社 1997 年第 14 次印刷版译

图字:01-1999-3294 号

图书在版编目(CIP)数据

虚数 i 的奥秘——从数的诞生到复数/[日]堀場芳数

著;丁树深译.-北京:科学出版社,2000

(生活与科学文库)

ISBN 7-03-008189-7

I. 虚… II. ①堀… ②丁… III. 复数-普及读物

IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 73904 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京双青印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

定价:10.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前言

当前，一听到数学就头痛的仍大有人在。

本书是特意写给这些人的一本趣味数学。

数学为什么被有些人视如蛇蝎、望而生畏呢？

数字还可以，一旦遇到数学式，有些人就头昏脑胀、不知所措。你有过这样的体验吗？

本书作者竭尽全力，尽量通俗易懂地讲解数学式。请大家阅读2~3页试试看。

在学校学习时，对一些似懂非懂、莫明其妙的数学式，有的同学自作聪明，好像完全明白了，甚至还说：“啊！是的。”其实，滥竽充数、不求甚解而误事的例子是不胜枚举的。

当然，和文字叙述一样，数学式也应仔细阅读。为此，奉劝大家务必通读数学

式，清楚弄懂其中的来龙去脉。

在电车里或等待恋人的时候，最好抽时间一点一点地阅读。不管怎么说，挤时间看书是对阅读能力的一种训练。

当你在众目睽睽下看这本书时，周围的人们会敬佩地猜想：“毫不费力地阅读这么困难的书的人，大概是位了不起的人物吧！”

如果还没有意中人，阅读此书会使你萌生爱情而坠入情网。

如果以此书中部分内容为话题，穿插在幽会时的谈情说爱中，对方也许会认为你是一位文质彬彬的秀才呢。

德国数学家高斯曾以“数学王子”和现今磁卡时代奠基人而闻名于世，他说过：“数学进展与国家的繁荣昌盛息息相关。”由此可见，发展数学对社会的影响十分深远。

大家不要错过浏览世界奇绩的挑战。

最近，在日本，大人和孩子们都热衷于看漫画，越来越多的人不再看数学书了。这实在是件令人遗憾的事情。

也不能说漫画就不好。作者本人一直认为漫画真是好极了。实际上，为取得美国汽车驾驶执照的教科书就是采用通俗易懂的漫画形式编写的。

20年前，日本庆应大学教授、数学家田岛一郎先生曾对作者说过：“如果教

科书能用漫画编写，孩子们一定会更努力地用功学习。”

数学是科学技术的基础。尽管数学非常重要，但有人却常以“难学”或“难懂”为借口，对数学敬而远之。

这是否因为人们不习惯的数学术语太多或者因为数学是一个一个逻辑思维堆砌的学问呢？

但是，反过来也可以认为，数学就像上楼登楼梯，必须要一阶一阶地攀登，这样就不难理解数学不是高不可攀的。

例如，从一层登上二层楼，从二层再登上三层楼……这样逐层攀登得越高，周围景物就见得越广，如果在超高层建筑的展望台登高瞭望，还能看到远处的风景，甚至 360° 全景风貌犹如拨云见日，也可尽收眼底。

同样，也可以认为数学是循序渐进、严谨扎实的科学。从这一点来看，数学也许是最完美的学问之一。

对加法演算感到难以应付的小学生，升入高中学习数列之后，就能立刻简单地算出 1 到 100 的自然数之和，即正整数之和为 5050。

还有，关于椭圆面积以及酒樽状曲面面积的计算，利用积分公式在几分钟甚至数十秒钟以内就可迅速得出答案。

值得一提的是，有些不以数学为职业

的人们，也总想掌握点儿高中数学知识。

本书是为高中生和不能自如运用高中数学的读者而写，书中内容解说谨慎详细、通俗易懂。在现实社会中，需要数学判断的事情之多是很难意料的。

实际上，日常生活丰富多彩，一旦遇到集合、误差、概率、统计等各式各样的数学问题，也许你自己会不知不觉地在实践中运用这些数学知识。

当今社会虽然不是万能的时代，但在已进入信息和高科技的今天，偶尔翻开数学书想想怎样继续提高现代数学基础也是很有意义的。

还有，回想中学时学过的数学，置身于抽象世界，这对促进头脑反应或提高数学判断能力不是很有益处的吗？

为此，本书首先从数的诞生开始，再讲到虚数、复数，尤其以奇妙的复数为核心，穿插不同时期与 i 相关数学家的生平事迹，汇总写成这本趣味数学读物。

如果原来你厌弃数学，本书定会使你喜欢上数学。

最后，将虚数固有的一些标奇立异的性质作为虚数的七个奥秘归纳如下。

- (1) $i^2 = -1$ ，即出现了平方为负的 i ；
- (2) 虚数是没有大小关系的数；
- (3) 共轭复数之和及其乘积均为实数；

(4) i^n 值只有 4 个，并可反复变换为 1, -1 , i , $-i$;

(5) i 可视为复数平面上的 1 个点;

(6) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, 即三角函数值的 n 次方幂可转化为相应幅角的 n 倍;

(7) $e^{\pi} = -1$, e , π , i 之间是三角恋 (-1) 关系。也就是说，无理数的 $\{(\text{无理数}) \times (\text{虚数})\}$ 次方幂为实数。

堀場芳数

1990 年初夏

目 录

前言

第一章 追踪数的诞生过程	(1)
§ 1.1 怎样“一一对应”	(2)
§ 1.2 绳扣记数	(3)
§ 1.3 零(0)和印度·阿拉伯数字的发明	(5)
§ 1.4 数起源于5进位的数	(6)
§ 1.5 为什么使用12进制和60进制	(9)
§ 1.6 费马大定理	(16)
§ 1.7 2进制数的构成	(22)
§ 1.8 公历和奇妙的世界历	(27)
§ 1.9 数和数轴	(30)
§ 1.10 有理数	(31)
§ 1.11 负数	(35)
§ 1.12 无理数的发现	(38)
§ 1.13 欧洲也使用算盘计算	(41)
§ 1.14 计算机程序	(43)
第二章 平方为负的数	(51)
§ 2.1 怎样计算龟鹤算问题	(52)
§ 2.2 方程式求解法	(52)
§ 2.3 二次方程式的求解公式	(57)
§ 2.4 虚数单位 <i>i</i> 是怎样产生的	(59)
§ 2.5 三次方程式的一般解	(67)

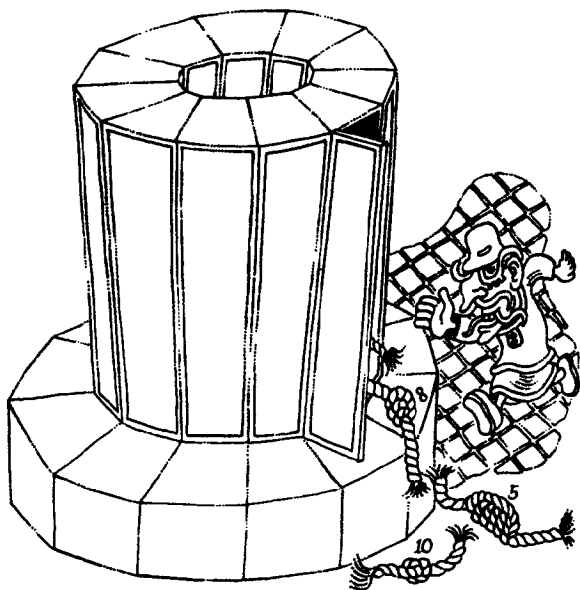
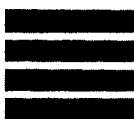
第三章 怎样计算复数	(77)
§ 3.1 使用虚数单位的数	(78)
§ 3.2 复数的加法与减法运算	(79)
§ 3.3 复数的乘法与除法运算	(81)
§ 3.4 复数运算法则	(83)
§ 3.5 怎样使用虚数单位 i	(84)
§ 3.6 虚数和复数计算结果的考察	(86)
§ 3.7 能否在数轴上表示虚数	(88)
§ 3.8 天才少年高斯	(89)
第四章 怎样在复数平面上表示复数	(95)
§ 4.1 复数平面	(96)
§ 4.2 共轭复数与 J. R. 阿尔冈图解的关系	(101)
§ 4.3 高斯平面上的四则运算	(103)
§ 4.4 利用直角三角形的边角关系表示复数	(108)
§ 4.5 复数变化的表达方法——极坐标方程	(111)
§ 4.6 零(0)及虚数极坐标形式的表达方法	(115)
§ 4.7 60 进制和弧度制的关系	(116)
§ 4.8 关于圆周率 π	(118)
§ 4.9 采用弧度制的复数极坐标形式	(119)
§ 4.10 复数 z_1, z_2 的和与差的极坐标形式	(121)
§ 4.11 复数 z_1, z_2 积与商的极坐标形式	(125)
§ 4.12 弧度制的 π 与三角函数曲线	(128)
§ 4.13 古人有关 π 值的计算	(129)
§ 4.14 江戸时期的日本数学家和 π 的计算	(133)
第五章 复数在解析几何中的应用	(135)
§ 5.1 两点间距离	(136)
§ 5.2 圆	(137)
§ 5.3 坐标平面上的曲线方程式	(138)
§ 5.4 内分点	(141)
§ 5.5 两条直线的夹角	(142)

§ 5.6 相似三角形	(145)
第六章 德·莫依尔定理	(148)
§ 6.1 德·莫依尔定理	(149)
§ 6.2 德·莫依尔定理的扩展	(155)
§ 6.3 怎样计算 1 的立方根	(161)
§ 6.4 怎样计算 1 的 n 次方根	(163)
第七章 $e^{i\pi} = -1$ 是 e, π, i “三角恋” 关系吗	(168)
§ 7.1 指数函数 $y = a^x$	(169)
§ 7.2 自然对数的底是什么数	(172)
§ 7.3 七桥问题和一笔画	(177)
§ 7.4 复数的指数法则	(180)
第八章 向量和复数的关系	(183)
§ 8.1 平面坐标的表示方法	(182)
§ 8.2 笛卡儿的简历	(185)
§ 8.3 极坐标表示方法	(190)
§ 8.4 圆的极坐标方程式	(193)
§ 8.5 抛物线、双曲线、椭圆的极坐标方程式	(196)
§ 8.6 向量	(201)
§ 8.7 向量的复数四则运算	(205)
结束语	(211)
参考文献	(212)

第1章

追踪数的诞生过程

—— 从“一一对应”到电脑 ——



§ 1.1 怎样“一一对应”

这里不讨论达尔文进化论,但近半个世纪以来,人们感到刚出生的婴儿变化很大。笔者小时候那个年代,婴儿降生后,手指总是弯曲着,并把小拳头握得紧紧的。这样手掌易染湿疹,为此必须掰开婴儿拳头,在掌心放些脱脂棉才行。

可是,最近几年却不同,初生婴儿往往都张开小手,并可看清婴儿红叶般的5个小指头。

还有,近些年来幼儿语言也多起来了,教小孩数数也简单省事了,但在半个世纪之前,给小孩糖果之类的东西时就说:“给你1个”,若给孩子2、3块糖就说:“给你多多啦”等稚气十足的话。

总而言之,幼儿领会1个和很多个的区别要慢些。

翻开数学史书可以发现,很多土著人只能区分1个和很多个。有关这方面的趣事,还留有各种传说。

为了交换宝石和子弹,有位白人问道:“10颗子弹换10块宝石,想换吗?”对方的土著居民脸色一变说:“不,不行!”,但若一个一个地交换,换多少次都行。

不知道数和数字的人们,在交换物品时只知道1颗子弹换一块宝石,即“一一对应”地交换。

稍微抽象化一点,不管什么物品都行,就有 $\{A, B, C, \dots\}$ 和 $\{a, b, c, \dots\}$ 两组集合。

这里, $\{ \}$ 是集合符号。

如图1-1所示,当 $Aa, Bb, Cc \dots$ 那样一个 A 对应一个 a ,一个 B 对应一个 b ,一个 C 对应一个 c 时,这种关系则称之为“一一对应”。

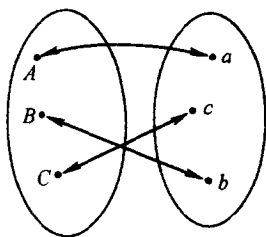


图 1-1 “一一对应”示意图

例如，世界上每个国家都有一面自己的国旗，因此，一面国旗就对应一个国家。

这样一来，不仅仅是子弹和宝石，人们使用的各种物件都有各自“一一对应”的种种关系。

还有，土著居民的酋长，每天早上让人们去田里干活，并让每人放一块拳头大的石头再走。傍晚由地里干活回来的人拿一块石头换一份食物，石头全部拿光了，就确认当天早上出工的人全都回来了。

与此相同的故事还有，饲养很多羊的土著居民，清晨外出放牧羊群时，放出多少只羊出圈，就在大树干上刻划多少个记号。傍晚，羊群归圈时，再谨慎地按照早晨刻在树干上的记号用手指逐一地对照检查。若树干上的记号与羊的数目相同，说明归栏羊数与出栏羊数相同。

这确实是“一一对应”的。

这样的故事，也有的作为寓言在世界各地广泛流传。

§ 1.2 绳扣记数

众所周知，在没有货币之前，一切物品都是交换

的。也就是说,从制作物品或占有物品的人手中,通过交换再过渡到使用或食用人手里,并依靠交换取得赖以生存而自己却没有的东西。

远古时代,在南美印加帝国出现了用绳扣表示数的绳扣记数方法。

如图 1-2 中所示,不同的绳扣节代表不同的数目。1 个绳扣节代表“1”,2 个绳扣节代表“2”……古时候印加人采用的就是这种表示数目的方法。

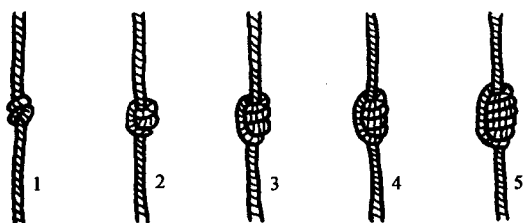


图 1-2 绳扣记数示意图

绳扣不仅仅是可数数的计数方法,并且也能起到记录数的作用。

在印加帝国,绳扣有数字的作用。也就是说,绳扣是数词以外的代用数字。

实际上,除了绳扣记数外,也使用手指、圆木等表示数目。

据说,也有使用动物和植物记数的。例如,美洲虎的头表示“1”,展开翅膀的鹭表示“2”,紫苜蓿的叶子表示“3”,家畜代表“4”等表示方法。

热带新几内亚部落的人,规定左手小手指代表“1”,无名指代表“2”,中指代表“3”……同时,用右手手指向左手手指的相应部位,则可准确无疑地知道该数。

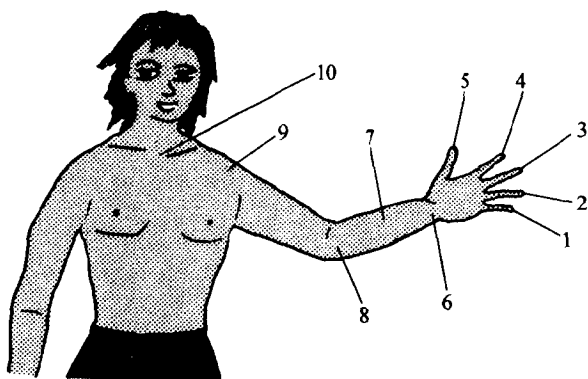


图 1-3 手指等记数示意图

§ 1.3 零(0)和印度·阿拉伯 数字的发明

计算时所使用的数字 1, 2, 3, … 被称为阿拉伯数字。其实,这并不是阿拉伯人发明的,实际上是印度最早发明,后经阿拉伯人传播到欧洲。

为了缅怀印度数学家对数字创业的艰辛功绩,算用数字现在被称为印度·阿拉伯数字。

很遗憾,由中国传入日本的汉字中没有日本人自己的数字。但是,数数从远古时代起就是日常生活中必不可少的事。

日本有固有数词的计数方法(从略)和记录数的记数法。目前日本仍在表示 1, 2, 3, … 和一, 二, 三, …… 计数的方法,称为记数法。

绳扣记数是古代印加帝国的记数方法,而目前在

日本多亏有了中国数字(一,二,三,四,五,六,七,八,九,十)和算用数字,即印度·阿拉伯数字,简称阿拉伯数字(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),从而使书写数字和数数,甚至在幼稚园都已是简单可行的。

最近,由于电脑,即电子计算机的迅速发展,我想大家对2进制和2进位数之类术语都经常有耳闻吧。

进位制(n 进制)是什么?让我们稍微说一下。

古代人数数是件苦差使。一只手有5个手指,因此,最早开始用5个手指头数数是5进制。

食指当作“1”,食指和中指当作“2”,但类人猿进化之初,手指能否一个一个地灵活弯曲还是个问题。

但是,可以认为,手指和脚指同样都能够抓住东西。这就像动物园中的猴子等动物一样,手和脚都能灵活地揪住树枝。

由此可以想像,研究动物行为和进化论的专家或许也不知道伸出中指为1或弯曲1个指头为1,还是用右手朝向左手的1个手指头为1。

但是,用一只手的5个指头是否就认为不是表示由1到5里面1,2,3,4,5的数呢?

§ 1.4 数起源于5进位的数

居住在中美洲的玛雅部落,大约在450年前就已衰败灭亡了。但是,玛雅部落所使用的数字却一直沿用至今,如图1-4所示。

一看便知这些数字是5进制,所以玛雅数字是5进位的。据说,●代表女性,■代表男性。

可是,也有人说,在玛雅部落中以20为单位,使用