高 等 学 校 教 材

高等数学(文科类)

下 册

盛立人 罗定军 主编

沈苏林 吴永康 郭金吉 甘 泉 编

化学工业出版社

教 材 出 版 中 心

·北 京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/盛立人，罗定军主编．—北京：化学工业出版社，2001.6
高等学校教材．文科类
ISBN 7-5025-3400-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①盛…　②罗…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 035958 号

高等学校教材
高等数学（文科类）
下　册
盛立人　罗定军　主编
沈苏林　吴永康　郭金吉　甘　泉　编
责任编辑：唐旭华
责任校对：马燕珠
封面设计：田彦文
*
化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：(010)64918013
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 14　字数 376 千字
2001 年 7 月第 1 版　　2001 年 7 月北京第 1 次印刷
印　数：1—6000
ISBN 7-5025-3400-8/G・916
定　价：20.00 元

内 容 提 要

本书为大学文科高等数学教材，分上下两册，上册包括微积分与微分方程，下册包括线性代数、概率统计与实用规划. 本书内容精练、篇幅紧凑，尽可能地适应文科学生的特点，用通俗易懂的语言表述基本的数学概念与方法，通过较多的例题阐明用数学方法处理一些应用问题的思路，启发学生学习高等数学的兴趣，使本书更具吸引性和可读性.

本书可作为高等学校文科类(包括工科院校经济管理类)专业的教材，对广大社会工作者来说也是一本较好的学习参考书.

目　　录

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计初步

第四篇　实 用 规 划

第二篇 线性代数

解代数方程是古典代数的主要内容，代数的原始思想是用符号来表示未知数，但是，用文字来记一般表达式符号的方法直到16世纪才开始确立. 在19世纪，从一元一次方程出发的沿着多元一次方程组发展起来的线性代数已经获得了辉煌的成就. 当然，当今代数学的研究对象已远不止是这些内容. 然而，作为高等数学的一个重要分支，线性代数至今仍有着广泛的应用. 线性代数的主要内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，线性空间，线性变换，矩阵的特征值，二次型等，本篇主要介绍其中的部分内容.

第八章 行列式与矩阵

§1 行列式的定义与性质

行列式的概念源于解线性方程组，它是研究线性代数的一个重要工具，同时它在数学的其他分支以及许多科学领域中也有广泛的应用. 在这一节，我们将学习行列式的定义、性质和计算方法，并介绍应用行列式解特殊线性方程组的克莱姆（Cramer）法则.

1. 二、三阶行列式的定义

在中学，我们曾经学过用加减消元法解二元一次方程组，即含有两个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

这里 a_{11}，a_{21}；a_{12}，a_{22}分别为两个方程中未知数 x_1，x_2 的系数，b_1，b_2 为常数项. 消元法的过程是这样的：将第一个方程乘以数 a_{22}与第二个方程乘以数$-a_{12}$后相加，得到关于未知数 x_1 的一元一次方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地，将第一个方程乘以数$-a_{21}$与第二个方程乘以数a_{11}后相加，又可得到关于未知数x_2的一元一次方程

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当上两式中$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，可得上述线性方程组的惟一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于记忆，我们将上述解公式中的代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

类似地，也可将解中的另外两个代数和用这种记号表示出来，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

于是，当$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$时，线性方程组的惟一解就可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}.$$

我们用这个公式来解一个具体的线性方程组.

例 1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=1, \\ 3x_1-2x_2=-1. \end{cases}$$

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-(-1)\times 3=-1\neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-(-1)\times(-1)=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times 3=-5,$$

所以线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=5$.

这里我们给出的记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 称为一个**二阶行列式**，它是由两行两列 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 排成的一个方块，两边再各加上一条竖线所形成，它表示一个数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 它的横排称为**行**，竖排称为**列**，方块中的每个数均称为**行列式的元素**，于是得到

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

类似地，将 9 个数 a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33} 排成的一个三行三列的方块，两边各加上一条竖线的记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 称为一个**三阶行列式**，用它表示以下 6 项乘积的代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，即有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

解 根据行列式的定义，我们有

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\times 3\times 2+2\times 1\times 3+3\times 2\times 1$$

$$-3\times 3\times 3-2\times 2\times 2-1\times 1\times 1$$
$$=-18.$$

为了方便地给出更高阶行列式的定义，我们将三阶行列式用相应的二阶行列式的表达式表示出来，即为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这里的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 分别是原三阶行列式中划去元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}所在的行和列，剩下的 4 个元素按原来的排法组成的二阶行列式，我们分别称它们为元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}的**余子式**，记为 M_{11}，M_{12}，M_{13}. 于是，我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

这里，我们给出了用三阶行列式第一行元素与其相应余子式乘积的代数和表示三阶行列式的表达式. 同样可以用此表达式来计算行列式，仍举上面的例 2，我们得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=1\cdot 5-2\cdot 1+3\cdot(-7)=-18.$$

2. *n* 阶行列式的定义

在上小段，我们给出了二阶、三阶行列式的定义. 如果我们将

一阶行列式 $|a|$ 就定义为 a，那么二阶、三阶行列式都可以看成是由低一级行列式定义出来的. 依此类推，我们可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 8.1 将 n^2 个数排成的 n 行 n 列的一个方块，两边各加上一条竖线的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8.1}$$

称为一个 **n 阶行列式**，它可用低一级的 $n-1$ 阶行列式表示为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &+ (-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

它的横排称为**行**，竖排称为**列**，方块中的每个数均称为**行列式的元素**.

为了能够简便地表示出 n 阶行列式 (8.1)，下面我们给出 (8.1) 中元素 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 的余子式和代数余子式的概念.

定义 8.2 在 n 阶行列式 (8.1) 中划去元素 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 所在的行和列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法组成的 $n-1$ 阶行列式，称为 n 阶行列式 (8.1) 中元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

称 A_{ij}为元素 a_{ij}的**代数余子式**.

根据定义 8.1 和定义 8.2，我们可将 n 阶行列式（8.1）表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots\cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots\cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

这里，我们用 n 阶行列式的第一行元素与其相应的代数余子式乘积的和来表示 n 阶行列式，这称为 **n 阶行列式按第一行的展开式**. 类似地，我们也可将 n 阶行列式按其他行或列进行展开（详见本节第 4 段行列式的展开）.

一般情况下，如果行列式的阶数 n 较大或形式较复杂，直接用定义计算行列式往往是十分繁琐的. 但是，当所求行列式含有较多的零元素时，还是可以用行列式的定义来计算行列式的.

例 3 计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　根据 4 阶行列式按第一行的展开式，我们有

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}6\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5\left(5\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}6\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right) - 6\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 19\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 30\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 19\times19 - 30\times5 = 211.$$

3. 行列式的性质

为了能够方便地进行行列式的计算和化简，下面我们不加证明地给出行列式的一些重要性质.

性质 1　行列式的行与列顺次互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式中的两个行列式互称为**转置行列式**，其中一个行列式的 n 个行恰好顺次为另一个行列式的 n 个列. 因此，性质 1 也可改写为：行列式与其转置行列式相等.

性质 1 说明行列式中行与列的地位是平等的，对行列式行成立的性质，对列也同样成立，反过来也是对的. 正因为如此，下面对行列式的讨论大多对行来进行.

例 4　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**上三角行列式**，其特点是在元素 a_{11} 到 a_{nn} 所成的对角线（称为行列式的**主对角线**）以下的元素全为零.

解 根据性质 1 以及 n 阶行列式按第一行的展开式，我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 说明，上三角行列式等于其主对角线上元素之积.

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式变号.

例如，交换三阶行列式的第一行与第三行，由性质 2 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

推论 1 如果行列式有两行（或两列）的对应元素相同，则行列式等于零.

例如，根据推论 1 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 3 行列式某一行（或列）的所有元素乘以一个数 k，等于用 k 乘以这个行列式，即