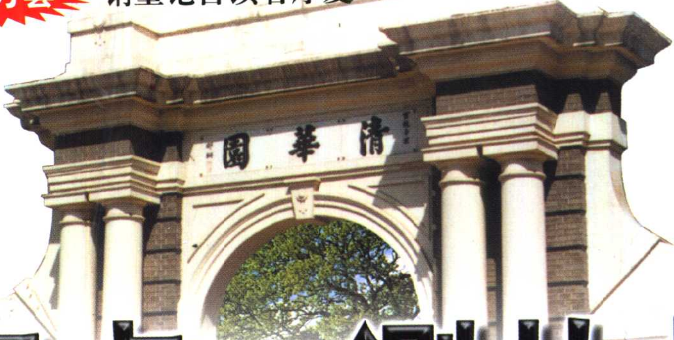
100万套 销量饱含读者厚爱

名誉主编 雷洁琼

丛书主编 希扬



三点一测丛书

树品牌典范 拓成才之路

第二次修订版

重点难点提示

知识点精析

综合能力测试

高一数学 试验修订本（下）

主编 岑志林

与2003年最新教材同步

科学出版社 龍門書局

三点一测丛书

（第二修订版）

高一数学试验修订本（下）

⊙ 岑志林 主编

科学出版社
龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

三点一测丛书.高一数学:试验修订本.下/希扬主编;岑志林分册主编.—修订版.—北京:科学出版社 龙门书局,2003

ISBN 7-80160-161-0

Ⅰ.三…　Ⅱ.①希…②岑…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第081134号

责任编辑:王　敏　/　封面设计:东方上林工作室

科学出版社
龙门书局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2001年2月第　一　版　　开本:850×1168　1/32

2003年1月第二次修订版　　印张:6 1/2

2003年1月第四次印刷　　字数:175 000

印数:155 001—245 000

定　价:　7.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

教育为振兴
中华之本

雷洁琼
一九九九年三月

目　录

第四章　三角函数 ……………………………… (1)
一、任意角的三角函数 ……………………………… (1)
4.1　角的概念的推广 ……………………………… (1)
4.2　弧度制 ……………………………… (1)
4.3　任意角的三角函数 ……………………………… (1)
4.4　同角三角函数的基本关系式 ……………………………… (16)
4.5　正弦、余弦的诱导公式 ……………………………… (28)
二、两角和与差的三角函数 ……………………………… (32)
4.6　两角和与差的正弦、余弦、正切 ……………………………… (33)
4.7(一)　二倍角的正弦、余弦和正切 ……………………………… (40)
4.7(二)　半角的正弦、余弦、正切 ……………………………… (46)
三、三角函数的图象和性质 ……………………………… (53)
4.8　正弦函数、余弦函数的图象和性质 ……………………………… (53)
4.9　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象 ……………………………… (63)
4.10　正切函数的图象和性质 ……………………………… (71)
4.11　已知三角函数值求角 ……………………………… (77)
本章测试题 ……………………………… (82)
参考答案 ……………………………… (85)
第五章　平面向量 ……………………………… (100)
一、向量及其运算 ……………………………… (100)
5.1　向量 ……………………………… (101)
5.2　向量的加法与减法 ……………………………… (101)
5.3　实数与向量的积 ……………………………… (115)
5.4　平面向量的坐标运算 ……………………………… (123)
5.5　线段的定比分点 ……………………………… (129)

5.6 平面向量的数量积及运算律 …………………………………………… (135)
5.7 平面向量数量积的坐标表示 …………………………………………… (135)
5.8 平移 ………………………………………………………………………… (143)
二、解斜三角形 ……………………………………………………………… (147)
5.9 正弦定理、余弦定理 ……………………………………………………… (147)
5.10 解斜三角形应用举例 …………………………………………………… (156)
5.11 研究性课题:向量在物理中的应用 ………………………………… (160)
本章测试题 …………………………………………………………………… (164)
参考答案 ……………………………………………………………………… (168)
下学期期中测试题 ………………………………………………………… (189)
下学期期末测试题 ………………………………………………………… (195)

第四章　三角函数

本章主要有角的概念的推广,弧度制,任意角的三角函数,同角三角函数的基本关系式,诱导公式,已知三角函数值求角,用单位圆中的线段表示三角函数值,正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的图象和性质,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象等,共 11 个知识点.

一、任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广
4.2　弧度制
4.3　任意角的三角函数

重点难点提示

这三小节在给出了 $0^\circ \sim 360^\circ$的角的三角函数的基础上,进一步在角的概念推广到任意角的情况下给出了任意角的三角函数的概念;介绍了角的另一种度量制——弧度制,以及角度制与弧度制的换算,给出了用弧度制与角度制计算弧长与扇形面积的公式.

重点　任意角的三角函数的定义;角度制与弧度制的换算.

难点　终边相同的角的一般表示方法;对弧度制概念的理解.

知识点精析

4.1 角的概念的推广

本节将 $0°\sim360°$ 间的角推广到任意角，即大于 $360°$ 的角、负角以及零角.

1. 正角和负角是表示具有相反意义的旋转量，按习惯我们规定了角的正负，就像规定了正数和负数一样. 零角不分正负.

2. 第几象限角是“以角的顶点为原点，角的始边在 x 轴的正半轴”为前提，按角的终边的位置来判断. 终边落在坐标轴上的角，不属于任何象限.

3. 注意以下区别：

$0°\sim90°$ 的角是 $\{\alpha \mid 0° \leqslant \alpha < 90°\}$；

第一象限的角是 $\{\alpha \mid k\cdot360° < \alpha < k\cdot360° + 90°, k \in \mathbf{Z}\}$；

锐角是 $\{\alpha \mid 0° < \alpha < 90°\}$；

小于 $90°$ 的角是 $\{\alpha \mid \alpha < 90°\}$.

4. 终边相同的角不一定相等，它们之间可以相差 $360°$ 的整数倍. 与角 α 终边相同的角的一般形式是 $k\cdot360° + \alpha, k \in \mathbf{Z}$; 而相等的角，终边一定相同.

5. 终边在坐标轴上的角，今后要经常用到，应该熟练掌握这些角的表达式. 例如：

终边在 x 轴的正半轴上的角是 $k\cdot360°, k \in \mathbf{Z}$;

终边在 x 轴的负半轴上的角是 $k\cdot360° + 180°, k \in \mathbf{Z}$;

终边在 x 轴上的角是 $k\cdot180°, k \in \mathbf{Z}$.

4.2 弧度制

弧度制是度量角的又一种制度. 弧度制是本章的难点之一.

1. 定义：等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度(rad).

因为圆心角一定时，它所对的弧长与半径的比值是一定的，所以用一个角所对的弧长与半径的比值来度量这个角是合理的，并且与所取半径的长短无关.

2. 用弧度制度量角使每一个角都对应着一个实数(即这个角的弧度数)；反过来，每一个实数也都对应着一个角(角的弧度数等于这个实数)，这就使角的集合与实数集之间建立了一一对应的关系，于是可以把三角函数看成是以实数为自变量的函数.

3. 弧度与角度的相互换算：

$360^\circ = 2\pi$ 弧度， $180^\circ = \pi$ 弧度，

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度， 1 弧度 $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

4. 弧长 l、圆的半径 r 与圆心角的弧度数 α 的关系：$|\alpha| = \frac{l}{r}$，即 $l = |\alpha| \cdot r$.

扇形面积可表示为 $S_{扇形} = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$.

5. 角度制与弧度制不要混用，防止出现 $2k\pi + 30^\circ$，或 $k \cdot 360^\circ + \frac{\pi}{6}$ 等错误写法.

4.3 任意角的三角函数

1. 定义:设 $P(x,y)$ 是角 α 终边上任意一点，$|PO| = r$ $(r>0)$，则

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot\alpha = \frac{x}{y},$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x}, \quad \csc\alpha = \frac{r}{y}.$$

$$(x \neq 0) \qquad (y \neq 0)$$

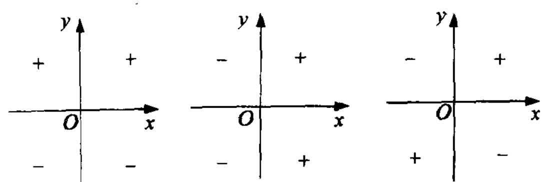
任意角的三角函数的定义是本章最重要的概念，是学好本章的关键，务必熟练掌握.

2. 三角函数的定义域，见表 4-1.

表 4-1

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$
$\cos\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\text{且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$
$\cot\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\text{且 }\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
$\sec\alpha$	$\left\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\text{且 }\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$
$\csc\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\text{且 }\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

3. 三角函数值在各个象限的符号,如图 4-1.



$\sin\alpha$ 和 $\csc\alpha$　　$\cos\alpha$ 和 $\sec\alpha$　　$\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$

图 4-1

4. 终边相同的角的三角函数值相等,即

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$;　　$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$;

$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$;　　$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$.

但是,三角函数值相等,角不一定相等.

5. 正弦、余弦、正切这三种三角函数的一种几何表示——三角函数线.

用单位圆中的有向线段表示三角函数值,是数形结合的典型体现.利用单位圆中的有向线段表示三角函数,给我们研究三角函数带来很大的方便.

(1) 设角 α 的终边与单位圆交于点 P,如图 4-2 所示.作 PM

$\perp x$ 轴,垂足为 M.设单位圆与 x 轴的正半轴交于点 A,过 A 作圆的切线交角 α 的终边(或终边的反向延长线)于 T,则

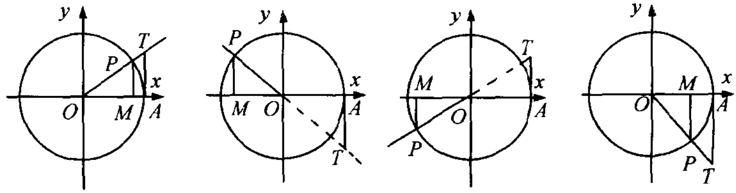


图 4-2

$$\sin\alpha = MP, \cos\alpha = OM, \tan\alpha = AT.$$

我们把 MP,OM,AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线,统称三角函数线.

(2) 三角函数线表示的三角函数值的正负规定如下:

①正弦线、正切线的方向同 y 轴一致,向上为正,向下为负;

②余弦线的方向同 x 轴一致,向右为正,向左为负.

(3) 作三角函数线时,所用字母一般都是固定的,书写顺序也不能颠倒,以免出现错误.特别注意正切线是在过点 A(单位圆与 x 轴的正半轴的交点)的单位圆的切线上.

知识点应用

【例 1】 已知角 α 的终边经过点 $P(3a,-4a)$($a<0,0°\leqslant\alpha<360°$),求角 α 的正弦、余弦、正切、余切值.

解 如图 4-3.

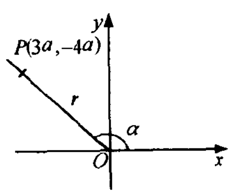


图 4-3

$\because$ $x=3a, y=-4a, a<0$

$\therefore$ $r=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}$

$=-5a$.

$\therefore$ $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4a}{-5a}=\dfrac{4}{5}$,

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3a}{-5a}=-\dfrac{3}{5}$,

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-4a}{3a}=-\frac{4}{3},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{3a}{-4a}=-\frac{3}{4}.$$

【例 2】 求 315°角的正弦、余弦、正切、余切值.

解 如图 4-4,在 315°角的终边上取一点 $P(x,y)$.

设 $OP=r$,作 PM 垂直于 x 轴,垂足是 M,可见 $\angle POM=45°$,于是可得

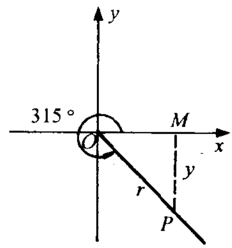


图 4-4

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}r,\quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}r.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-1,$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=-1.$$

【例 3】 已知 $90°<\alpha<180°$,角 α 的终边上一点 $P(x,\sqrt{5})$.若 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$,求 $\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值.

解 $\because\quad r=\sqrt{x^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{x^2+5},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},$

$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{2}}{4}x,\quad \because 90°<\alpha<180°,\quad \therefore x<0,$$

$\therefore$ 解出 $x=-\sqrt{3}$,

则 $r=\sqrt{3+5}=2\sqrt{2}$,

且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$,

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{15}}{3}$.

【例 4】 写出第二象限的角的集合.

解 在 $0^\circ\sim360^\circ$间,终边在第二象限的角的取值范围是 $90^\circ<\alpha<180^\circ$. 因此,终边在第二象限的角的集合是 $\{\alpha\mid k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

【例 5】 若 α 是第三象限的角,问$\frac{\alpha}{2}$是哪个象限的角?

解 $\because$ α 是第三象限的角,

$\therefore$ $k\cdot360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ $k\cdot180^\circ+90^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时,有

$$n\cdot360^\circ+90^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+135^\circ,n\in\mathbf{Z}.$$

$\therefore$ $\frac{\alpha}{2}$是第二象限的角.

当 $k=2n-1,n\in\mathbf{Z}$ 时,有

$$n\cdot360^\circ-90^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ-45^\circ,n\in\mathbf{Z}.$$

$\therefore$ $\frac{\alpha}{2}$是第四象限的角,

故$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限的角,如图4-5所示

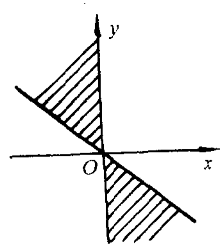


图 4-5

【例 6】 若角 α 的终边经过点$P(\sqrt{3},-1)$,试写出角 α 的集合A,并求出集合A 中绝对值最小的角.

解 $\because$ $x=\sqrt{3}$, $y=-1$,

$\therefore$ 角 α 的终边在第四象限.

$\because$ $r=2$，则 $\sin\alpha=\frac{-1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小正角为 330°.

$\therefore$ 集合 $A=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360^\circ+330^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

当 $k=-1$ 时，$\alpha=-30^\circ$ 为绝对值最小的角.

【例 7】 用弧度制表示下列角的集合：

(1) 终边在 x 轴的正半轴；

(2) 终边在 x 轴的负半轴；

(3) 终边在 x 轴；

(4) 第一象限的角；

(5) 第二象限的角.

解 (1) $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $\{\alpha\mid\alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；

(4) $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(5) $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

【例 8】 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 ( )

A. $M=N$ B. $M\supsetneqq N$

C. $M\subsetneqq N$ D. $M\cap N=\varnothing$

解法 1

$$M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}(2k+1), k\in\mathbf{Z}\right\},$$

$$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}(k+2), k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

由于当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k+1$ 是奇数，$k+2$ 是整数，显然 $M\subsetneqq N$，故应选 C.

解法 2 由于$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$表示终边与 x 轴和 y 轴重合的角的集合，所以$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$表示终边落在与直线 $y=x$ 和直线 $y=-x$ 重合的 4 个位置(如图 4-6(1)).

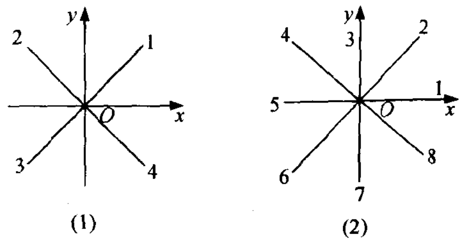


图 4-6

又由于$\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$表示终边落在与 x 轴、y 轴及直线 $y=\pm x$ 重合的 8 个位置上(如图 4-6(2))，显然 $M\subsetneqq N$.

【例 9】 如图 4-7，扇形 OAB 的面积是 4cm^2，它的周长是 10cm，求扇形的中心角 α 及弦 AB 的长.

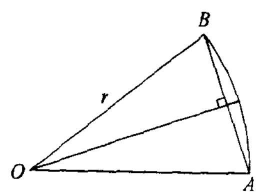


图 4-7

解 设$\overset{\frown}{AB}$长为 l，扇形半径为 r，则由已知得

$$\begin{cases} l+2r=10, \\ \frac{1}{2}r\cdot l=4, \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} r=4, \\ l=2. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{l}{r}=\frac{1}{2}\ (弧度),$$

$$弦\ AB=2\times4\times\sin\frac{1}{4}=8\sin\frac{1}{4}\ (\text{cm}).$$

【例 10】 设 θ 是第一象限的角，且 $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=-\sin\frac{\theta}{2}$，则$\frac{\theta}{2}$是 ( )

A. 第一象限的角　　B. 第二象限的角

C. 第三象限的角　　D. 第四象限的角

分析 因为 θ 是第一象限的角，所以有

$$2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.$$

$$\therefore\quad k\pi<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}.$$

若 k 是偶数，则$\frac{\theta}{2}$是第一象限的角；

若 k 是奇数，则$\frac{\theta}{2}$是第三象限的角.

又$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=-\sin\frac{\theta}{2}$，可知 $\sin\frac{\theta}{2}<0$，

即$\frac{\theta}{2}$是第三、四象限的角，或终边在 y 轴负半轴上.

综上可知，$\frac{\theta}{2}$是第三象限的角，

故本题选 C.

【例 11】 求函数 $y=\frac{1}{1+\sin x}$ 的定义域.

解 $\because\ 1+\sin x\neq 0$，　$\therefore\ \sin x\neq -1$，

即角 x 的终边不能在 y 轴的负半轴上.

$$\therefore\quad x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.$$

故函数的定义域是

$$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},\text{且 } x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

【例 12】 已知 $P(-\sqrt{3},y)$ 是角 α 终边上的一点，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}$，求 y 的值.

解 设 P 点到原点的距离为 r，则 $r=\sqrt{3+y^2}$.

由三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

解得　$y=\pm\frac{1}{2}$.

又 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}>0$, $\therefore$ α 是第一、二象限的角.

$\therefore$ $y>0$, 故 $y=\frac{1}{2}$.

【例 13】 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,求证 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

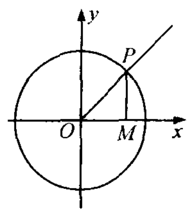


图 4-8

证明 如图 4-8,设角 α 的终边与单位圆的交点为 P.作 $PM\perp Ox$,垂足为 M,则 $\sin\alpha=MP$,$\cos\alpha=OM$.

在$\triangle POM$ 中,

$\because$ $MP+OM>OP$,

$\therefore$ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

【例 14】 若 $\sin^2x>\cos^2x$,则 x 的取值范围是 ( )

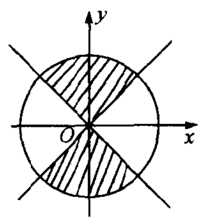


图 4-9

A. $\left\{x\left|2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B. $\left\{x\left|2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D. $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

分析 $\sin^2x>\cos^2x\Leftrightarrow|\sin x|>|\cos x|$.

如图 4-9,用单位圆中的线段表示三角函数值,不难看出终边在阴影部分的角满足$|\sin x|>|\cos x|$,即

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}.$$

故本题选 D .

【例 15】 设 α 是第四象限角,试比较 $\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 的大小.

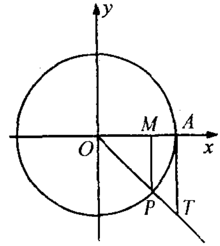


图 4-10

解 如图 4-10,设角 α 的终边与单位